Sur l'ensemble des points de divergence des séries de Fourier des fonctions continues

par

J. Śladkowska (Łódź)

Erdös, Herzog et Piranian ([1]) ont démontré que chaque ensemble de mesure logarithmique zéro est l'ensemble des points de divergence de la série de Fourier d'une certaine fonction continue. Si, de plus, l'ensemble E est de classe F_σ, il existe une fonction continue dont la série est divergente pour chaque $x \in E$ et convergente pour chaque $x \notin E$. On sait depuis longtemps que l'ensemble E de tous les points de divergence doit être de classe $G_{\delta\sigma}$ si l'oscillation est finie, de classe G_δ si l'oscillation est infinite. Dans cette note je vais démontrer que ces conditions (l'ensemble E est de classe $G_{\delta\sigma}$ et de mesure logarithmique zéro si l'oscillation est finie, de classe G_δ et de mesure logarithmique zéro si l'oscillation est infinie) suffisent, toutefois avec une certaine restriction, pour qu'il existe une fonction continue dont la série de Fourier ait les propriétés énumérées.

Un ensemble E de nombres réels a pour mesure logarithmique zéro si l'on peut le recouvrir par une quantité tout au plus dénombrable de segments ouverts de longueurs L_j, $L_j < 1$, telles que $\sum_j \frac{1}{\log(1/L_j)}$ soit arbitrairement petite.

Je dirai qu'un ensemble E de nombres réels est périodique de période a, si sa fonction caractéristique est périodique de période a.

Je désigne par $S_k(x, f)$ la $k^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier de la fonction $f(x)$ au point x.

LEMME. *Pour tout ensemble E périodique de période 2π, $E \in G_\delta$ et tel que $\bar{E}$ est de mesure logarithmique zéro, il existe une fonction périodique et continue $f(x)$ dont la série de Fourier a les propriétés suivantes:*

1° *la suite $\{S_k(x, f)\}$ est bornée, $|S_k(x, f)| \leqslant A$ pour chaque x et pour chaque $k = 0, 1, \ldots$;*

2° *la suite $\{S_k(x, f)\}$ est divergente pour chaque $x \in E$;*

3° *la suite $\{S_k(x, f)\}$ est convergente pour chaque $x \notin E$.*

Démonstration. ε étant un nombre arbitraire positif plus petit que $\frac{1}{4}$, il existe un système tout au plus dénombrable de segments ouverts $B^{(m)}$ de longueurs $2b^{(m)}$, $b^{(m)} < 2^{-8}$, $m = 1, 2, \ldots$, tels que leurs somme recouvre $\bar{E}$ et que

$$\sum_m \frac{1}{\log(1/2b^{(m)})} < \varepsilon \ (^1).$$

Rangeons les segments $B^{(m)}$ en une suite selon la règle suivante: partageons les nombres en classes, en mettant le nombre $b^{(m)}$ dans la classe $\mathfrak{B}^l$, $l = 0, 1, \ldots$, si

$$2^{-(l+1)} \leqslant b^{(m)} < 2^{-l}.$$

A chaque classe $\mathfrak{B}_l$ appartient évidemment une quantité tout au plus finie de nombres $b^{(m)}$, et certaines de ces classes doivent être vides. Désignons par $\{l_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, la suite partielle de la suite $\{l\}$ telle que

$$\mathfrak{B}_{l_j} \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}_l = 0 \quad \text{pour} \quad l \neq l_j \ (^2), \ j = 1, 2, \ldots$$

En posant $\mathfrak{B}_j^* = \mathfrak{B}_{l_j}$, $j = 1, 2, \ldots$, nous obtenons un ensemble de classes $\{\mathfrak{B}_j^*\}$ non vides. Le nombre $b^{(m)}$ appartient à la classe $\mathfrak{B}_j^*$ si

$$2^{-(l_j+1)} \leqslant b^{(m)} < 2^{-l_j}.$$

Soit k_j, $k_j \geqslant 1$, le nombre des $b^{(m)}$ appartenant à la classe $\mathfrak{B}_j^*$. Désignant les nombres $b^{(m)}$ de la classe $\mathfrak{B}_1^*$ par

$$b_1, b_2, \ldots, b_{k_1},$$

ceux de la classe $\mathfrak{B}_2^*$ par

$$b_{k_1+1}, b_{k_1+2}, \ldots, b_{k_1+k_2},$$

etc., nous rangeons tous les nombres $b^{(m)}$ et, par conséquent, les segments $B^{(m)}$ en une nouvelle suite

$$\{b_n\}\colon\ b_1, b_2, \ldots, b_{k_1}, b_{k_1+1}, \ldots, b_{k_1+k_2}, b_{k_1+k_2+1}, \ldots$$

Remarquons que

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{l_j} < \varepsilon.$$

A la suite $\{b_n\}$ nous faisons correspondre une suite de nombres naturels $\{m_n\}$ de la façon suivante:

(1) Le symbole log désigne dans ce travail le logarithme a base 2, par contre, comme d'habitude, ln le logarithme naturel.

(2) A cause de l'inégalité $b^{(m)} < 2^{-8}$, $l_j \geqslant 8$.

$$\begin{aligned}
&m_1 = 2^{p_1}, \quad m_2 = 2^{p_1+1}, \quad \ldots, \quad m_{k_1} = 2^{p_1+k_1-1},\\
&m_{k_1+1} = 2^{p_2}, \quad m_{k_1+2} = 2^{p_2+1}, \quad \ldots, \quad m_{k_1+k_2} = 2^{p_2+k_2-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&m_{k_1+k_2+\ldots+k_{j-1}+1} = 2^{p_j}, \quad \ldots, \quad m_{k_1+k_2+\ldots+k_j} = 2^{p_j+k_j-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

où (3)

$$p_1 = [1\tfrac{1}{2}l_1], \quad p_j = \max\{[1\tfrac{1}{2}l_j], p_{j-1}+k_{j-1}\}, \quad j = 2, 3, \ldots$$

Remarquons que

1° *La suite* $\{m_n\}$ *ne croît pas plus lentement que la progression géométrique* $\{2^n\}$,

$$2^\circ \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log m_n b_n} < 4\varepsilon.$$

En effet, si $b_n \in \mathfrak{B}_j^*$, on a

$$\frac{1}{\log m_n b_n} \leqslant \frac{1}{\log 2^{p_j} + \log 2^{-(l_j-1)}} \leqslant \frac{1}{1\frac{1}{2}l_j - 2 - l_j} < \frac{4}{l_j},$$

d'où, à cause de (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log m_n b_n} < 4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_j}{l_j} < 4\varepsilon.$$

3° *La suite* $\{a_n\}$, *où* $a_n = m_n b_n^2$, *tend vers zéro de telle façon que* $a_n > b_n$ *et* $a_n/b_n \to +\infty$.

En effet, de la définition des nombres p_j nous déduisons facilement que

$$p_j = \max\{[1\tfrac{1}{2}l_j], [1\tfrac{1}{2}l_{j-1}]+k_{j-1}, [1\tfrac{1}{2}l_{j-2}]+k_{j-2}+k_{j-1}, \ldots, [1\tfrac{1}{2}l_1]+k_1+k_2+\ldots+k_{j-1}\},$$

d'où

$$(2) \qquad p_j \leqslant [1\tfrac{1}{2}l_j]+k_1+k_2+\ldots+k_{j-1}.$$

Etant donné que

$$\frac{k_1+k_2+\ldots+k_j}{l_j} \leqslant \frac{k_1}{l_1}+\frac{k_2}{l_2}+\ldots+\frac{k_j}{l_j} < \varepsilon < \frac{1}{4},$$

on a ensuite

$$(3) \qquad k_1+k_2+\ldots+k_j < \tfrac{1}{4}l_j \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots$$

(3) $[x]$ désigne le plus grand nombre entier $\leqslant x$.

Si maintenant $k_1+\ldots+k_{j-1}+1 \leqslant n \leqslant k_1+\ldots+k_j$, nous aurons, vu (2) et (3),

$$a_n \leqslant m_{k_1+\ldots+k_j}\cdot b_n^2 \leqslant 2^{p_j+k_j-1}\cdot 2^{-2l_j} \leqslant 2^{3l_j/2+l_j/4-2l_j-1} = 2^{-l_j/2-1}, \tag{4}$$

par conséquent $a_n \to 0$ et $a_n/b_n = m_n b_n \geqslant 2^{p_j}\cdot 2^{-(l_j+1)} \geqslant 2^{l_j/2-2} \to \infty$.

4° *Pour $\eta > 0$ arbitraire il existe un $\delta > 0$ tel que si $b_n < \delta$ alors $a_n+\pi/6m_n < \eta$, et δ ne dépend ni des nombres l_j, ni des nombres k_j, ni même de ε, à condition que l'on prenne $\varepsilon < \frac{1}{4}$, c'est-à-dire δ, ne dépend pas du système de segments couvrant l'ensemble E.*

En effet, admettons

$$\delta = 2^{-4\log(1/\eta)}, \qquad \eta < \tfrac{1}{4}.$$

Soit ensuite B_n un segment arbitraire de notre système de segments tel que

$$b_n < 2^{-4\log(1/\eta)},$$

alors $b_n \in \mathfrak{B}_j^*$, ou $l_j \geqslant 4\log(1/\eta)-1$. Vu (4), le nombre correspondant a_n vérifie l'inégalité

$$a_n+\pi/6m_n \leqslant 2^{-l_j/4-1}+2^{-3l_j/2+1} < 2^{-l_j/4-1/4} < \eta,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Soit maintenant $(a, a+2\pi)$ un intervalle dont les extrémités n'appartiennent pas *à* $\bar{E}$. Un tel intervalle existe, car l'ensemble $\bar{E}$ est de mesure zéro et admet la période 2π. Posons

$$E_a = E\cdot(a, a+2\pi).$$

L'ensemble $E_a \subset \bar{E}_a \subset (a, a+2\pi)$ est de classe G_δ et la mesure logarithmique de $\bar{E}_a$ est zéro.

Recouvrons maintenant l'ensemble E_a d'une façon particulière par les segments B_n, en tenant evidemment compte la condition

$$\sum_n \frac{1}{\log(1/2b_n)} < \varepsilon, \qquad \varepsilon < \tfrac{1}{4}.$$

Posons tout d'abord

$$E_a = \bigcap_{p=1}^{\infty} G_p, \qquad G_p \supset G_{p+1} \quad \text{et} \quad G_p \text{ ouvert.} \tag{5}$$

On peut admettre (en multipliant au besoin par $(a, a+2\pi)$) que pour chaque p $G_p \subset (a, a+2\pi)$. Il suffit de le faire pour $p = 1$, car la suite $\{G_p\}$ est descendante. Soit S une composante quelconque de l'ensemble G_1; représentons-la comme la somme d'une quantité dénombrable de segments $\bar{O}_j$ fermés, dont les intérieurs sont disjoints et les extrémités

n'appartiennent pas à l'ensemble $\bar{E}_a$; ceci est possible, car l'ensemble $\bar{E}_a$, étant fermé et de mesure zéro, est non dense. Pour chaque segment $\bar{O}_j$ formons un segment ouvert O'_j ayant avec $\bar{O}_j$ le même milieu, tel que $\bar{O}_j \subset O'_j$ et que O'_j soit contenu dans le segment dont les extrémités sont les milieux des segments adjacents à $\bar{O}_j$. En prenant

$$\eta_j = \tfrac{1}{2}(\text{long.}\, O'_j - \text{long.}\, \bar{O}_j)$$

et en choisissant pour η_j, en vertu de 4°, le nombre correspondant δ_j, divisions le segment $\bar{O}_j$ en un nombre fini de segments fermés I_{jk}, dont la longueur ne depasse pas δ_j et les extrémités n'appartiennent pas à l'ensemble $\bar{E}_a$. En procédant de même avec chaque segment $\bar{O}_j$, on peut représenter la composante S comme la somme d'une quantité dénombrable de segments fermés I_{jk}, dont les extrémités n'appartiennent pas à l'ensemble $\bar{E}_a$ et les longueurs sont inférieures aux nombres correspondants δ_j. En répétant le même procédé avec chaque composante de l'ensemble G_1, on peut représenter celui-ci comme la somme d'une quantité dénombrable de segments fermés, d'intérieurs disjoints, ayant les propriétés énumérées plus haut. Rangeons tous ces segments en une suite simple $\{I_j\}$; alors $G_1 = \bigcup_j I_j$. Considérons l'ensemble $I_j\bar{E}_a$; c'est un ensemble fermé de mesure logarithmique zéro, par conséquent, au nombre $\varepsilon/2^{j+1}$ on peut faire correspondre un système tout au plus dénombrable de segments ouverts B_{jm} de longueurs $2b_{jm}$, tel que ce système recouvre l'ensemble $I_j\bar{E}_a$ et que

$$\sum_m \frac{1}{\log(1/2b_{jm})} < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}. \tag{6}$$

Nous multiplions le système $\{B_{jm}\}$ par I_j^0 (4) et modifions le système ainsi réduit de telle façon que les segments ayant des points intérieurs communs soient réunis en un seul segment. Le système de segments ainsi modifié vérifie également l'inégalité (6). En effet, si le segment b est la somme des segments $b_1, b_2, \ldots, b_k$, alors $b_1+b_2+\ldots+b_k \geqslant b$ et $b_j \leqslant b$, $j = 1, \ldots, k$. Etant donné que la fonction $\log x^{-1}/x^{-1}$ est croissante pour $x < 1/e$, on aura pour $b < 1/2e$

$$\frac{\log(1/2b_j)}{1/2b_j} \leqslant \frac{\log(1/2b)}{1/2b}, \qquad \text{donc} \qquad \log\frac{1}{2b_j} \leqslant \frac{b}{b_j}\log\frac{1}{2b},$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\log(1/2b_j)} \geqslant \frac{\sum_{j=1}^{k} b_j}{b}\cdot\frac{1}{\log(1/2b)} \geqslant \frac{1}{\log(1/2b)}.$$

(4) I_j^0 désigne l'intérieur du segment I_j.

Du système infini de segments ouverts B_{jm} qui recouvrent l'ensemble fermé $I_j\bar{E}_a$ nous extrayons maintenant, en vertu du théorème de Heine-Borel, un nombre fini de segments qui recouvrent également l'ensemble $I_j\bar{E}_a$. La longueur de chacun d'eux ne dépasse évidemment pas le nombre δ_j correspondant au segment I_j; ces segments sont disjoints. En faisant une construction analogue pour chaque segment I_j, nous obtiendrons finalement un ensemble dénombrable de segments $\{B_m^{(1)}\}$ de longueurs $2b_m^{(1)}$, qui recouvrent conjointement l'ensemble $G_1\bar{E}_a$ et tels que

$$\sum_m \frac{1}{\log(1/2b_m^{(1)})} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} = \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

En outre, chaque point de l'ensemble $G_1\bar{E}_a$ appartient à un seul segment $B_m^{(1)}$. En faisant correspondre au nombre $b_m^{(1)}$ les nombres $m_m^{(1)}$ et $a_m^{(1)}$ au moyen de la méthode décrite dans 3°, nous construisons deux nouveaux segments ouverts: le segment $A_m^{(1)}$ concentrique à $B_m^{(1)}$ de longueur $2a_m^{(1)}$ et le segment $\tilde{A}_m^{(1)}$, de même longueur $2a_m^{(1)}$, mais dont le milieu est déplacé de $-\pi/6m_m^{(1)}$ par rapport au milieu commun des segments $B_m^{(1)}$ et $A_m^{(1)}$. Les segments $A_m^{(1)}$ et $\tilde{A}_m^{(1)}$ sont contenus dans le segment O'_j correspondant à I_j. Il résulte de ce qui précède que le point arbitraire $x \in (a, a+2\pi]$ appartient à un nombre tout au plus fini de segments $A_m^{(1)}$ et $\tilde{A}_m^{(1)}$. En effet, si x n'appartient pas à G_1, il n'appartient à aucune composante S et, par suite, à aucun des segments $A_m^{(1)}$ ou $\tilde{A}_m^{(1)}$, qui sont entièrement contenus dans ces composantes. Si, au contraire, x appartient à G_1, il appartient à une certaine composante S et, par suite, à un ou deux des segments fermés $\bar{O}_j$, et chaque point du segment $\bar{O}_j$ appartient à un nombre tout au plus fini de segments $A_m^{(1)}$ et $\tilde{A}_m^{(1)}$: à ceux dont les milieux sont contenus dans un seul segment $\bar{O}_{nj}$, adjacent à $\bar{O}_j$, et à ceux dont les milieux sont contenus dans le segment $\bar{O}_j$ même.

Prenons maintenant l'ensemble G_2 et procédons avec lui comme avec l'ensemble G_1, avec la seule différence que nous imposerons au système des segments $\{B_m^{(2)}\}$ de longueurs $2b_m^{(2)}$ et recouvrant l'ensemble $G_2\bar{E}_a$ la condition

$$\sum_m \frac{1}{\log(1/2b_m^{(2)})} < \frac{\varepsilon}{2^2}.$$

En continuant le même procédé, nous obtiendrons un nombre dénombrable de systèmes dénombrables de segments $B_m^{(k)}$ de longueurs $2b_m^{(k)}$. Changeant le numérotage de ces segments, suivant le principe indiqué au début de cette note, nous rangeons la suite double $\{b_m^{(k)}\}$ en une suite simple $\{b_n\}$. Le système de segments ouverts ainsi obtenu recouvre évidemment l'ensemble E_a, puisque les segments de chaque suite ont cette propriété, et il possède les propriétés suivantes:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(1/2b_n)} < \varepsilon .$

b. *Si $x \in E_a$, x appartient à un nombre infini de segments B_n.*

En effet, lorsque $x \in E_a$, on a $x \in G_n$ pour chaque n, donc $x \in G_n\bar{E}_a$, et par conséquent x appartient au moins à un segment de la $n^{\text{ième}}$ suite.

c. *Si $x \in (a, a+2\pi]-E_a$, x appartient à un nombre tout au plus fini de segments A_n et $\tilde{A}_n$.*

En effet, si $x \in (a, a+2\pi]-E_a$, x n'appartient à aucun G_n et dans ce cas il n'appartient à aucun des segments A_n ou $\tilde{A}_n$, ou bien il appartient à un nombre fini d'ensembles G_n, soit $G_1, G_2, \ldots, G_{n_0}$; puisque chaque point $x \in (a, a+2\pi]$ appartient à un nombre tout au plus fini de segments $\tilde{A}_n$ ou A_n de chaque suite, notre point x appartient à un nombre fini de segments de n_0 suites initiales. N'appartenant pas à G_n pour $n > n_0$, il ne peut donc appartenir à aucun segment des suites suivantes. Une semblable construction pour les ensembles de mesure >0 et pour la fonction discontinue est appliquée par K. Zeller [2].

En désignant par x_n le centre de B_n, on peut écrire les suites de segments construites plus haut sous la forme:

$$\begin{aligned}
&\{B_n\}\colon\ \{(x_n-b_n,\, x_n+b_n)\},\\
&\{A_n\}\colon\ \{(x_n-a_n,\, x_n+a_n)\},\\
&\{\tilde{A}_n\}\colon\ \{(x_n-\pi/6m_n-a_n,\, x_n-\pi/6m_n+a_n)\}.
\end{aligned}$$

A l'aide de ces suites et de la suite $\{m_n\}$ nous construirons maintenant deux suites de fonctions $\{\varphi_n(x)\}$ et $\{\psi_n(x)\}$ continues et périodiques, qui sont définies sur le segment $(a, a+2\pi]$ comme il suit:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} (a_n-|x-x_n|)\sin m_n|x-x_n| & \text{pour} \quad x \in (x_n-a_n,\, x_n+a_n),\\ 0 & \text{pour} \quad x \in (a,\, a+2\pi]-(x_n-a_n,\, x_n+a_n),\end{cases}$$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \left(a_n-\left|x-x_n-\dfrac{\pi}{6m_n}\right|\right)\sin 3m_n\left|x-x_n-\dfrac{\pi}{6m_n}\right| \\ \qquad\qquad \text{pour} \quad x \in \left(x_n-\dfrac{\pi}{6m_n}-a_n,\, x_n-\dfrac{\pi}{6m_n}+a_n\right),\\ 0 \quad \text{pour} \quad x \in (a,\, a+2\pi]-\left(x_n-\dfrac{\pi}{6m_n}-a_n,\, x_n-\dfrac{\pi}{6m_n}+a_n\right).\end{cases}$$

On a les inégalités:

$$|\varphi_n(x)| \leqslant a_n, \qquad |\psi_n(x)| \leqslant a_n. \tag{7}$$

Posons

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\varphi_n(x)}{a_n\log a_n m_n} + \frac{\psi_n(x)}{a_n\log 3a_n m_n}\right). \tag{8}$$

Nous allons démontrer que $f(x)$ a les propriétés suivantes:

(α) *elle est continue et périodique de période* 2π;

(β) $|f(x)| < 4\varepsilon$;

(γ) $|S_k^*(x, f)| < \dfrac{72\ln 2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi}(1+5\pi+\ln 2+7\ln 3)\cdot\varepsilon$ [5]

pour chaque $k \geqslant 3m_1$ *et chaque* x;

(δ) *pour chaque* $x \in (x_n - b_n, x_n + b_n)$ *on a*

$$|S_{m_n}^*(x, f)| > \frac{\ln 2}{18\pi} - \frac{4}{\pi}(4+17\pi+24\ln 7)\cdot\varepsilon$$

ou bien

$$|S_{3m_n}^*(x, f)| > \frac{\ln 2}{18\pi} - \frac{4}{\pi}(4+17\pi+24\ln 7)\cdot\varepsilon\,.$$

(α), (β). Vu (7) on a l'inégalité

$$\left|\frac{\varphi_n(x)}{a_n \log a_n m_n} + \frac{\psi_n(x)}{a_n \log 3a_n m_n}\right| \leqslant \frac{1}{\log a_n m_n} + \frac{1}{\log 3a_n m_n}\,.$$

Conformément à la définition de a_n (voir 3°, p. 273)

$$\log a_n m_n = \log(m_n b_n)^2 = 2\log m_n b_n\,,$$

et

$$\log 3a_n m_n = \log 3 + 2\log m_n b_n\,,$$

et par conséquent (vu 2°, p. 273) la suite du second membre de (8) est uniformément convergente, d'où résulte l'existence et la continuité de $f(x)$. En outre, l'inégalité

$$\sum_n \frac{1}{\log m_n b_n} < 4\varepsilon\,,$$

entraîre

$$|f(x)| < 4\varepsilon\,.$$

La périodicité de $f(x)$ résulte évidemment de celle des fonctions $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$.

(γ) Démontrons d'abord que l'on a les évaluations suivantes:

(9) *pour* $0 < \alpha < \beta$ *et pour des nombres arbitraires positifs* p, q

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin pt\cdot\frac{\sin qt}{t}\,dt\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{p+q}{p-q}\right| + \ln 3, & p \neq q;\\[2mm] \ln\dfrac{\beta}{\alpha}, & p = q;\end{cases}$$

[5] $S_k^*(x, f) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cdot\frac{\sin kt}{t}\,dt$. On sait que $S_k^*(x, f) - S_k(x, f) \to 0$ lorsque $k \to \infty$; en outre $|S_k^*(x, f) - S_k(x, f)| < M$ où M est une constante indépendante de x et de k. Les suites $\{S_k(x, f)\}$ et $\{S_k^*(x, f)\}$ sont en même temps bornées, convergentes ou divergentes.

(10) *pour chaque* α *et* β

$$\left|\int_\alpha^\beta \cos pt\cdot\frac{\sin qt}{t}\,dt\right| \leqslant 2\pi + 2\ln 2\,;$$

(9′) *en outre, si* $p/q \leqslant \frac{1}{2}$ *ou* $p/q \geqslant 2$,

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin pt\cdot\frac{\sin qt}{t}\,dt\right| \leqslant \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{3}{2}\ln 3\,.$$

Afin de démontrer (9) pour $p \neq q$ (pour $p = q$ l'inégalité (9) est évidente) considérons trois cas:

$$\alpha < \frac{\pi}{2(p+q)}, \qquad \frac{\pi}{2(p+q)} \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2|p-q|}, \qquad \alpha \geqslant \frac{\pi}{2|p-q|}\,.$$

Dans le premier on a:

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^\beta \sin pt\cdot\frac{\sin qt}{t}\,dt\right| &\leqslant \left|\int_\alpha^{\pi/2(p+q)} \sin pt\cdot\frac{\sin qt}{t}\,dt\right| + \left|\frac{1}{2}\int_{\pi/2(p+q)}^{\beta}\frac{\cos(p+q)t}{t}\,dt\right| + \\ &\quad + \left|\frac{1}{2}\int_{\pi/2(p+q)}^{\pi/2|p-q|}\frac{\cos(p-q)t}{t}\,dt\right| + \left|\frac{1}{2}\int_{\pi/2|p-q|}^{\beta}\frac{\cos(p-q)t}{t}\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{\pi}{2(p+q)}\cdot\max(p, q) + \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln\frac{p+q}{|p-q|} + \frac{1}{2}\ln 3 \\ &\leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{p+q}{p-q}\right| + \ln 3\,.\end{aligned}$$

Dans le second cas

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^\beta \sin pt\cdot\frac{\sin qt}{t}\,dt\right| &\leqslant \left|\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{\cos(p+q)t}{t}\,dt\right| + \left|\frac{1}{2}\int_\alpha^{\pi/2|p-q|}\frac{\cos(p-q)t}{t}\,dt\right| + \left|\frac{1}{2}\int_{\pi/2|p-q|}^{\beta}\frac{\cos(p-q)t}{t}\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{p+q}{p-q}\right| + \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{p+q}{p-q}\right| + \ln 3\,.\end{aligned}$$

Enfin, dans le troisième

$$\left|\int_\alpha^\beta \sin pt\cdot\frac{\sin qt}{t}\,dt\right| \leqslant \left|\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{\cos(p+q)t}{t}\,dt\right| + \left|\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{\cos(p-q)t}{t}\,dt\right| \leqslant \ln 3\,.$$

On a donc bien (9). Des considérations analogues permettent de prouver (10). Soit

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \varphi_i(x)\,, \qquad \varepsilon_i = 1/a_i \log a_i m_i\,,$$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i' \psi_i(x)\,, \qquad \varepsilon_i' = 1/a_i \log 3 a_i m_i\,;$$

alors $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ et $S_k^*(x, f) = S_k^*(x, f_1) + S_k^*(x, f_2)$.

Pour démontrer que les sommes partielles $S_k^*(x, f)$ sont uniformément bornées, il suffit de le prouver pour les sommes $S_k^*(x, f_1)$ et $S_k^*(x, f_2)$. Etant donné la définition de la fonction $f_1(x)$ et la convergence uniforme de la série $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \varphi_i(x)$, nous avons

$$\text{(11)} \qquad S_k^*(x, f_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \varphi_i(x+t) \cdot \frac{\sin kt}{t}\, dt = \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_i(x+t) \cdot \frac{\sin kt}{t}\, dt\,.$$

En admettant que $k \geqslant 3m_1$, nous définissons n de telle façon que

$$m_n \leqslant k < m_{n+1}$$

et divisons la somme du second membre de (11) en 4 termes:

$$\text{(12)} \qquad S_k^*(x, f_1) = \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i S_k^*(x, \varphi_i) + \varepsilon_n S_k^*(x, \varphi_n) + \varepsilon_{n+1} S_k^*(x, \varphi_{n+1}) + \sum_{i=n+2}^{\infty} \varepsilon_i S_k^*(x, \varphi_i)\,.$$

Désignons les successivement par S_k^1, S_k^2, S_k^3 et S_k^4. Nous avons ensuite

$$\text{(13)} \qquad S_k^*(x, \varphi_i) = \frac{1}{\pi} \int_{x_i-x-a_i}^{x_i-x+a_i} (a_i - |x+t-x_i|) \sin m_i |x+t-x_i| \cdot \frac{\sin kt}{t}\, dt\,.$$

Considérons 3 cas (6):

1° $2a_i \leqslant x_i - x < -a + x_i$,

2° $a_i \leqslant x_i - x < 2a_i$,

3° $0 \leqslant x_i - x < a_i$.

(6) L'image de la fonction φ_i étant symétrique par rapport à la droite $x = x_i$, les images de tous les $S_k^*(x, \varphi_i)$ le sont aussi; c'est pourquoi il suffit d'admettre, par exemple, que $x \leqslant x_i$.

Dans le cas 1°:

$$\text{(14)} \qquad |\varepsilon_i S_k^*(x, \varphi_i)| \leqslant \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\log a_i m_i} \int_{x_i-x-a_i}^{x_i-x+a_i} \frac{|\sin kt|}{|t|}\, dt \leqslant \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\log a_i m_i} \left| \ln \frac{x_i - x + a_i}{x_i - x - a_i} \right| < \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\log a_i m_i} \cdot \ln 3\,.$$

Dans le cas 2°:

$$|\varepsilon_i S_k^*(x, \varphi_i)| \leqslant \frac{1}{\pi} \varepsilon_i \left\{ \left| \int_{x_i-x-a_i}^{x_i-x} (a_i + x - x_i + t) \sin m_i(x+t-x_i) \cdot \frac{\sin kt}{t}\, dt \right| + \left| \int_{x_i-x}^{x_i-x+a_i} (a_i - x + x_i - t) \sin m_i(x+t-x_i) \cdot \frac{\sin kt}{t}\, dt \right| \right\},$$

mais

$$\left| \int_{x_i-x-a_i}^{x_i-x} \sin m_i(x+t-x_i) \cdot \sin kt \cdot \frac{a_i + x - x_i + t}{t}\, dt \right| \leqslant \int_{x_i-x-a_i}^{x_i-x} \frac{|a_i + x - x_i + t|}{|t|}\, dt \leqslant 2a_i$$

et de même

$$\left| \int_{x_i-x}^{x_i-x+a_i} \sin m_i(x+t-x_i) \cdot \sin kt \cdot \frac{a_i - x + x_i - t}{t}\, dt \right| \leqslant \int_{x_i-x}^{x_i-x+a_i} \frac{|a_i - x + x_i - t|}{|t|}\, dt \leqslant 4a_i\,,$$

donc

$$\text{(15)} \qquad |\varepsilon_i S_k^*(x, \varphi_i)| \leqslant \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\log a_i m_i} \cdot 6\,.$$

Dans le cas 3°:

$$\text{(16)} \qquad |\varepsilon_i S_k^*(x, \varphi_i)| \leqslant \frac{1}{\pi} \varepsilon_i \left\{ \left| \int_{x_i-x-a_i}^{x_i-x+x_i} \sin m_i(x+t-x_i) \sin kt\, dt \right| + |a_i - x_i + x| \left| \int_{x_i-x-a_i}^{x_i-x} \sin m_i(x+t-x_i) \cdot \frac{\sin kt}{t}\, dt \right| + |a_i + x_i - x| \left| \int_{x_i-x}^{x_i-x+a_i} \sin m_i(x+t-x_i) \cdot \frac{\sin kt}{t}\, dt \right|\right.\,.$$

On a les inégalités suivantes:

$$\Big|\int\limits_{x_i-x-a_i}^{x_i-x+a_i} \sin m_i(x+t-x_i)\cdot \sin kt\,dt\Big| \leqslant 2a_i\,,$$

$$\Big|\int\limits_{x_i-x-a_i}^{x_i-x} \sin m_i(x+t-x_i)\cdot \frac{\sin kt}{t}\,dt\Big|$$
$$\leqslant |\sin m_i(x-x_i)|\Big|\int\limits_{x_i-x-a_i}^{x_i-x} \cos m_i t\cdot \frac{\sin kt}{t}\,dt\Big| +$$
$$+|\cos m_i(x-x_i)|\Big|\int\limits_{x_i-x-a_i}^{x_i-x} \sin m_i t\cdot \frac{\sin kt}{t}\,dt\Big|$$

et la même inégalité pour $\int\limits_{x_i-x}^{x_i-x+a_i}$. En admettant que $i\neq n$ et $i\neq n+1$, nous avons, en vertu de la définition de la suite $\{m_n\}$,

$$m_i/k \leqslant \tfrac{1}{2} \text{ pour } i=1,\ldots,n-1 \quad \text{et} \quad m_i/k\geqslant 2 \text{ pour } i=n+2,\ldots,$$

et, en profitant des inégalités (9') et (10), nous constatons que

$$\Big|\int\limits_{x_i-x-a_i}^{x_i-x} \sin m_i(x+t-x_i)\cdot \frac{\sin kt}{t}\,dt\Big|$$
$$\leqslant 2\pi+2\ln 2+\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{3}{2}\ln 3 < \tfrac{5}{2}\pi+\tfrac{7}{2}\ln 3\,,$$

et de même pour l'intégrale $\int\limits_{x_i-x}^{x_i-x+a_i}$. En revenant à (16) nous obtenons

$$|\varepsilon_i S_k^*(x,\varphi_i)| \leqslant \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{a_i\log a_i m_i}\big(2a_i+2a_i(5\pi+7\ln 3)\big) \tag{17}$$
$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log a_i m_i}(1+5\pi+7\ln 3)\,.$$

En tenant compte de (14), (15) et (17) nous avons pour chaque $x\in(a, a+2\pi]$ l'inégalité

$$|\varepsilon_i S_k^*(x,\varphi_i)| \leqslant \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log a_i m_i}(1+5\pi+7\ln 3)\,, \tag{18}$$

pourvu que $i\neq n$ et $i\neq n+1$. L'indice „i" ne prenant pas ces valeurs dans les sommes S_k^1 et S_k^4, il est facile de voir que pour chaque $x\in(a, a+2\pi]$ on a les inégalités (voir 2° p. 273)

$$|S_k^1| \leqslant \frac{2}{\pi}(1+5\pi+7\ln 3)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{\log a_i m_i} < \frac{4}{\pi}(1+5\pi+7\ln 3)\,\varepsilon\,, \tag{19}$$

$$|S_k^4| \leqslant \frac{2}{\pi}(1+5\pi+7\ln 3)\sum_{i=n+2}^{\infty}\frac{1}{\log a_i m_i} < \frac{4}{\pi}(1+5\pi+7\ln 3)\,\varepsilon\,. \tag{19'}$$

Il reste donc à évaluer les expressions $|S_k^2|$ et $|S_k^3|$. Si $m_n/k\leqslant\frac{1}{2}$, nous ajoutons S_k^2 à la somme S_k^1, ce qui ne modifiera pas l'évaluation de $|S_k^1|$. Par contre, si $\frac{1}{2}< m_n/k\leqslant 1$, nous évaluons $|S_k^2|$ comme il suit:

$$|S_k^2| = \Big|\frac{1}{\pi}\varepsilon_n\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(x+t)\frac{\sin kt}{t}\,dt\Big| \leqslant \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log a_n m_n}\int\limits_0^{\pi}\frac{|\sin kt|}{t}\,dt$$
$$\leqslant\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log a_n m_n}(\pi+\log k\cdot\ln 2) < \frac{4}{\pi}\cdot\frac{\log k\cdot\ln 2}{\log a_n m_n} < \frac{2\ln 2}{\pi}\cdot\frac{\log 2m_n}{\log b_n m_n}$$
$$=\frac{2\ln 2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log b_n m_n}+\frac{2\ln 2}{\pi}+\frac{2\ln 2}{\pi}\cdot\frac{\log(1/b_n)}{\log b_n m_n}\,.$$

Supposons que le segment B_n appartienne à la classe $\mathfrak{B}_j^*$; alors

$$\frac{1}{b_n}\leqslant 2^{l_j+1}, \qquad b_n m_n \geqslant 2^{-(l_j+1)}\cdot 2^{p_j}\geqslant 2^{-l_j-1+[3l_j/2]}\geqslant 2^{l_j/2-2},$$

d'où

$$\frac{\log(1/b_n)}{\log b_n m_n}\leqslant\frac{l_j+1}{\frac{1}{2}l_j-2}\leqslant 8\,.$$

En définitive on a donc

$$|S_k^2| < \frac{8\ln 2}{\pi}\varepsilon+\frac{2\ln 2}{\pi}+\frac{16\ln 2}{\pi}=\frac{8\ln 2}{\pi}\varepsilon+\frac{18\ln 2}{\pi}\,. \tag{20}$$

Si $m_{n+1}/k\geqslant 2$, nous ajoutons S_k^3 à la somme S_k^4, ce qui ne modifiera pas l'évaluation de $|S_k^4|$. Par contre, si $1\leqslant m_{n+1}/k<2$, nous évaluons $|S_k^3|$ comme il suit:

$$|S_k^3| = \Big|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varepsilon_{n+1}\varphi_{n+1}(x+t)\cdot\frac{\sin kt}{t}\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{\log a_{n+1}m_{n+1}}\int\limits_0^{\pi}\frac{|\sin kt|}{t}\,dt \tag{21}$$
$$<\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log a_{n+1}m_{n+1}}(\pi+\ln k) < \frac{4\ln 2}{\pi}\cdot\frac{\log m_{n+1}}{\log a_{n+1}m_{n+1}}$$
$$=\frac{2\ln 2}{\pi}\cdot\frac{\log m_{n+1}}{\log b_{n+1}m_{n+1}}$$
$$=\frac{2\ln 2}{\pi}\Big(1+\frac{\log(1/b_{n+1})}{\log b_{n+1}m_{n+1}}\Big) < \frac{18\ln 2}{\pi}\,.$$

En profitant des inégalités (19), (19'), (20) et (21), nous obtenons enfin l'évaluation

$$|S_k^*(x,f_1)| \leqslant \frac{8}{\pi}(1+5\pi+7\ln 3)\varepsilon+\frac{8\ln 2}{\pi}\cdot\varepsilon+\frac{36\ln 2}{\pi} \tag{22}$$
$$=\frac{36\ln 2}{\pi}+\frac{8}{\pi}(1+5\pi+\ln 2+7\ln 3)\,\varepsilon\,.$$

Pour évaluer la seconde somme $|S_k^*(x, f_2)|$ nous procédons de même, avec la seule différence qu'en la partageant en 4 termes il faudra prendre n tel que l'on ait

$$3m_n \leqslant k < 3m_{n+1};$$

on vérifie facilement que l'on arrive ainsi à l'inégalité

$$(22') \qquad |S_k^*(x, f_2)| \leqslant \frac{36 \ln 2}{\pi} + \frac{2}{\pi}(1+5\pi+\ln 2+7\ln 3)\varepsilon .$$

Par conséquent

$$|S_k^*(x, f)| \leqslant \frac{72 \ln 2}{\pi} + \frac{4}{\pi}(1+5\pi+\ln 2+7\ln 3)\varepsilon$$

pour chaque $k \geqslant 3m_1$ et chaque $x \in (a, a+2\pi]$.

Remarque. Etant donné que les $S_k^*(x, f)$ sont continues et bornées, leur quantité finie (pour $k < 3m_1$) est uniformément bornée, par conséquent toutes les sommes $S_k^*(x, f)$ sont uniformément bornées par le nombre

$$\max\Big(\max_{\substack{0 \leqslant k < 3m_1 \\ x \in (a, a+2\pi]}} |S_k^*(x, f)|,\ \frac{72\ln 2}{\pi} + \frac{4}{\pi}(1+5\pi+\ln 2+7\ln 3)\Big).$$

(δ) Soit $|x-x_n| \leqslant b_n$. L'une au moins des deux inégalités suivantes a lieu:

$$(23) \qquad |\cos m_n(x-x_n)| \geqslant \tfrac{1}{3}$$

ou bien

$$(23') \qquad |\cos 3m_n(x-x_n-\pi/6m_n)| \geqslant \tfrac{1}{3}.$$

Si c'est l'inégalité (23), on a

$$(24) \quad |S_{m_n}^*(x, f)| = |S_{m_n}^*(x, f_1) + S_{m_n}^*(x, f_2)| = \Big|\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i S_{m_n}^*(x, \varphi_i) + \varepsilon_n S_{m_n}^*(x, \varphi_n) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \varepsilon_i S_{m_n}^*(x, \varphi_i) + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i' S_{m_n}^*(x, \psi_i)\Big|$$
$$\geqslant |\varepsilon_n S_{m_n}^*(x, \varphi_n)| - \Big|\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i S_{m_n}^*(x, \varphi_i)\Big| - \Big|\sum_{i=n+1}^{\infty} \varepsilon_i S_{m_n}^*(x, \varphi_i)\Big| - \Big|\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i' S_{m_n}^*(x, \psi_i)\Big|.$$

En mettant dans les inégalités (19) et (19') $k = m_n$, nous obtenons les évaluations supérieures pour les deux premiers termes soustraits:

$$(25) \qquad \Big|\sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i S_{m_n}^*(x, \varphi_i)\Big| < \frac{4}{\pi}(1+5\pi+7\ln 3)\varepsilon,$$

$$(26) \qquad \Big|\sum_{i=n+1}^{\infty} \varepsilon_i S_{m_n}^*(x, \varphi_i)\Big| < \frac{4}{\pi}(1+5\pi+7\ln 3)\varepsilon \ (^7).$$

Pour obtenir une évaluation supérieure de $\big|\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i' S_{m_n}^*(x, \psi_i)\big|$, considérons $|S_{m_n}^*(x, \psi_i)|$, $i = 1, 2, \ldots$ Examinons 3 cas

1° $2a_i \leqslant x_i + \dfrac{\pi}{6m_i} - x < x_i + \dfrac{\pi}{6m_i} - a$,

2° $a_i \leqslant x_i + \dfrac{\pi}{6m_i} - x < 2a_i$,

3° $0 \leqslant x_i + \dfrac{\pi}{6m_i} - x < a_i$.

Dans les cas 1° et 2° nous procéderons de même que pour les inégalités (14) et (15) et nous obtiendrons

$$|\varepsilon_i' S_{m_n}^*(x, \psi_i)| < \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\log 3a_i m_i} \cdot \ln 3$$

et

$$|\varepsilon_i' S_{m_n}^*(x, \psi_i)| < \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\log 3a_i m_i} \cdot 6 .$$

Dans le cas 3°:

$$(27) \quad |\varepsilon_i' S_{m_n}^*(x, \psi_i)| \leqslant \frac{1}{\pi}\varepsilon_i' \Big\{ \Big| \int_{x_i-\pi/6m_i-x-a_i}^{x_i-\pi/6m_i-x+a_i} \sin 3m_i\Big(x+t-x_i-\frac{\pi}{6m_i}\Big) \sin m_n t\, dt \Big| +$$
$$+ \Big|a_i - x_i - \frac{\pi}{6m_i} + x\Big| \Big| \int_{x_i-\pi/6m_i-x-a_i}^{x_i+\pi/6m_i-x} \sin 3m_i\Big(x+t-x_i-\frac{\pi}{6m_i}\Big) \frac{\sin m_n t}{t}\, dt \Big| +$$
$$+ \Big|a_i + x_i + \frac{\pi}{6m_i} - x\Big| \Big| \int_{x_i+\pi/6m_i-x}^{x_i-\pi/6m_i-x+a_i} \sin 3m_i\Big(x+t-x_i-\frac{\pi}{6m_i}\Big) \cdot \frac{\sin m_n t}{t}\, dt \Big| .$$

On a les inégalités suivantes

$$\Big| \int_{x_i-\pi/6m_i-x-a_i}^{x_i-\pi/6m_i-x+a_i} \sin 3m_i\Big(x+t-x_i-\frac{\pi}{6m_i}\Big) \sin m_n t\, dt \Big| \leqslant 2a_i ,$$

(7) La somme évaluée dans (19') commence, il est vrai, par un terme dont l'indice est $n+2$ et non pas $n+1$, mais dans le cas où $k = m_n$, $m_{n+1}/k \geqslant 2$ et le terme d'indice $n+1$ peut être ajouté sans modifier l'évaluation.

$$\left|\int\limits_{x_i-\pi/6m_i-x-a_i}^{x_i+\pi/6m_i-x} \sin 3m_i\left(x+t-x_i-\frac{\pi}{6m_i}\right)\cdot\frac{\sin m_n t}{t}\,dt\right|$$

$$\leqslant \left|\sin 3m_i\left(x-x_i-\frac{\pi}{6m_i}\right)\right|\left|\int\limits_{x_i-\pi/6m_i-x-a_i}^{x_i+\pi/6m_i-x}\cos 3m_i t\cdot\frac{\sin m_n t}{t}\,dt\right|+$$

$$+\left|\cos 3m_i\left(x-x_i-\frac{\pi}{6m_i}\right)\right|\left|\int\limits_{x_i-\pi/6m_i-x-a_i}^{x_i+\pi/6m_i-x}\sin 3m_i t\cdot\frac{\sin m_n t}{t}\,dt\right|,$$

et la même inégalité pour $\int\limits_{x_i+\pi/6m_i-x}^{x_i-\pi/6m_i-x+a_i}$. En vertu de l'inégalité (10) nous avons

$$\left|\int\limits_{x_i-\pi/6m_i-x-a_i}^{x_i+\pi/6m_i-x}\cos 3m_i t\cdot\frac{\sin m_n t}{t}\,dt\right|\leqslant 2\pi+2\log 2\,,$$

et, en vertu de (9),

$$\left|\int\limits_{x_i-\pi/6m_i-x-a_i}^{x_i+\pi/6m_i-x}\sin 3m_i t\cdot\frac{\sin m_n t}{t}\,dt\right|\leqslant \tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{3m_i+m_n}{3m_i-m_n}\right|+\ln 3\,.$$

Remarquons que $m_n/m_i=2^{q_i}$, où q_i est un nombre entier dépendant de i. En étudiant la fonction $\ln|(x+3)/(x-3)|$ pour $x>0$, nous constatons que, pour les x qui sont des puissances entières de 2, elle admet sa valeur maximale $\ln 7$ pour $x=4$, par conséquent

$$\ln\left|\frac{3m_i+m_n}{3m_i-m_n}\right|\leqslant\ln 7\qquad\text{pour chaque}\qquad i=1,2,\ldots,$$

d'où

$$\left|\int\limits_{x_i-\pi/6m_i-x-a_i}^{x_i+\pi/6m_i-x}\sin 3m_i t\cdot\frac{\sin m_n t}{t}\,dt\right|\leqslant\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{1}{2}\ln 7+\ln 3<\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{3}{2}\ln 7\,,$$

et on a les même inégalités pour $\int\limits_{x_i+\pi/6m_i-x}^{x_i-\pi/6m_i-x+a_i}$. En revenant à (27) nous avons

$$|\varepsilon_i' S^*_{m_n}(x,\psi_i)|\leqslant\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{a_i\log 3a_i m_i}\{2a_i+4a_i(\pi+2\log 2)+4a_i(\tfrac{1}{2}\pi+\tfrac{3}{2}\ln 7)\}$$

$$<\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log 3a_i m_i}(1+5\pi+7\ln 7)\,;$$

cette inégalité a lieu pour chaque i et chaque $x\in(a,a+2\pi]$, donc

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i' S^*_{m_n}(x,\psi_i)\right|<\frac{4}{\pi}(1+5\pi+7\ln 7)\,\varepsilon\,. \tag{28}$$

Il nous reste donc à trouver une évaluation inférieure de $|\varepsilon_n S^*_{m_n}(x,\varphi_n)|$; on a

$$|\varepsilon_n S^*_{m_n}(x,\varphi_n)|=\frac{1}{\pi}\varepsilon_n\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi_n(x+t)\cdot\frac{\sin m_n t}{t}\,dt\right| \tag{29}$$

$$=\frac{1}{\pi}\varepsilon_n\left|\int\limits_{x_n-x-a_n}^{x_n-x+a_n}(a_n-|x+t-x_n|)\sin m_n|x+t-x_n|\cdot\frac{\sin m_n t}{t}\,dt\right|$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi}\varepsilon_n\Bigg\{|\cos m_n(x-x_n)|\cdot\Bigg|-(a_n-x_n+x)\int\limits_{x_n-x-a_n}^{x_n-x}\frac{\sin^2 m_n t}{t}\,dt+$$

$$+(a_n+x_n-x)\cdot\int\limits_{x_n-x}^{x_n-x+a_n}\frac{\sin^2 m_n t}{t}\,dt\Bigg|-$$

$$-|\sin m_n(x_n-x)|\Bigg(|a_n-x_n+x|\left|\int\limits_{x_n-x-a_n}^{x_n-x}\cos m_n t\cdot\frac{\sin m_n t}{t}\,dt\right|+$$

$$+|a_n+x_n-x|\cdot\left|\int\limits_{x_n-x}^{x_n-x+a_n}\cos m_n t\cdot\frac{\sin m_n t}{t}\,dt\right|\Bigg)-$$

$$-\left|\int\limits_{x_n-x-a_n}^{x_n-x+a_n}\sin m_n(x+t-x_n)\sin m_n t\,dt\right|\Bigg\}$$

$$\geqslant\frac{1}{3\pi}\varepsilon_n\left|-(a_n-x_n+x)\int\limits_{x_n-x-a_n}^{x_n-x}\frac{\sin^2 m_n t}{t}\,dt+(a_n+x_n-x)\int\limits_{x_n-x}^{x_n-x+a_n}\frac{\sin^2 m_n t}{t}\,dt\right|-$$

$$-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log a_n m_n}(1+2\pi+2\ln 2)\,.$$

En admettant que

$$|x_n-x|<|x_n-x-a_n|\qquad\text{et}\qquad|x_n-x|<|x_n-x+a_n|\,,$$

ce qui a lieu pour n suffisamment grands, car on a alors $a_n-b_n>b_n$, nous voyons que l'expression dont le module figure dans (29) est positive et égale à

$$(a_n-x_n+x)\int\limits_{|x_n-x|}^{|x_n-x-a_n|}\frac{\sin^2 m_n t}{t}\,dt+(a_n+x_n-x)\int\limits_{|x_n-x|}^{|x_n-x+a_n|}\frac{\sin^2 m_n t}{t}\,dt\,. \tag{30}$$

Posons

$$a=|x_n-x|\,,\qquad b=|x_n-x-a_n|\qquad\text{ou}\qquad b=|x_n-x+a_n|\,.$$

Nous allons évaluer les deux intégrales intervenant dans (30). Soit I_1 est le plus petit nombre entier tel que

$$a\leqslant\frac{\pi}{6m_n}+6I_1\frac{\pi}{6m_n}\,,$$

et I_2 le plus grand nombre entier tel que

$$\frac{\pi}{6m_n}+(6I_2+4)\frac{\pi}{6m_n}\leqslant b\,;$$

alors

$$I_1=\left[\frac{m_n}{\pi}a-\frac{1}{6}\right]+1\,,\qquad I_2=\left[\frac{m_n}{\pi}b-\frac{5}{6}\right].$$

En supposant de plus que n est assez grand pour que $b-a>3\pi/m_n$, nous avons

$$I_1<I_2\,,$$

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b\frac{\sin^2 m_n t}{t}\,dt &\geqslant\sum_{i=I_1}^{I_2}\frac{\frac{1}{4}}{\pi/6m_n+(6i+4)\pi/6m_n}\cdot 4\,\frac{\pi}{6m_n}=\sum_{i=I_1}^{I_2}\frac{1}{6i+5}\\ &\geqslant\frac{1}{6}\ln\frac{bm_n/\pi}{am_n/\pi+\frac{10}{6}}\geqslant\frac{1}{6}\ln\frac{(a_n-b_n)\,m_n/\pi}{2b_n m_n/\pi}\\ &=-\frac{1}{6}\ln 2+\frac{1}{6}\ln\frac{a_n-b_n}{b_n}\geqslant-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{6}\ln\frac{a_n}{b_n}\\ &=-\frac{1}{3}\ln 2+\frac{1}{6}\ln 2\cdot\log b_n m_n\,.\end{aligned}$$

En revenant à (29) nous avons

$$\begin{aligned}(31)\quad |\varepsilon_n S^*_{m_n}(x,\varphi_n)| &\geqslant\frac{1}{6\pi}\cdot\frac{1}{a_n\log b_n m_n}(a_n-b_n)\left(-\frac{2}{3}\ln 2+\frac{1}{3}\ln 2\cdot\log b_n m_n\right)-\\ &\qquad-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\log b_n m_n}(1+2\pi+2\ln 2)\\ &=\frac{1}{18\pi}\ln 2-\frac{1}{9\pi}\ln 2\cdot\frac{1}{\log b_n m_n}-\frac{\ln 2}{18\pi}\cdot\frac{b_n}{a_n}+\\ &\qquad+\frac{\ln 2}{9\pi}\cdot\frac{b_n}{a_n\log b_n m_n}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\log b_n m_n}(1+2\pi+2\ln 2)\\ &>\frac{\ln 2}{18\pi}-\frac{4}{9\pi}(9+18\pi+20\ln 2)\cdot\varepsilon\,.\end{aligned}$$

Enfin, en profitant des inégalités (25), (26), (28) et (29), nous obtenons, en vertu de (24)

$$\begin{aligned}(32)\quad |S^*_{m_n}(x,f)| &\geqslant\frac{\ln 2}{18\pi}-\frac{4}{9\pi}(9+18\pi+20\ln 2)\varepsilon-\\ &\qquad-\frac{8}{\pi}(1+5\pi+7\ln 3)\varepsilon-\frac{4}{\pi}(1+5\pi+7\ln 7)\varepsilon\\ &>\frac{\ln 2}{18\pi}-\frac{4}{\pi}(4+17\pi+24\ln 7)\varepsilon\,.\end{aligned}$$

pour des x tels que $|\cos m_n(x-x_n)|\geqslant\frac{1}{3}$ et $|x-x_n|\leqslant b_n$. Dans le cas de l'inégalité (23'), nous avons

$$\begin{aligned}(33)\quad |S^*_{3m_n}(x,f)| &=|S^*_{3m_n}(x,f_1)+S^*_{3m_n}(x,f_2)|\\ &=\Big|\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon'_i S^*_{3m_n}(x,\psi_i)+\varepsilon'_n S^*_{3m_n}(x,\psi_n)+\\ &\qquad+\sum_{i=n+1}^{\infty}\varepsilon'_i S^*_{3m_n}(x,\psi_i)+\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i S^*_{3m_n}(x,\varphi_i)\Big|\\ &\geqslant|\varepsilon'_n S^*_{3m_n}(x,\psi_n)|-\Big|\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon'_i S^*_{3m_n}(x,\psi_i)\Big|-\\ &\qquad-\Big|\sum_{i=n+1}^{\infty}\varepsilon'_i S^*_{3m_n}(x,\psi_i)\Big|-\Big|\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i S^*_{3m_n}(x,\varphi_i)\Big|\,.\end{aligned}$$

Les deux premiers modules soustraits vérifient évidemment les inégalités

$$\Big|\sum_{i=1}^{n-1}\varepsilon'_i S^*_{3m_n}(x,\psi_i)\Big|<\frac{4}{\pi}(1+5\pi+7\ln 3)\varepsilon\,,$$

$$\Big|\sum_{i=n+1}^{\infty}\varepsilon'_i S^*_{3m_n}(x,\psi_i)\Big|<\frac{4}{\pi}(1+5\pi+7\ln 3)\varepsilon\,,$$

le dernier satisfait à l'inégalité

$$\Big|\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i S^*_{3m_n}(x,\varphi_i)\Big|<\frac{4}{\pi}(1+5\pi+7\ln 7)\varepsilon\,.$$

Enfin, par analogie avec la formule (31), on peut prouver que l'on a

$$|\varepsilon'_n\cdot S^*_{3m_n}(x,\psi_n)|>\frac{\ln 2}{18\pi}-\frac{4}{9\pi}(9+18\pi+20\ln 2)\varepsilon\,,$$

$$|x-x_n|\leqslant b_n\,,\qquad |\cos 3m_n(x-x_n-\pi/6m_n)|\geqslant\tfrac{1}{3}\,.$$

En définitive, en revenant à (33), nous avons donc dans ce cas

$$(34)\qquad |S^*_{3m_n}(x,f)|>\frac{\ln 2}{18\pi}-\frac{4}{\pi}(4+17\pi+24\ln 7)\varepsilon\,,$$

et ainsi la propriété (δ) se trouve également démontrée.

Prenons maintenant ε assez petit pour que

$$\frac{\ln 2}{18\pi}-\frac{4}{\pi}(4+17\pi+24\ln 7)\varepsilon>100\cdot 4\varepsilon\,.$$

Si ε est ainsi choisi la série de Fourier de la fonction $f(x)$ est divergente dans l'ensemble E_a. En effet, soit $x \in E_a$. Du mode de recouvrement de l'ensemble E_a par la famille des segments B_n il résulte que x appartient à un nombre infini de ces segments; supposons que

$$x \in B_{n_j}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Conformément à la propriété (δ), il existe pour chaque j un $d_j = 1$ ou 3 tel que

$$|S^*_{d_j m_{n_j}}(x, f)| > 100 \cdot 4\varepsilon,$$

et, à cause de (β), on a

$$(35) \qquad |S^*_{d_j m_{n_j}}(x, f)| > 100 \max|f(x)| \qquad (\max|f(x)| > 0).$$

La suite $\{d_j m_{n_j}\}$ peut ne pas être une suite croissante de nombres naturels, mais on peut en extraire une suite partielle $\{d'_j m'_{n_j}\}$ qui aura déjà cette propriété et pour laquelle l'inégalité (35) sera vérifiée. Donc, si $\{S^*_k(x, f)\}$ était convergente, alors $\{S^*_{d'_j m'_{n_j}}(x, f)\}$, comme suite des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction continue, devrait être convergente vers $f(x)$, ce qui est évidemment contraire à l'inégalité (35).

Supposons maintenant que $x \in (a, a+2\pi]-E_a$. En vertu du mode de recouvrement adopté, x appartient alors à un nombre tout au plus fini de segments A_n et $\widetilde{A}_n$, soit

$$(36) \qquad x \notin A_n \quad \text{et} \quad x \notin \widetilde{A}_n \quad \text{pour} \quad n > n_0;$$

par conséquent $\varphi_n(x) = 0$ et $\psi_n(x) = 0$ pour $n > n_0$ et

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n_0} \left(\varepsilon_n \varphi_n(x) + \varepsilon'_n \psi_n(x)\right).$$

Pour chaque $n' \geqslant n_0$

$$(37) \quad |S^*_k(x, f) - f(x)| \leqslant \Big|\sum_{n=1}^{n'} \varepsilon_n\big(S^*_k(x, \varphi_n) - \varphi_n(x)\big)\Big| + \\ + \Big|\sum_{n=1}^{n'} \varepsilon'_n\big(S^*_k(x, \psi_n) - \psi_n(x)\big)\Big| + \Big|\sum_{n=n'+1}^{\infty} \big(\varepsilon_n S^*_k(x, \varphi_n) + \varepsilon'_n S^*_k(x, \psi_n)\big)\Big|.$$

Soit μ un nombre arbitraire positif. D'après (36) $|x-x_n| \geqslant 2a_n$ ou bien $a_n \leqslant |x-x_n| < 2a_n$ et $|x-x_n-\pi/6m_n| \geqslant 2a_n$ ou bien $a_n \leqslant |x-x_n-\pi/6m_n| < 2a_n$ pour $n = n_0+1, \ldots$; par conséquent, en vertu des inégalités (14) et (15), nous avons

$$|\varepsilon_n S^*_k(x, \varphi_n) + \varepsilon'_n S^*_k(x, \psi_n)| < \frac{6}{\pi}\left(\frac{1}{\log a_n m_n} + \frac{1}{\log 3a_n m_n}\right) \\ < \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{\log b_n m_n}.$$

La convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log b_n m_n}$ entraîne, pour $n > n_1 > n_0$,

$$\frac{6}{\pi} \sum_{n=n_1+1}^{\infty} \frac{1}{\log b_n m_n} < \tfrac{1}{3}\mu.$$

En revenant à (37) nous obtenons

$$|S^*_k(x, f) - f(x)| \leqslant \Big|\sum_{n=1}^{n_1} \varepsilon_n\big(S^*_k(x, \varphi_n) - \varphi_n(x)\big)\Big| + \\ + \Big|\sum_{n=1}^{n_1} \varepsilon'_n\big(S^*_k(x, \psi_n) - \psi_n(x)\big)\Big| + \tfrac{1}{3}\mu,$$

et, comme

$$S^*_k(x, \varphi_n) \to \varphi_n(x) \quad \text{et} \quad S^*_k(x, \psi_n) \to \psi_n(x),$$

pour $k \geqslant k_0$, il s'ensuit que

$$\Big|\sum_{n=1}^{n_1} \varepsilon_n\big(S^*_k(x, \varphi_n) - \varphi_n(x)\big)\Big| < \tfrac{1}{3}\mu \quad \text{et} \quad \Big|\sum_{n=1}^{n_1} \varepsilon'_n\big(S^*_k(x, \psi_n) - \psi_n(x)\big)\Big| < \tfrac{1}{3}\mu,$$

ou

$$|S^*_k(x, f) - f(x)| < \mu \quad \text{pour} \quad k \geqslant k_0,$$

ce qui établit la convergence de la série de Fourier au point x. Le lemme est ainsi entièrement démontré.

THÉORÈME 1. *Si l'ensemble E périodique de période 2π est de classe $G_{\delta\sigma}$ et si $E \subset \Phi$, où Φ est un ensemble de classe F_σ, de mesure logarithmique zéro, il existe une fonction continue et périodique $f(x)$, dont la série de Fourier a les propriétés suivantes:*

1° *la suite $\{S_k(x, f)\}$ est bornée, $|S_k(x, f)| \leqslant A$ pour chaque x et $k = 0, 1, \ldots$;*

2° *la suite $\{S_k(x, f)\}$ est divergente pour chaque $x \in E$;*

3° *la suite $\{S_k(x, f)\}$ est convergente pour chaque $x \in CE$.*

Démonstration. On a $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, où $E_n \in G_\delta$, $E_p E_q = 0$ pour $p \neq q$ et la mesure logarithmique de $\bar{E}_n$ est zéro. En effet, soit $\Phi = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, où F_i sont des ensembles fermés et de mesure logarithmique zéro. Soit ensuite $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E^*_j$, où $E^*_j \in G_\delta$; alors

$$E = E\Phi = \bigcup_{i=1}^{\infty} EF_i = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} E^*_j F_i,$$

et $E_j^* F_i \in G_\delta$, $\overline{E_j^* F_i} \subset F_i$, d'où il résulte que la mesure logarithmique de $\overline{E_j^* F_i}$ est zéro. En posant $E_m^{**} = E_j^* F_i$, nous avons

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m^{**}$$

où $E_m^{**} \in G_\delta$ et la mesure logarithmique de $\overline{E_m^{**}}$ est zéro. Remarquons ensuite que

$$E = E_1^{**} + (E_1^{**} + E_2^{**}) + \ldots = E_1^{***} + E_2^{***} + \ldots$$

où $E_j^{***} = E_1^{**} + \ldots + E_j^{**}$; il est évident que $E_j^{***} \in G_\delta$ et la mesure logarithmique de $\overline{E_j^{***}}$ est zéro. D'autre-part

$$E = E_1^{***} + (E_2^{***} - E_1^{***}) + \ldots = E_1^{***} + E_2^{***} \cdot \mathrm{C}E_1^{***} + \ldots$$

Etant donné que $\mathrm{C}E_j^{***} \in F_\sigma$, on a $\mathrm{C}E_j^{***} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{ji}$, où F_{ji} sont des ensembles fermés et $F_{ji} \subset F_{j,i+1}$; nous avons donc

$$E = E_1^{***} + \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_{j+1}^{***} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_{ji}) = E_1^{***} + \bigcup_{j=1}^{\infty} \big[E_{j+1}^{***}(F_{j1} + \bigcup_{i=1}^{\infty} (F_{j,i+1} - F_{ji}))\big]$$
$$= E_1^{***} + \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{j+1}^{***} F_{j1} + \bigcup_{j,i=1}^{\infty} E_{j+1}^{***}(F_{j,i+1} - F_{ji}),$$

mais $F_{j,i+1} - F_{ji} \in G_\delta$, donc également $E_{j+1}^{***}(F_{j,i+1} - F_{ji}) \in G_\delta$. L'ensemble E a donc été mis sous forme d'une somme dénombrable de sommes dénombrables d'ensembles de classe G_δ, et $E_{j+1}^{***}(F_{j,i+1} - F_{ji}) \subset E_{j+1}^{***}$, donc la mesure logarithmique de $\overline{E_{j+1}^{***}(F_{j,i+1} - F_{ji})}$ est zéro. En outre les ensembles $E_{j+1}^{***}(F_{j,i+1} - F_{ji})$ sont disjoints. Il suffit donc de ranger les éléments de la suite double en suite simple et de prendre $E_n = E_{j+1}^{***}(F_{j,i+1} - F_{ji})$.

Soit ensuite $f_n(x)$ une fonction périodique continue et telle que sa série de Fourier soit divergente sur l'ensemble E_n, convergente sur l'ensemble $\mathrm{C}E_n$ et que

$$|S_k(x, f_n)| \leqslant A < +\infty$$

pour chaque x et $k = 0, 1, \ldots$ L'existence de la fonction $f_n(x)$ résulte du lemme. Il est évident que les fonctions $f_n(x)$ sont bornées; on peut admettre que

$$|f_n(x)| \leqslant 1 \tag{38}$$

pour chaque x et $n = 1, 2, \ldots$; de même

$$|S_k(x, f_n)| \leqslant 1 \tag{39}$$

pour chaque x, $n = 1, 2, \ldots$ et $k = 0, 1, \ldots$ Posons

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x). \tag{40}$$

A cause de (38) $f(x)$ est continue (et périodique). En outre

$$S_k(x, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} S_k(x, f_n), \tag{41}$$

car

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x+t) \cdot \frac{\sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t},$$

étant uniformément convergente par rapport à t, peut être intégrée terme à terme. La série du second membre de la relation (41) est, vu (39), uniformément convergente par rapport à x et à k.

Démontrons maintenant que la suite $\{S_k(x, f)\}$ est divergente pour chaque $x \in E$ et convergente pour chaque $x \notin E$. En effet, si $x \in E$, on a $x \in E_{n_0}$ et $x \notin E_n$ pour $n \neq n_0$, donc la suite $\{S_k(x, f_{n_0})\}$ est divergente, et toutes les suites $\{S_k(x, f_n)\}$ sont convergentes pour $n \neq n_0$. De la relation (41) et de la convergence uniforme par rapport à k de la série qui y figure il résulte que la suite $\{S_k(x, f)\}$ est divergente. Si, au contraire, $x \notin E$, alors $x \notin E_n$ pour chaque n, les suites $\{S_k(x, f_n)\}$ sont convergentes pour chaque n, et

$$\lim_{k\to+\infty} S_k(x, f_n) = f_n(x).$$

En passant à la limite avec k dans (41) — ce qui est permis, vu la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} S_k(x, f_n)$ — nous obtenons

$$\lim_{k\to+\infty} S_k(x, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n(x) = f(x),$$

et la démonstration est achevée.

THÉORÈME 2. *Si l'ensemble E périodique de période 2π est de classe G_δ et $E \subset G$, où G est un ensemble ouvert et tel que la mesure logarithmique de l'ensemble $\bar{E}G$ est zéro, il existe une fonction $f(x)$ périodique et continue, dont la série de Fourier possède les propriétés suivantes:*

1° $\overline{\lim_{k\to+\infty}} |S_k(x, f)| = +\infty$ *pour chaque* $x \in E$,

2° $\{S_k(x, f)\}$ *est convergente pour chaque* $x \notin E$.

Démonstration. Nous représentons E sous forme du produit d'une suite descendante d'ensembles ouverts G_n

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

tels que $G_n \subset G$ pour chaque n et, de même que dans la démonstration du lemme, nous recouvrons l'ensemble E par les segments B_n. La fonction cherchée $f(x)$ est de la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\frac{\varphi_n(x)}{a_n \log a_n m_n} + \frac{\psi_n(x)}{a_n \log 3 a_n m_n}\right),$$

où $c_n \to +\infty$, toutefois de telle façon que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\log b_n m_n} < +\infty .$$

On peut prouver comme dans la démonstration du lemme que, pour tout $x \in E$, il existe une suite partielle $\{k_n\}$ telle que

$$|S_{k_n}^*(x, f)| > c_{k_n}\left[\frac{\ln 2}{18\pi} - \frac{4}{\pi}(4 + 17\pi + 24 \ln 7)\,\varepsilon\right];$$

si ε est assez petit pour que l'expression entre crochets soit positive; cela signifie que l'on a 1°. La convergence de la suite $\{S_k^*(x, f)\}$ aux points de l'ensemble CE se démontre de même que dans le lemme 1.

Remarque. Si, au lieu des fonctions $(a_n - |x - x_n|) \sin m_n |x - x_n|$, on prenait les fonctions $(a_n - |x - x_n|) \sin m_n |x - x_n|$ pour $b_n \leqslant |x - x_n| \leqslant a_n$, $\frac{a_n - b_n}{b_n}|x - x_n| \sin m_n |x - x_n|$ pour $|x - x_n| < b_n$ (et des fonctions analogues aux images déplacées de $\pi/6m_n$), alors la suite $\{m_n\}$ ne devrait pas être déterminée comme à la page 273, mais elle pourrait être une suite croissante d'une façon arbitrairement rapide et extraite d'une suite quelconque non bornée de nombres naturels.

Dans le cas particulier, lorsque l'ensemble E es dénombrable, la construction de la fonction $f(x)$ a été donnée par H. Steinhaus [3]. P. Ulianow [4] a indiqué plusieurs exemples de séries trigonometriques divergeantes (en général dans les ensembles qui ne sont pas donnés à priori).

Travaux cités

[1] P. Erdös, F. Herzog, G. Piranian, *Sets of divergence of Taylor series and of trigonometric series*, Mathematica Scandinavica 2 (1954), p. 262-266.

[2] K. Zeller, *Über Konvergenzmengen von Fourierreihen*, Archiv der Math. 6, N 4 (1955), p. 335-340.

[3] H. Steinhaus, *Sur les défauts de convergence des séries trigonometriques et potentielles*, Bull. International de l'Acad. Pol. des Sc. et des Lettres, Série A: Sc. Math., (1919), p. 123-141.

[4] П. Л. Ульянов, *О расходимости рядов Фурье*, Успехи мат. наук XII. 3 (75) (1957), p. 75-132.

Reçu par la Rédaction le 20. 4. 1960

Some conditions for a mapping to be a covering

by

A. Lelek and Jan Mycielski (Wrocław)

Introduction. The following problem was the origin of this paper:

(P) *Let $p \in S^n$ (= the n-dimensional sphere) and let $f\colon S^n \to S^n$ be a continuous mapping such that $f(S^n - \{p\}) \subset S^n - \{p\}$, $f(p) = p$ and $f|S^n - \{p\}$ is a local homeomorphism. Must f be a homeomorphism?*

The answer is affirmative (Corollary 2 of this paper) and the proof is not difficult. Nevertheless, we did not find in literature any theorem or lemma adequate for reference when the statement was needed in the approximation theory (1). Then we found some conditions for a mapping which imply that this mapping is a covering (in the sense of Chevalley [4], p. 40). This can be used for solving the above question and presents some analogy to the results of Eilenberg [5]. All this is given in the present paper.

Main definitions. All topological spaces are supposed to be Hausdorff spaces. A mapping is called *open* if the images of the open sets are open sets. A mapping $f\colon X \to Y$ is called a *local homeomorphism* if every point $p \in X$ has a neighbourhood V such that the partial mapping $f|V$ is a homeomorphism.

The theory of covering mappings is given in [4], p. 40-60 (see also [6]). The main definitions used in this paper are the following:

A pair (X, f) is called a *covering* of Y if X is a connected and locally connected space, f is a mapping of X onto Y and every point $y \in Y$ has a neighbourhood U such that for every connected component C of $f^{-1}(U)$ the partial mapping $f|C$ is a homeomorphism of C onto U (2).

Two coverings (X_1, f_1), (X_2, f_2) of Y are called *equivalent* if there exists a homeomorphism h of X_1 onto X_2 such that $f_1 = f_2 h$.

---

(1) In a problem of existence and uniqueness of some polynomials (see [8]).

Added in proof: We have found now a paper of Browder [3] which contains results near to ours. In particular his Theorems 5 and 6 are similar to our Theorems 2 and 1 respectively. However our theorems are concerning different class of topological spaces. Corollaries 1 and 2 can also be derived from Browder's results.

(2) A less restrictive definition, which does not require the local connectedness of the spaces X and Y, is sometimes used (for instance see [7]).