Sur les familles d'ensembles infinis de nombres naturels

par

W. Sierpiński (Warszawa)

F étant une famille donnée d'ensembles, le problème se pose de trouver les conditions pour qu'il existe au moins un ensemble ayant avec tout ensemble de la famille F un et un seul élément commun, respectivement un nombre fini non nul d'éléments communs.

Dans le cas où la famille F est formée d'ensembles non vides disjoints, l'existence d'un ensemble ayant un et un seul élément commun avec tout ensemble de cette famille résulte de l'axiome du choix. Or, la question se pose d'étudier le cas où les ensembles de la famille F ont deux à deux au plus un élément commun, respectivement un nombre fini d'éléments communs.

Nous nous occuperons ici seulement des familles F d'ensembles infinis de nombres naturels.

THÉORÈME 1. *Il existe une famille dénombrable F d'ensembles infinis de nombres naturels ayant deux à deux au plus un élément commun et telle qu'il n'existe aucun ensemble qui ait avec tout ensemble de la famille F un et un seul élément commun.*

Démonstration. Soit p_n le n-ième nombre premier. Soit

$$E_1 = \{2, 2^2, 2^3, \ldots\}, \qquad E_2 = \{3, 3^2, 3^3, \ldots\}.$$

On sait que tout nombre naturel n peut être mis d'une seule manière sous la forme $n = 2^{k_n-1}(2l_n-1)$, où k_n et l_n sont des nombres naturels.

Posons, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$E_{n+2} = \{2^{k_n}, 3^{l_n}, p_{n+2}, p_{n+2}^2, p_{n+2}^3, \ldots\}.$$

Nous démontrerons que la famille $F = \{E_1, E_2, \ldots\}$ satisfait à notre théorème.

Les ensembles E_1 et E_2 sont disjoints. Or, il est évident que chacun des ensembles E_1 et E_2 a avec chaque ensemble E_{n+2} $(n = 1, 2, \ldots)$ un et un seul élément commun. Si l'on admet que les ensembles E_{n+2} et E_{m+2}

ont deux éléments communs, on devrait avoir $k_n = k_m$ et $l_n = l_m$, ce qui donne $n = m$. Donc, il n'existe pas dans la suite $E_3, E_4, \ldots$ des ensembles distincts qui aient plus d'un élément commun. Les ensembles de la famille F ont donc deux à deux au plus un élément commun.

Admettons maintenant que E soit un ensemble qui a avec tout ensemble de la famile F un et un seul élément commun. E contient donc un nombre 2^k de l'ensemble E_1 et un nombre 3^l de l'ensemble E_2. Mais alors, vu la définition de l'ensemble E_{n+2} pour $n = 2^{k-1}(2l-1)$, E contient deux éléments 2^k et 3^l, de l'ensemble E_{n+2}, ce qui est impossible.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Il est à remarquer qu'on peut démontrer la proposition suivante: *si F est une famille dénombrable d'ensembles indénombrables de nombres réels, ayant deux à deux au plus un élément commun, il existe toujours un ensemble ayant avec tout ensemble de la famille F un et un seul élément commun.*

Or, on peut aussi démontrer *qu'il existe une famille F de puissance du continu d'ensembles ayant la puissance du continu de nombres réels, qui ont deux à deux au plus un élément commun, et telle qu'il n'existe aucun ensemble ayant avec tout ensemble de la famille F un et un seul élément commun.*

THÉORÈME 2. *F étant une famille dénombrable d'ensembles infinis de nombres naturels ayant deux à deux au plus un élément commun, il existe toujours un ensemble qui a avec tout ensemble de la famille F au moins un et au plus deux éléments communs.*

Démonstration. Soit $F = \{E_1, E_2, \ldots\}$ une famille dénombrable d'ensembles infinis de nombres naturels ayant deux à deux au plus un élément commun. Nous définirons une suite infinie $n_1, n_2, \ldots$ de nombres naturels de la manière suivante. Soit n_1 le plus petit nombre de E_1 et n_2 — le plus petit nombre de E_2 autre que n_1. Soit maintenant k un nombre naturel >1 et supposons que nous ayons déjà défini les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Si i et j sont des nombres naturels tels que $i < j \leqslant k$ et $n_i \neq n_j$, il existe au plus un ensemble $E_{m_{i,j}}$ qui contient les nombres n_i et n_j. Le nombre des ensembles $E_{m_{i,j}}$ qui existent est évidemment $< k^2$. Si l'ensemble E_{k+1} contient un ou deux éléments de la suite $n_1, n_2, \ldots, n_k$, soit n_{k+1} le plus petit d'entre eux. Si E_{k+1} ne contient aucun élément de la suite $n_1, n_2, \ldots, n_k$, alors E_{k+1}, ayant au plus un élément commun avec chacun des ensembles $E_{m_{i,j}}$ (dont le nombre est $< k^2$), contient des nombres qui n'appartiennent à aucun de ces ensembles: soit n_{k+1} le plus petit d'entre eux. La suite infinie de nombres naturels $n_1, n_2, \ldots$ est ainsi définie par induction. Soit $E = \{n_1, n_2, \ldots\}$. L'ensemble E satisfait au théorème 2. En effet, on a évidemment $n_k \in E_k$ pour $k = 1, 2, \ldots$, donc E a au moins un élément commun avec tout ensemble de la famille F.

Admettons maintenant qu'il existe un ensemble E_s qui a au moins trois éléments avec E, soit n_p, n_q et n_r, où $p < q < r$. D'après la définition du terme n_r de la suite $n_1, n_2, \ldots$, le nombre n_r n'appartient pas à l'ensemble $E_{m_{p,q}}$ qui contient n_p et n_q. Or, on a évidemment $E_{m_{p,q}} = E_s$, puisque, d'après la propriété de la famille F, il existe au plus un ensemble de cette famille contenant les deux nombres distincts n_p et n_q. Or, comme $n_r \in E_s = E_{m_{p,q}}$, on aboutit à une contradiction. Donc, l'ensemble E a au plus deux éléments communs avec tout ensemble de la famille F.

Le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

THÉORÈME 3. *F étant une famille dénombrable d'ensembles infinis de nombres naturels ayant deux à deux un nombre fini (ou nul) d'éléments communs, il existe toujours un ensemble qui a avec tout ensemble de la famille F un nombre fini non nul d'éléments communs.*

Démonstration. Soit $F = \{E_1, E_2, \ldots\}$. Nous définirons par induction une suite infinie $n_1, n_2, \ldots$ de nombres naturels comme il suit. Soit n_1 le plus petit nombre de l'ensemble E_1. Soit maintenant k un nombre naturel donné et supposons que nous ayons déjà défini les nombres $n_1, n_2, \ldots, n_k$. D'après l'hypothèse sur la famille F, les ensembles $E_1E_{k+1}, E_2E_{k+1}, \ldots, E_kE_{k+1}$ sont finis, donc l'est leur somme S aussi et, l'ensemble E_{k+1} étant infini, il est de même de l'ensemble $E_{k+1} - S = E_{k+1} - (E_1 + E_2 + \ldots + E_k)$. Nous définirons n_{k+1} comme le plus petit nombre de cet ensemble. On aura évidemment $n_{k+1} \notin E_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$ et $n_{k+1} \in E_{k+1}$.

Soit $E = \{n_1, n_2, \ldots\}$. L'ensemble E a donc au moins un élément commun avec tout ensemble de la famille F (puisque $n_i \in E_i$ pour $i = 1, 2, \ldots$). Or, soit i un nombre naturel donné. Comme $n_{k+1} \notin E_i$ pour $i \leqslant k$, aucun des nombres $n_{i+1}, n_{i+2}, \ldots$ n'appartient à E_i et il en résulte que E a avec E_i un nombre fini d'éléments communs. L'ensemble E satisfait donc aux conditions du théorème 3, qui est ainsi démontré.

Le problème se pose maintenant comment c'est pour les familles non dénombrables d'ensembles infinis de nombres naturels ayant deux à deux un nombre fini (ou nul) d'éléments communs. On peut démontrer sans peine l'existence de telles familles ayant la puissance du continu: par exemple, la famille F_0 de tous les ensembles $A(x) = \{2^n(2Enx+1)\}_{n=1,2,\ldots}$, où x est un nombre réel >0. (Voir mon livre *Cardinal and ordinal numbers*, Warszawa 1958, p. 77.) Or, dans ce cas, il est facile de définir un ensemble ayant un et un seul élément commun avec tout ensemble de la famille F_0: tel est, comme on le voit sans peine, l'ensemble E de tous les nombres $4k+2$, où $k = 0, 1, 2, \ldots$ En effet, pour tout ensemble $A(x)$ de la famille F_0 seulement le plus petit nombre de l'ensemble $A(x)$, soit $2(2Ex+1)$, appartient à E.

Or, nous démontrerons à l'aide de l'axiome du choix le théorème 4 suivant:

THÉORÈME 4. *Il existe une famille F ayant la puissance du continu d'ensembles infinis de nombres naturels, telle que tout couple d'ensembles distincts de la famille F a un nombre fini (ou nul) d'éléments communs et qu'il n'existe aucun ensemble ayant avec tout ensemble de la famille F un nombre fini non nul d'éléments communs.*

Démonstration. La famille Φ de tous les ensembles de nombres naturels ayant la puissance du continu, il existe, d'après le théorème de Zermelo, une suite transfinie du type φ, $S = \{E_\xi\}_{\xi<\varphi}$ formée de tous les ensembles de la famille Φ, et nous pouvons supposer que φ est le plus petit nombre ordinal tel que $\overline{\varphi} = 2^{\aleph_0}$. Nous définirons maintenant par induction transfinie une suite transfinie d'ensembles $\{H_\xi\}$ comme il suit. On sait qu'il existe des ensembles de nombres naturels qui ont avec tout ensemble de la famille F_0 (définie plus haut) un nombre fini non nul d'éléments communs: soit H_1 le premier terme de la suite transfinie S qui est un tel ensemble. Soit maintenant α un nombre ordinal donné $< \varphi$ et supposons que nous ayons déjà défini tous les ensembles H_ξ, où $\xi < \alpha$. S'il n'existe aucun ensemble de nombres naturels qui ait avec tout ensemble de la famille F_0 et aussi avec tout ensemble H_ξ, où $\xi < \alpha$, un nombre fini non nul d'éléments communs, posons $F = F_0 + \{H_\xi\}_{\xi<\alpha}$. La famille F satisfait évidemment au théorème 4. S'il existe dans la suite S des ensembles qui ont avec tout ensemble de la famille $F_0 + \{H_\xi\}_{\xi<\alpha}$ un nombre fini non nul d'éléments communs, nous définirons H_α comme le premier terme E_{μ_α} de la suite S qui est un tel ensemble. S'il existe des ensembles H_α pour tout nombre ordinal $\alpha < \varphi$, soit $F = F_0 + \{H_\alpha\}_{\alpha<\varphi}$. Nous aurons $H_\alpha = E_{\mu_\alpha}$ pour $\alpha < \varphi$ et la suite des nombres ordinaux μ_α $(\alpha < \varphi)$ sera évidemment croissante. Nous allons démontrer que la famille F satisfait au théorème 4.

En effet, admettons qu'il existe un ensemble E de nombres naturels qui a avec tout ensemble de la famille F un nombre fini non nul d'éléments communs. L'ensemble E appartenant évidemment à la famille Φ, il est un terme de la suite transfinie S et il existe un nombre ordinal $\mu < \varphi$ tel que $E = E_\mu$ et on a $\mu \neq \mu_\alpha$ pour $\alpha < \varphi$, puisque $E_{\mu_\alpha} = H_\alpha \epsilon F$ pour $\alpha < \varphi$.

Puisque φ est le plus petit nombre ordinal de puissance $2^{\aleph_0}$ et que la suite $\{\mu_\xi\}_{\xi<\varphi}$ est croissante, il existe un plus petit nombre ordinal $\alpha < \varphi$ tel que $\mu_\alpha > \mu$. D'après la définition de l'ensemble H_α, $H_\alpha = E_{\mu_\alpha}$ est le premier terme de la suite S qui a un nombre fini non nul d'éléments communs avec tout ensemble de la famille $F_0 + \{H_\xi\}_{\xi<\alpha}$. Or, l'ensemble $E = E_\mu$ est un ensemble de la suite S qui a un nombre fini non nul d'éléments communs avec tout ensemble de de la famille $F + F_0 + \{H_\xi\}_{\xi<\alpha}$,

donc, à plus forte raison, avec tout ensemble de la famille $F_0 + \{H_\xi\}_{\xi<\alpha}$: comme $\mu < \mu_\alpha$, cela contredit à la définition de l'ensemble $H_\alpha = E_{\mu_\alpha}$. Nous avons ainsi démontré qu'il n'existe aucun ensemble E de nombres naturels qui ait avec tout ensemble de la famille F un nombre fini ou nul d'éléments communs. Le théorème 4 se trouve ainsi démontré.

La question se pose s'il est possible de définir effectivement une famille F satisfaisant au théorème 4.

Reçu par la Rédaction le 3. 3. 1960

Addition pendant la correction des épreuves. D'après une remarque que je dois à M. A. Hajnal, notre théorème 4 peut être sans peine déduit du théorème 3 de la page 35 du travail de E. W. Miller, *On a property of families of sets*, Comptes rendus des séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III, 30 (1937), pp. 31-38.