# Sur la vitesse de la croissance des suites infinies d'entiers positifs II

## (Espace des vitesses)

par

**J. Popruženko** (Łódź)

Dans [3], j'ai établi certains résultats concernant la comparaison des suites infinies d'entiers positifs par rapport à la vitesse de leur croissance, sans avoir défini la notion de vitesse elle-même. C'est précisément cela qui est le but du présent travail: je vais attacher à toute suite d'entiers positifs, qui soit tend vers l'infini, soit est stationnaire, un être mathématique dit „vitesse" de cette suite.

Puis, la totalité de ces êtres définie, je démontre qu'elle peut être considérée comme un espace topologique d'une nature singulière.

**1.** Pour aborder ces questions, introduisons, suivant une idée de Hausdorff ([1], p. 247), la notion de convergence transfinie basée sur une relation d'ordre donnée.

Soient $\mathfrak{N}$ un espace abstrait, $\aleph_\nu = \overline{\overline{\mathfrak{N}}}$, $\varrho$ une relation d'ordre partiel existant dans $\mathfrak{N}$, et soit

$$\{a_\xi\}_{\xi<\omega_a} \qquad (\omega_a \leqslant \omega_\nu)\,, \tag{1.1}$$

où $\omega_a$ est un nombre ordinal initial, une suite transfinie formée d'éléments de $\mathfrak{N}$.

Définition I. La suite (1.1) sera dite *convergente au sens faible selon la relation $\varrho$ vers un élément $b$ de $\mathfrak{N}$*, en symbole: $\lim\limits_{\xi<\omega_a} a_\xi = b$ (selon $\varrho$), lorsque l'on a

$$a_0\,\varrho\, a_1\,\varrho\, \ldots\, \varrho\, a_\xi\,\varrho\, \ldots\, \varrho\, b \qquad (\xi < \omega_a)\,, \tag{1.2}$$

et lorsqu'il n'existe aucun élément $c$ de $\mathfrak{N}$ tel que l'on ait

$$a_\xi\,\varrho\, c\,\varrho\, b \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant \xi < \omega_a\,. \tag{1.3}$$

Définition II. La suite (1.1) sera dite *convergente au sens fort selon la relation $\varrho$ vers un élément $b$ de $\mathfrak{N}$*, en symbole: $\operatorname{Lim}\limits_{\xi<\omega_a} a_\xi = b$ (selon $\varrho$), lorsqu'elle satisfait à (1.2) et lorsqu'il existe pour tout $c \in \mathcal{N}$, $c \varrho b$, un indice $\xi = \xi_c$ satisfaisant à la condition

$$c \varrho a_{\xi_c}. \tag{1.4}$$

En comparant les conditions (1.3) et (1.4), on voit que toute suite convergente au sens fort l'est aussi au sens faible.

Cela posé, soit $b$ un élément quelconque de $\mathcal{N}$ et soit

$$\mathcal{N}_b = \mathop{E}_{p} \{p \in \mathcal{N},\ p \varrho b\}. \tag{1.5}$$

L'espace $\mathcal{N}_b$ est alors, lui aussi, partiellement ordonné par $\varrho$, et l'on constate aussitôt que, dans les espaces $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_b$, les deux circonstances suivantes ont lieu:

1° L'ensemble de toutes les suites (1.1) satisfaisant aux conditions de la Définition I est identique à celui de toutes les suites formées d'éléments de $\mathcal{N}_b$ et qui sont bien ordonnées selon la relation $\varrho$ en type d'ordre $\omega_a$ et non bornées (dans l'espace $\mathcal{N}_b$) selon la même relation.

2° L'ensemble de toutes les suites (1.1) satisfaisant aux conditions de la Définition II est identique à celui de toutes les suites formées d'éléments de $\mathcal{N}_b$, qui sont bien ordonnées par $\varrho$ en type $\omega_a$ et qui satisfont, dans $\mathcal{N}_b$, à la condition (∗) de [3], Théorème II, p. 239, à savoir: $\{d_\xi\}_{\xi<\omega_a}$ étant une telle suite, il existe pour tout $q \in \mathcal{N}_b$ un indice $\xi = \xi_q$ pour lequel $q \varrho d_{\xi_q}$.

Supposons maintenant que la relation $\varrho$ satisfasse à la condition:

($\alpha^{**}$) *$\delta$ étant un nombre ordinal $\leqslant \omega_0$, si*

$$a_0 \varrho a_1 \varrho \dots \varrho a_n \varrho \dots \varrho b \qquad (0 \leqslant n < \delta),$$

*il existe un élément $c$ de $\mathcal{N}$ tel que*

$$a_0 \varrho a_1 \varrho \dots \varrho a_n \varrho \dots \varrho c \varrho b \qquad (0 \leqslant n < \delta),$$

*quels que soient les éléments $a_n$ et $b$ de $\mathcal{N}$.*

Pour de telles relations on a le

Théorème I. 1. *Il n'existe, dans l'espace $\mathcal{N}$, aucune suite convergente selon la relation $\varrho$ et qui soit d'un type d'ordre confinal avec $\omega_0$.*

2. *Tout élément $b$ de $\mathcal{N}$ pour lequel l'ensemble $\mathcal{N}_b$ (formule (1.5)) n'est pas vide est point-limite d'une suite non dénombrable de la forme (1.1) convergente au sens faible selon $\varrho$.*

Supposons ($\alpha^{**}$) remplacé par la condition plus restrictive que voici:

(A**) *$M$ étant un ensemble au plus dénombrable $\subset \mathcal{N}$ et $b \in \mathcal{N}$ satisfaisant à la condition $M \varrho b$, il existe un élément $c$ de $\mathcal{N}$ tel que $M \varrho c \varrho b$.*



Dans ce cas, on peut obtenir un renseignement sur la dépendance mutuelle des suites convergentes de deux espèces considérées. On peut démontrer notamment le

Théorème II. *Soit $\varrho$ assujetti à la condition* (A**); *soit $\aleph_\mu = \overline{\overline{\mathcal{N}_b}}$. Alors:*

1. *Lorsque toutes les suites convergentes au sens faible vers $b$ (selon $\varrho$) sont de type $\omega_\mu$, l'une d'elles converge au sens fort.*

2. *Réciproquement, lorsqu'il existe une suite de type $\omega_\mu$ qui converge vers $b$ au sens fort (selon $\varrho$), et lorsque $\aleph_\mu$ est un aleph régulier, toute suite convergente vers $b$ au sens faible (selon $\varrho$) est de type $\omega_\mu$.*

Ces Théorèmes sont des conséquences des Théorèmes I-II de la 1-ère partie de ce travail ([3], p. 238 et 239).

Démonstration du Théorème I. L'assertion 1 est évidente d'après ($\alpha^{**}$).

Soit $b$ un élément de $\mathcal{N}$ pour lequel l'ensemble $\mathcal{N}_b$ n'est pas vide: il est alors indénombrable d'après sa définition même, car la condition ($\alpha^{**}$) se généralise de suite à tout $\delta$ dénombrable.

La relation $\varrho$ qui, par hypothèse, satisfait dans $\mathcal{N}$ à la condition ($\alpha^{**}$), satisfait dans $\mathcal{N}_b$ à la condition ($\alpha^{*}$) de [3], p. 238; le Théorème I de [3] est donc vrai dans l'espace $\mathcal{N}_b$. Alors, comme nous l'avons vu, toute suite d'éléments de $\mathcal{N}_b$ satisfaisant à ce Théorème converge vers $b$ conformément à la Définition I. Par conséquent, le point $b$ satisfait aux conditions de l'assertion 2 du présent Théorème, qui se trouve ainsi démontré.

Démonstration du Théorème II. Toute relation $\varrho$, qui satisfait dans $\mathcal{N}$ à la condition (A**), satisfait à (A*) dans l'espace $\mathcal{N}_b$ ([3], p. 238). En s'appuyant sur ce fait et en faisant recours aux circonstances 1° et 2° précédemment constatées, on obtient la démonstration de notre Théorème II par une application itérée du Théorème II de [3], p. 239, qui est vrai dans l'espace $\mathcal{N}_b$.

Les Théorèmes I et II se trouvent ainsi démontrés.

**2.** Définition III. Nous dirons que deux éléments de $\mathcal{N}$, $a$ et $a'$, *sont équivalents par rapport à la relation $\varrho$*, en symbole:

$$a \sim a' \quad (\text{selon } \varrho), \tag{2.1}$$

lorsqu'ils satisfont aux deux conditions suivantes:

1* $\quad y \varrho a \rightleftarrows y \varrho a' \qquad (y \in \mathcal{N})$,

2* $\quad a \varrho z \rightleftarrows a' \varrho z \qquad (z \in \mathcal{N})$.

On vérifie aisément que la relation (2.1) est réflexive, symétrique et transitive, en conséquence de quoi elle détermine, d'une façon bien connue, une décomposition de l'espace $\mathfrak{N}$ en classes d'équivalence. Démontrons qu'elle jouit des trois propriétés suivantes.

($\mathrm{i}_1$) *Lorsque* $a\varrho b$, *on a aussi* $a'\varrho b'$.

Conséquence immédiate de (2.1), 1* et 2*.

($\mathrm{i}_2$) *Lorsque* $\operatorname*{Lim}_{\xi<\omega_\alpha} a_\xi = a$ *(selon* $\varrho$*) et lorsqu'un élément* $b$ *satisfait à la condition* $y\varrho a \rightleftarrows y\varrho b$ $(y\in\mathfrak{N})$, *alors* $b=\operatorname*{Lim}_{\xi<\omega_\alpha} a'_\xi$ *(selon* $\varrho$*).*

En effet, d'après ($\mathrm{i}_1$), les formules $a_\xi\varrho a_\eta$ et $a_\xi\varrho a$ entraînent $a'_\xi\varrho a'_\eta$ et $a'_\xi\varrho a$; puis, d'après l'hypothèse faite sur $b$, $a'_\xi\varrho a$ entraîne $a'_\xi\varrho b$. On a alors

$$a'_0\varrho a'_1\varrho\ldots\varrho a'_\xi\varrho\ldots\varrho b \quad (\xi<\omega_\alpha). \tag{2.2}$$

$x$ satisfaisant à $x\varrho b$, on a d'après cette même hypothèse $x\varrho a$, donc (Définition II) $x\varrho a_{\xi_x}$, d'où en vertu de ($\mathrm{i}_1$): $x\varrho a'_{\xi_x}$.

Ceci, rapproché de (2.2), démontre ($\mathrm{i}_2$).

($\mathrm{i}_3$) *Soient* $\omega_\alpha$ *et* $\omega_{\beta_\eta}$ $(\eta<\omega_\alpha)$ *des nombres initiaux réguliers satisfaisant à l'inégalité* $\omega_\alpha\leqslant\omega_{\beta_\eta}$, $A$ *un ensemble* $\subset\mathfrak{N}$, *et soit*

$$q=\operatorname*{Lim}_{\eta<\omega_\alpha} p_\eta \quad (selon\ \varrho), \tag{2.3}$$

*où*

$$p_\eta=\operatorname*{Lim}_{\xi<\omega_{\beta_\eta}} a_\xi^{(\eta)} \quad (selon\ \varrho) \quad (\eta<\omega_\alpha;\ a_\xi^{(\eta)}\in A). \tag{2.4}$$

*Alors* $q$ *est un point-limite au sens fort de l'ensemble* $A$.

On démontre ($\mathrm{i}_3$) par induction, en construisant une suite convenable d'éléments de $A$.

En premier lieu, si l'on considère (2.3) et (2.4) pour $\eta=0$ et $\eta=1$ et si l'on pose $\xi_0=0$, on pourra déterminer aussitôt un nombre ordinal $\xi_1$ de sorte que l'on ait

$$a_{\xi_0}^{(0)}\varrho p_0\varrho a_{\xi_1}^{(1)} \quad (\xi_1<\omega_{\beta_1}). \tag{2.5}$$

Ceci étant, soit $\eta$ un nombre ordinal satisfaisant à l'inégalité $2\leqslant\eta<\omega_\alpha$.

Supposons que les nombres ordinaux $\xi_\zeta<\omega_{\beta_\zeta}$ et les éléments $a_{\xi_\zeta}^{(\zeta)}$ de $A$ soient définis pour tout $\zeta<\eta$ de façon à satisfaire aux conditions:

1° $a_{\xi_0}^{(0)}\varrho a_{\xi_1}^{(1)}\varrho\ldots\varrho a_{\xi_\zeta}^{(\zeta)}\varrho\ldots$ pour $\zeta<\eta$;

2° $p_{\zeta'}\varrho a_{\xi_\zeta}^{(\zeta)}$ pour $\zeta'<\zeta<\eta$.

D'après (2.5), ceci est vrai pour $\eta=2$.

Considérons la suite $\{p_\zeta\}_{\zeta<\eta}$. Comme, d'après (2.3), $p_\zeta\varrho p_\eta$, il existe d'après (2.4) un nombre ordinal $\xi_\zeta^{(\eta)}<\omega_{\beta_\eta}$ tel que $p_\zeta\varrho a_\xi^{(\eta)}$ pour $\xi\geqslant\xi_\zeta^{(\eta)}$.



Comme $\bar\eta<\omega_\alpha$, et comme $\omega_{\beta_\eta}\geqslant\omega_\alpha$ (tous ces nombres initiaux étant supposés réguliers), il existe un nombre ordinal $\xi^0<\omega_{\beta_\eta}$ tel que $\xi_\zeta^{(\eta)}<\xi^0$, donc aussi $p_\zeta\varrho a_{\xi^0}^{(\eta)}$, pour $\zeta<\eta$.

En posant $\xi_\eta=$ *le premier nombre ordinal* $\xi^0<\omega_{\beta_\eta}$ *ayant cette propriété*, on retrouve les conditions 1°-2° réalisées pour $\zeta<\eta+1$.

La suite $\{a_{\xi_\eta}^{(\eta)}\}_{\eta<\omega_\alpha}$ est ainsi définie par induction et l'on vérifie facilement que $\operatorname*{Lim}_{\eta<\omega_\alpha} a_{\xi_\eta}^{(\eta)}=q$ (selon $\varrho$). Comme $a_{\xi_\eta}^{(\eta)}\in A$, ceci démontre la propriété ($\mathrm{i}_3$).

**3.** Revenons à l'espace $\mathfrak{M}$ du début ([3], p. 235).

La relation abstraite $\varrho$ y étant réalisée par les formules (1.1)-(1.2) (ibidem, loc. cit.), les propriétés (A**) et ($\alpha$) ([3], p. 235) coïncident. Or, comme nous le savons, ($\alpha$) est vraie dans l'espace $\mathfrak{M}$ ([3], p. 235; [4], p. 203). On en conclut que les Théorèmes I-II le sont aussi.

Démontrons que, dans le cas où $\mathfrak{N}=\mathfrak{M}$, la condition 1* à elle seule suffit pour déterminer la même notion d'équivalence que l'on obtient dans le cas général à l'aide du couple des conditions de la Définition III.

Nous le démontrerons, en se servant d'une remarque de M. Marczewski ([3], p. 235), par l'intermédiaire de la définition arithmétique, posée au début de [3]. Or, comme la Définition III résulte manifestement, dans le cas envisagé, de cette dernière, il suffit de démontrer que la double implication

$$y\gg a\rightleftarrows y\gg b \quad (y\in\mathfrak{M}) \tag{3.1}$$

pour les élements $a=(a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots)$ et $b=(b_1,b_2,\ldots,b_i,\ldots)$ de $\mathfrak{M}$ entraîne l'inégalité

$$0<\varliminf_{i\to\infty}\frac{a_i}{b_i}\leqslant\varlimsup_{i\to\infty}\frac{a_i}{b_i}<\infty. \tag{3.2}$$

En effet, la formule (3.1) exclut l'égalité $\varliminf_{i\to\infty}(a_i/b_i)=0$, car l'existence d'une suite extraite $\{i_k\}$ telle que $\lim_{k\to\infty}(a_{i_k}/b_{i_k})=0$, donc $\{a_{i_k}\}\ll\{b_{i_k}\}$, entraînerait celle d'une suite d'entiers positifs $\{p_{i_k}\}$ satisfaisant à la condition $\{a_{i_k}\}\ll\{p_{i_k}\}\ll\{b_{i_k}\}$, d'où, en posant $p_i=a_i\cdot i$ pour $i\neq i_k$ et $p=(p_1,p_2,\ldots,p_i,\ldots)$, on aurait $p\in\mathfrak{M}$, $p\gg a$ et $p$ non $\gg b$, contrairement à l'implication „$\rightarrow$" de (3.1).

D'une façon analogue, la formule $\varlimsup_{i\to\infty}(a_i/b_i)=\infty$ conduirait à une contradiction avec l'implication „$\leftarrow$" de (3.1).

L'équivalence des trois définitions en question — de la Définition III, de (3.1) et de (3.2) — est ainsi établie.

Cela étant, désignons par M la famille de toutes les classes d'équivalence produites dans $\mathcal{M}$ par la relation $a \sim a'$ (selon $\gg$).

Définition IV. Si $V \in \mathrm{M}$ et $a \in V$, nous appelons *$V$ vitesse de la tendance vers l'infini de la suite $a$*, ou — tout court — *vitesse de $a$*.

Comme pour tout $a \in \mathcal{M}$ sa vitesse est déterminée de façon univoque, et comme deux éléments $a$ et $b$ tels que $a \gg b$ ne sont jamais équivalents (car $a$ non $\gg a$), on déduit du Théorème I, 2 la conséquence suivante:

($j_1$) *Il existe une infinité non dénombrable de vitesses distinctes.*

Toutes ces vitesses (celles des divers termes de la suite (1.1)) diffèrent à leur tour de la „vitesse-zéro", représentée par la classe des suites stationnaires.

On établit dans l'espace M un ordre partiel en posant, pour deux éléments $V$ et $U$ de M, $V > U$ lorsqu'il existe deux éléments $a \in V$ et $b \in U$ remplissant $a \gg b$, et dans ce cas seulement.

La relation $>$ ne dépend pas d'après ($i_1$) du choix particulier des éléments $a$ et $b$ (de $V$, resp. $U$) et l'on aperçoit de suite qu'elle est transitive et non réflexive.

Soit $\{V_\xi\}_{\xi<\omega_a}$ une suite transfinie de vitesses.

Définition V. Nous dirons que la suite $\{V_\xi\}_{\xi<\omega_a}$ *converge selon la relation $>$ vers une vitesse $U \in \mathrm{M}$*, en symbole:

$$\operatorname*{Lim}_{\xi<\omega_a} V_\xi = U \quad (\text{selon } >), \tag{3.3}$$

lorsqu'il existe une suite $\{a_\xi\}_{\xi<\omega_a}$, où $a_\xi \in V_\xi$, et un élément $b \in U$ tel que $\operatorname*{Lim}_{\xi<\omega_a} a_\xi = b$ (selon $\gg$).

On déduit du Théorème I, 1 la conséquence suivante:

($j_2$) *Il n'existe aucune suite infinie d'éléments de* M *qui soit convergente au sens de la Définition* V.

Quant à l'existence, dans M, de suites transfinies convergentes en ce sens, nous ne la savons pas démontrer sans hypothèses supplémentaires; car nous ne savons s'il existe dans $\mathcal{M}$ au moins une suite convergente au sens fort.

En tout cas, on démontre que:

($j_3$) *La limite d'une suite transfinie d'éléments de* M *qui est convergente au sens de la Définition* V *est définie de façon univoque.*

On déduit cela de la Définition V en s'appuyant sur la propriété ($i_2$) et sur l'équivalence démontrée de la condition (3.1) avec la Définition III.

Soit $\mathcal{X}$ un sous-ensemble de M. Désignons par $\mathcal{X}'$ l'ensemble formé des éléments-limites de toutes les suites remplissant (3.3) où $V_\xi \in \mathcal{X}$ (ensemble dérivé de $\mathcal{X}$).



Démontrons pour la fonction $\mathcal{X}'$ la formule d'addition:

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n\Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n'. \tag{3.4}$$

Posons $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n = \mathcal{X}$ et soit $U \in \mathcal{X}'$. Par hypothèse, on a alors la formule (3.3) avec $V_\xi \in \mathcal{X}$ ($\xi < \omega_a$).

Il en résulte qu'il existe un nombre initial $\omega_\beta \leqslant \omega_a$, une suite croissante de nombres ordinaux $\xi_\eta \to \omega_a$ ($\eta < \omega_\beta$) et un indice naturel $n_0$ tels que $V_{\xi_\eta} \in \mathcal{X}_{n_0}$; car, comme $\omega_a$ n'est pas confinal avec $\omega_0$, il existerait dans le cas contraire un nombre ordinal $\xi^0 < \omega_a$ tel que $V_\xi \notin \mathcal{X}_n$ pour $\xi \geqslant \xi^0$ et $n = 1, 2, \ldots$, en contradiction avec notre hypothèse.

D'après les Définitions II et V et la propriété ($j_3$), on a donc $\operatorname*{Lim}_{\eta<\omega_\beta} V_{\xi_\eta} = U$ (selon $>$), d'où $U \in \mathcal{X}_{n_0}'$.

Ceci démontre l'inclusion

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n\Big)' \subset \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{X}_n'.$$

L'inclusion inverse étant une conséquence évidente de la monotonie de la fonction $\mathcal{X}'$, la formule (3.4) se trouve ainsi démontrée.

Dès à présent, admettons que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Dans cette hypothèse, on déduit sans peine des Théorèmes I-II que tout élément de $\mathcal{M}$ est point-limite d'une suite convergente au sens fort selon la relation $\gg$, d'où la conséquence:

$$\mathrm{M}' = \mathrm{M}. \tag{3.5}$$

Puis, comme on a maintenant dans la Définition V, ainsi que dans les formules (2.3)-(2.4), $a = \beta_\eta = 1$, on détermine pour un $U \in \mathcal{X}''$ un système de représentants $a_\xi^{(\eta)}$ ($\xi < \omega_1$, $\eta < \omega_1$) analogue à celui qui figure dans ($i_3$) (ce qui n'est possible que grâce à ($i_2$)) et, en passant aux vitesses des suites $a_{\xi_\eta}^{(\eta)}$, on déduit de ($i_3$) la relation $U \in \mathcal{X}'$, d'où

$$\mathcal{X}'' \subset \mathcal{X}'. \tag{3.6}$$

Enfin, posons

$$\overline{\mathcal{X}} = \mathcal{X} + \mathcal{X}'. \tag{3.7}$$

D'après ($j_1$)-($j_3$) et (3.4)-(3.7), nous venons de démontrer le Théorème suivant, qui est le but principal de toutes ces considérations:

Théorème III. *Soit $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Alors:*

1. *On a* $\overline{\overline{\mathrm{M}}} = 2^{\aleph_0}$, *et* $\mathrm{M}' = \mathrm{M}$.

2. *Si l'on introduit pour $\mathcal{X} \subset \mathrm{M}$ la fermeture $\overline{\mathcal{X}}$ par la formule* (3.7), M *devient un espace topologique de Kuratowski où $\overline{\mathcal{X}}$ satisfait aux conditions suivantes:*

I. $\overline{\sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{X}_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mathfrak{X}}_n$ *pour toute suite* $\{\mathfrak{X}_n\}$ *de sous-ensembles de* M;

II. $\overline{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}$ *pour tout* $\mathfrak{X}$ *au plus dénombrable, et il existe d'ensembles non dénombrables pour lesquels* $\overline{\overline{\overline{\mathfrak{X}}-\mathfrak{X}}} = 1$;

III. $\overline{\overline{\mathfrak{X}}} = \overline{\mathfrak{X}}$.

Remarquons que, en vertu de la condition I, tout ensemble $F_\sigma$ de M est fermé, d'où il résulte que le $(\sigma\delta)$-système étendu sur la famille de tous les ensembles fermés de M ([2], p. 84) se réduit à cette famille elle-même; et pourtant, comme $M' \neq 0$, l'espace M n'est pas discret.

**Travaux cités**

[1] F. Hausdorff, *Summen von* $\aleph_1$*-Mengen*, Fund. Math. 26 (1936), p. 241-255.

[2] — *Mengenlehre*, Berlin u. Leipzig 1927.

[3] J. Poprużenko, *Sur la vitesse de la croissance des suites infinies d'entiers positifs I (Echelle des vitesses)*, Fund. Math. 46 (1958), p. 235-242.

[4] — *Sur une proposition équivalente à l'hypothèse du continu*, Coll. Math 6 (1958), p. 203-206.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

*Reçu par la Rédaction le 17. 1. 1959*

# An abstract form of the measure theoretic method of exhaustion

by

**W. Słowikowski** (Warszawa)

In many instances of partially ordered sets $X$ it is very desirable to obtain a least upper bound of some $Z \subset X$, especially in the case where it is unique, as the least upper bound of some countable subset of $Z$. If this is possible, the order completion of $X$, when it exists, is in a sense $\aleph_0$-accessible.

Such is the situation in the case where $X$ is the family of all measurable functions on a measure space $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, which is of vital importance to the theory of stochastic processes. A similar situation exists for some classes of partially ordered linear spaces of Kantorovitch as well as in many other instances.

In this paper this common situation is described in an abstract form and a theorem is proved which is named the *Principle of Exhaustion*. This theorem can be of some use in dealing with particular problems of the kind.

In particular, from the point of view of the measure theory, this theorem can be regarded as an abstract formulation of the so called *method of exhaustion* (e. g. see [1], p. 76). It may appear surprising that this method, which is a very frequent tool in the measure theory, turns out to be due entirely to partial ordering. On the other hand, if a measure $\mu$ defined on a $\sigma$-field $\mathfrak{B}$ is regarded as an order-preserving mapping of $\mathfrak{B}$ (partially ordered by inclusion) into the real line (with the usual ordering) (see [2]), then it can be seen that this generalization is quite natural. It is very interesting that the Radon-Nikodym theorem can be obtained directly by the application of the Principle of Exhaustion as it is stated in [1]. It should be noticed, however, that there is a proof of the Radon-Nikodym theorem, where the Principle of Exhaustion is omitted (see e. g. [3]).

Let $X$ be an arbitrary abstract set. $X$ is called *partially ordered*, if there is a relation $x \leqslant y$ in $X$ which is transitive and semi-antisymmetric, i. e. such that $x \leqslant y$ and $y \leqslant x$ implies $x = y$.