Sur une décomposition effective de fonctions en $\aleph_2$ classes.

Par

W. Sierpiński (Varsovie).

Le but de cette Note est de *décomposer effectivement l'ensemble de toutes les fonctions d'une variable réelle en $\aleph_2$ classes non vides, sans éléments communs deux à deux.*

On peut, d'après Cantor, définir effectivement une correspondance biunivoque entre l'ensemble de toutes les fonctions d'une variable réelle et l'ensemble de toutes les fonctions de deux variables réelles: il suffira donc démontrer notre théorème pour l'ensemble Φ de toutes les fonctions de deux variables réelles.

Soit α un nombre ordinal donné > 1 de classe 1, 2 ou 3, $f(x, y)$ une fonction donnée de deux variables réelles.

Nous dirons que $f(x, y)$ appartient à l'ensemble E_α, si les quatre conditions suivantes sont vérifiées.

1) $f(x, y)$ ne prend que les valeurs 0, 1 et -1

Soit Π l'ensemble de tous les points (x, y) du plan, tels que $f(x, y) \neq 0$: désignons par P la projection orthogonale de Π sur l'axe d'abscisses. Les conditions 2) et 3) sont:

2) si $x \varepsilon P$, $y \varepsilon P$, $y \neq x$, on a $f(x, y) = -f(y, x) \neq 0$.

3) si $x \varepsilon P$, $y \varepsilon P$, $z \varepsilon P$ et $f(x, y) = f(y, z)$, on a $f(x, y) = f(x, z)$. x et y étant deux nombres de P, convenons que $x \prec y$, si $f(x, y) = 1$. Il résulte de 1), 2) et 3) que cette convention *ordonne* l'ensemble P (En effet, d'après 1) et 2), on a, pour $x \varepsilon P$, $y \varepsilon P$, $x \neq y$, soit $f(x, y) = 1$, donc $x \prec y$, soit $f(y, x) = 1$, donc $y \prec x$, l'un de ces cas excluant l'autre, et d'après 3), pour $x \varepsilon P$, $y \varepsilon P$, $z \varepsilon P$, les formules $x \prec y$ et $y \prec z$ entraînent la formule $x \prec z$).

La condition 4) est la suivante:

4) P est un ensemble bien ordonné du type α.

Si $f(x, y)$ n'appartient à aucun ensemble E_α, où α est un nombre ordinal >1 de classe 1, 2 ou 3, nous dirons que $f(x, y)$ appartient à l'ensemble E_1. On voit sans peine que l'ensemble E_1 est non vide.

Nous avons évidemment la formule

$$\Phi = E_1 + E_2 + \ldots + E_\alpha + \ldots, \qquad (\overline{\alpha} < \aleph_2) \tag{1}$$

les termes de cette suite transfinie étant des ensembles sans points communs deux à deux et la sommation s'étendant à tous les nombres ordinaux de trois premières classes. L'ensemble de tous les termes de la suite (1) a donc la puissance $\aleph_2$.

Il nous reste à démontrer que les ensembles E_α sont tous non vides, pour $\alpha > 1$ (puisque $E_1 \neq 0$).

Soit donc α un nombre ordinal donné >1 de classe 1, 2 ou 3. $\overline{\alpha}$ désignant la puissance correspondant au nombre α, on aura évidemment $\overline{\alpha} \leqslant \aleph_1$, donc $\overline{\alpha} \leqslant 2^{\aleph_0}$ (puisque on a $\aleph_1 \leqslant 2^{\aleph_0}$). Il en résulte qu'il existe un ensemble ordonné P du type α, dont les éléments sont des nombres réels différents. Définissons maintenant la fonction $f(x, y)$ de deux variables réelles comme il suit.

Si $x \varepsilon P$, $y \varepsilon P$, $y \neq x$, posons $f(x, y) = 1$ lorsque $x \prec y$ dans P, et $f(x, y) = -1$, lorsque $y \prec x$ dans P. Dans tous les autres cas posons $f(x, y) = 0$. On voit sans peine que la fonction $f(x, y)$ ainsi définie vérifie les conditions 1), 2), 3) et 4): donc elle appartient à l'ensemble E_α, et parsuite nous avons $E_\alpha \neq 0$, c. q. f. d.

La formule (1) donne donc la décomposition désirée.

Observons que nous avons prouvé en même temps qu'on peut définir tout nombre de classe $\leqslant 3$ en déterminant une classe de fonctions convenable (de deux variables). Or, comme on sait, on peut définir tout nombre de classe $\leqslant 2$, en déterminant une classe de nombres réels convenable.

Remarquons encore que si, au lieu de se borner aux nombres α de classes 1, 2 et 3, on considerait tous les nombres ordinaux α, tels que $\overline{\alpha} < 2^{\aleph_0}$, on obtiendrait *un exemple effectif d'un ensemble bien ordonné de puissance du continu, dont les éléments sont des ensembles de fonctions d'une variable réelle*[1]).

[1]) Cf. *Fund. Math.* t. II, p. 117.