

Sur les limites approximatives

par

A. Matysiak (Łódź)

Examinons l'ensemble $E = \overline{\lim}_x \{f(x) > b, x > x_0\}$. Nous nommons la *limite approximative droite supérieure* de la fonction $f(x)$ au point x_0 la borne inférieure de tels nombres b , dont la densité de l'ensemble E au point x_0 égale zéro. Nous désignons cette limite par le symbole $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0+} \text{apr} f(x)$.

On peut écrire

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0+} \text{apr} f(x) = \inf_b \left[\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|(x_0, x_0+h) \cap \{f(x) > b\}|}{h} = 0 \right],$$

où le symbole $| \cdot |$ signifie la mesure de l'ensemble, lorsque la fonction $f(x)$ est mesurable et la mesure extérieure lorsque $f(x)$ est non-mesurable. Il est évident qu'il faut dans ce cas remplacer dans la désignation de la limite approximative la définition „densité“ par la définition „densité extérieure“.

D'une façon analogue nous déterminons la *limite approximative gauche supérieure*

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0-} \text{apr} f(x) = \inf_b \left[\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{|(x_0-h, x_0) \cap \{f(x) > b\}|}{h} = 0 \right].$$

Dans son travail „Résolution d'un problème de M. Z. Zahorski sur les limites approximatives“, Fund. Math. 48 (1960), p. 277-286, L. Belowska a indiqué la construction de la fonction $f(x)$, pour laquelle l'ensemble des points x_0 , dont la limite approximative supérieure gauche n'est pas égale à la limite approximative supérieure droite, est de la puissance du continu. Ci-dessous nous démontrerons qu'un tel ensemble est de la I-ère catégorie.

THÉORÈME. *L'ensemble E des points x_0 , pour lesquels*

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0+} \text{apr} f(x) \neq \overline{\lim}_{x \rightarrow x_0-} \text{apr} f(x),$$

est un ensemble de la I-ère catégorie.

Démonstration. Désignons

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0^+} \text{apr } f(x) = M(x_0),$$

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0^-} \text{apr } f(x) = L(x_0).$$

Admettons que l'ensemble E soit un ensemble de tous les points x_0 , pour lesquels $M(x_0) \neq L(x_0)$. Il est évident que l'ensemble $E = Z \cup T$, où

$$Z = \bigcup_{x_0} \{M(x_0) - L(x_0) > 0\},$$

$$T = \bigcup_{x_0} \{M(x_0) - L(x_0) < 0\}.$$

Nous démontrerons que l'ensemble Z est de la I-ère catégorie. Indiquons pour chaque n naturel, par Z_n l'ensemble $Z_n = \bigcup_{x_0} \{M(x_0) - L(x_0) > 1/n\}$; il est évident que $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$.

Divisons l'axe y en parties d'une longueur de $1/2^n$ et par Z_{nm} indiquons cette partie de l'ensemble Z_n , pour les points de laquelle a lieu l'inégalité

$$(1) \quad \frac{m}{2^n} \leq L(x_0) < \frac{m+1}{2^n},$$

où m est un nombre entier arbitraire. Il est facile de constater que $Z_n = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} Z_{nm}$.

En vertu de l'inégalité (1) et de la définition de l'ensemble Z_n , il ressort que $M(x_0) > (m+1)/2^n$ pour chaque point $x_0 \in Z_{nm}$. De la définition de la limite approximative droite supérieure et de l'hypothèse $M(x_0) > (m+1)/2^n$, il résulte que

$$(2) \quad \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{|(x_0, x_0+h) \cap \{f(x) > \frac{m+1}{2^n}\}|}{h} > 0.$$

Désignons pour p naturel par Z_{nmp} la partie de l'ensemble Z_{nm} , pour les points de laquelle est remplie l'inégalité

$$(3) \quad \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{|(x_0, x_0+h) \cap \{f(x) > \frac{m+1}{2^n}\}|}{h} > \frac{1}{p}.$$

Il est évident que $Z_{nm} = \bigcup_{p=1}^{\infty} Z_{nmp}$.

Étant donné que pour les points $x_0 \in Z_{nm}$ est $L(x_0) < (m+1)/2^n$, alors vu la définition de la limite approximative gauche supérieure il est

$$(4) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|(x_0-h, x_0) \cap \{f(x) > \frac{m+1}{2^n}\}|}{h} = 0.$$

Désignons par Z_{nmpk} la partie de l'ensemble Z_{nmp} pour les points de laquelle est remplie l'inégalité

$$(5) \quad \frac{|(x_0-h, x_0) \cap \{f(x) > \frac{m+1}{2^n}\}|}{h} < \frac{1}{p}$$

pour $h < 1/k$, $h > 0$, où k est un nombre naturel arbitraire. Il est facile de voir que $Z_{nmp} = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_{nmpk}$. Démontrons que les ensembles Z_{nmpk} sont de la I-ère catégorie. Supposons le contraire, c.-à.-d. qu'il existe de tels nombres naturels n_0, p_0, k_0 et un tel nombre entier m_0 , que l'ensemble $Z_{n_0 m_0 p_0 k_0}$ est de la deuxième catégorie. De la définition des ensembles de la deuxième catégorie il résulte que l'ensemble $Z_{n_0 m_0 p_0 k_0}$ est dense sur un certain intervalle (a, b) . Nous pouvons admettre que la longueur de cet intervalle est plus petite que $1/k_0$. Soit le point $x_0 \in (a, b) \cap Z_{n_0 m_0 p_0 k_0}$.

En vertu de la définition de l'ensemble $Z_{n_0 m_0 p_0}$, il existe un tel point $\xi_0 > x_0$ et $\xi_0 \in (a, b)$ que

$$(6) \quad \frac{|(x_0, \xi_0) \cap \{f(x) > \frac{m_0+1}{2^{n_0}}\}|}{\xi_0 - x_0} > \frac{1}{p_0}.$$

La fonction

$$D(\xi) = \frac{|(x_0, \xi) \cap \{f(x) > \frac{m_0+1}{2^{n_0}}\}|}{\xi - x_0}$$

est une fonction continue de la variable ξ ; il existe donc un tel entourage (c, d) du point ξ_0 , contenu dans (a, b) , où $c > x_0$, que pour tous les ξ de cet entourage a lieu l'inégalité

$$(7) \quad \frac{|(x_0, \xi) \cap \{f(x) > \frac{m_0+1}{2^{n_0}}\}|}{\xi - x_0} > \frac{1}{p_0}.$$

Vu la densité de l'ensemble $Z_{n_0 m_0 p_0 k_0}$ dans le segment (a, b) il existe dans l'entourage (c, d) un tel point $\bar{\xi} \in Z_{n_0 m_0 p_0 k_0}$ que

$$(8) \quad \frac{|(x_0, \bar{\xi}) \cap \left\{ f(x) > \frac{m_0 + 1}{2^{n_0}} \right\}|}{\bar{\xi} - x_0} > \frac{1}{p_0}.$$

Il est évident que $\bar{\xi} > x_0$.

Vu que le point $\bar{\xi} \in Z_{n_0 m_0 p_0 k_0}$, donc est remplie l'inégalité

$$(9) \quad \frac{|(\bar{\xi} - h, \bar{\xi}) \cap \left\{ f(x) > \frac{m_0 + 1}{2^{n_0}} \right\}|}{h} < \frac{1}{p_0}$$

pour chaque $h < 1/k_0$.

Soit $h = \bar{\xi} - x_0$. Etant donné que les points x_0 et $\bar{\xi}$ appartiennent à l'intervalle (a, b) d'une mesure inférieure à $1/k_0$, donc $h = \bar{\xi} - x_0 < 1/k_0$. Mettant $h = \bar{\xi} - x_0$ dans l'inégalité (9), nous obtenons l'inégalité

$$(10) \quad \frac{|(x_0, \bar{\xi}) \cap \left\{ f(x) > \frac{m_0 + 1}{2^{n_0}} \right\}|}{\bar{\xi} - x_0} < \frac{1}{p_0}$$

contraire à l'inégalité (8).

De l'hypothèse que l'ensemble $Z_{n_0 m_0 p_0 k_0}$ est de la deuxième catégorie, nous sommes arrivés à une contradiction. Chacun des ensembles Z_{nmpk} est donc de la première catégorie et l'ensemble $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_{nmpk}$ est de la I-ère catégorie comme somme de la quantité dénombrable des ensembles de la I-ère catégorie.

On peut démontrer d'une façon analogue que l'ensemble T est de la I-ère catégorie.

Il est évident que l'ensemble $E = Z + T$ est de la première catégorie.

La démonstration d'un théorème analogue pour les limites approximatives inférieures n'exige pas de modifications essentielles.

Reçu par la Rédaction le 19. 10. 1959

Les FUNDAMENTA MATHEMATICAE publient, en langues des con-
internationaux, des travaux consacrés à la *Théorie des Ensembles*, *Topologie*, *Fondements de Mathématiques*, *Fonctions Réelles*, *Algèbre Abstrakte*.
Les tomes I-XLVIII fasc. 3 des FUNDAMENTA MATHEMATICAE contiennent 1424 travaux des 383 auteurs suivants:

Addison J. W., Aitchison B., Alexandroff P., Alexiewicz A., Alexits G., Antoine L., Aszajna N., Auerbach H., Ayres W. L., Bagemihl F., Balachandran V. K., Balcerzyk S., Nach S., Banaschewski B., Bary N., Beer G., Belowska L., Benton T. C., Bergman
Berstein I., Besicovitch A. S., Białynicki-Birula A., Bielecki A., Bing R. H., Birkhoff
Blau J. H., Blumberg H., Boehner S., Bockstein M., Borel E., Borsuk K., Bott R., Bour-
gand G., Bourgin D. G., Braun S., Burkill J. C., Busemann H., Büchi J. R., Cartwright
Cavailles J., Chajoth Z., Charzyński Z., Chlodovsky M. J., Chojnacki Ch., Chow S.
Church A., Cohen W. L., Császár A., Curtis M. L., Čech E., Dancer W., Dantoni G.,
Dantzig D., Dekker T., Denjoy A., Diendoné J., Dirac G. A., Dorroh J. L., Dowker C.
Duda R., Dushnik B., Dyer E., Eggleston H. G., Egoroff I., Egedy L., Ehrenfeucht A., E-
berg S., Engelking R., Erdős P., van Est W. T., Fast H., Feferman S., Feller W., Fich-
holz G., de Finetti B., Fodor G., Fort M. K. Jr., Fox R. H., Fraenkel A., Franck R., Frank
Fréchet M., Freudenthal H., Fried H., Fuchs L., Fullerton R. E., Gaguaeff B., Ganea T. C.
J., Gillman L., Gindifer M., Ginsburg S., Gleichgewicht B., Glivenko V., Goffman C., Gold-
sky G., Gotlib St., Goetz A., Goodstein R. L., Gourin E., Gowurin M., Granas A., Griffith B.,
de Groot J., Grzegorzczak A., Hadwiger H., Hahn H., Hájek O., Halmos P. R., Hamst
M. E., Hardy G. H., Hartman S., Hausdorff F., Henkin L., Hewitt E., Hilgers A., Hill-
Hilton P. J., Hoborski A., Hofmann H., Hopf H., Horne J. G. Jr., Hulanicki A., Hu-
tsen, Huntington E. V., Hurewicz W., Iqbalunnisa., Janczak A., Janiszewski Z., Jarník
Jarot J., Jaśkowski S., Jaworowski J., Jenkins J., Jessen B., Kaczmarz S., Kamke E., Ka-
torovitch L., Katětov M., Kaufmann B., Kelley J. L., Kempisty S., Kestelman H., Ket-
méty J., Keyser C. J., Khintchine A., Kierst S., Kinna W., Kinoshita S., Kirkor A., K-
braun M. D., Kleene S. C., Kline J. R., Kline M., Knaster B., Kincbal V., Kodama Y., Ko-
C. W., Kolmogoroff A., Kondó M., Kosiński A., Kowalsky H. J., Kozakiewicz W., Ko-
niewski A., König D., Kreisel G., Kunugi K., Kuratowski K., Kurepa G., Lavrentieff W., I-
Leader S., Lebesgue H., Lederer G., Lefschetz S., Leja F., Lelek A., Leśniewski S., Lev-
Lévy A., Lindenbaum A., Lipiński J. S., Littlewood J. E., Livenson E., Loomann H., I-
E. R., Lubański M., Lubben G., Lusin N., Łomnicki A., Łomnicki Z., Łoś J., Mac Lan
Mahavier S., Marchaud A., Marcinkiewicz J., Marczewski E., Mardesić S., Markwald W.,
Matysiak A., Mayer W., Mazur S., Mazurkiewicz S., McDowell R. H., Menchoff D., Menger
Michael E., Mickle E., Mikusiński J., Miller E. W., Mioduszewski J., Mirmanoff D., Miś-
Molski R., Montague R., Montel P., Montgomery D., Moore J. C., Moore R. L., Morse A.,
Morse M., Mostowski A., Mrówka S., Mycielski Jan, Myhill J., Nachbin L., Nagata J., Na-
sohn I., Neubauer M., von Neumann J., Newman P., Niemytzki V., Niklibore L., Nikodym
Nikodym S., Novotny M., Novak I. L., Novák J., Novikoff P., Nosarzewska M., Nöbeling
Offord A. C., Okhuma T., Orlicz W., Otto E., Oxtoby J. C., Padmavally K., Peppi
Pepper E. D., Piccard S., Popruženko J., Posament T., Pospíšil B., Puckett W. T.,
Putnam R. G., Radó T., Rajchman A., Randolph J. F., Rasiowa H., Ravetz J. R., Ra-
bach M., Reichelderfer P., Reschovsky H., Ridder J., Rieger L., Riesz F., Roberts J.
Robinson A., Robinson R. M., Romanovski P., Rosenthal A., Rothberger F., Roul-
N. A., Rózańska J., Rudin M. E., Ruziewicz S., Ryll-Nardzewski C., Saalfrank C.,
Saks S., Salem R., Sands A. D., Schauder J. P., Schmeiser M., Schreier J., Šelivanovsk
Shields A., Sieczka F., Sierlncki K., Sierpiński W., Sikorski R., Singh A. N., Skolem
Stomiński J., Słowkowski W., Smirnov J. M., Sobolev S. L., Sokół-Sokolowski K., Stee-
lin M., Spector C., Splawa-Neyman J., Stallings J., Staniszevska J., Steckel S., Stee-
N. E., Stein S. K., Steinhilber H., Stepanoff W., Stoullow S., Stone M. H., Stożek W., S-
szewicz S., Straus E. G., Sudan G., Snycer i Balagner F., Suszko R., Swingle P. M., Szás
Szmielew W., Szymański P., Świerczkowski S., Tamarkin J. D., Tambs Lyche R.,
nawski E., Tarski A., Tatarkiewicz K., Taylor S. J., Torrance E. M., Tumarkin
Tulajkov A., Tychonoff A., Ulam S., Urbanik K., Ursell H. D., Urysohn P., Van
Lijn G., Varadarajan V. S., Vaughan H. E., Vaught R. L., Vedenissos N., Verblunsk
Veress P., Vietoris L., Viola T., Vitali G., Vulich B., Wagner K., Wakulicz
Walfisz A., Walker G., Wallace A. D., Wang H., Waraszkiewicz Z., Ward A. J., Wa-
man D., Ważewski T., Weier J., Weinlös S., Weiss M., Whitehead J. H. C., Whitne
Whyburn G. T., Whyburn L., Wiener N., Wilder E. L., Wileński H., Wilkosz W.,
dysławski M., Woodard D. W., Wu W. T., Young G. C., Young L. C., Young R.
Younglove J. N., Zahorska H., Zahorski Z., Zalwasser Z., Zarankiewicz K., Zarycki
Zawadowski W., Zermelo E., Zink R. E., Zippin L., Zygmund A., Żelazko W., Żyliński