Sur les limites approximatives

par

A. Matysiak (Łódź)

Examinons l'ensemble $E = \underset{x}{E}\{f(x) > b,\, x > x_0\}$. Nous nommons la *limite approximative droite supérieure* de la fonction $f(x)$ au point x_0 la borne inférieure de tels nombres b, dont la densité de l'ensemble E au point x_0 égale zéro. Nous désignons cette limite par le symbole $\overline{\lim\limits_{x\to x_0+}}\operatorname{apr} f(x)$.

On peut écrire

$$\overline{\lim_{x\to x_0+}}\operatorname{apr} f(x) = \inf_b \left[\lim_{h\to 0+} \frac{|(x_0, x_0+h) \cap \{f(x) > b\}|}{h} = 0\right],$$

où le symbole $|\ |$ signifie la mesure de l'ensemble, lorsque la fonction $f(x)$ est mesurable et la mesure extérieure lorsque $f(x)$ est non-mesurable. Il est évident qu'il faut dans ce cas remplacer dans la désignation de la limite approximative la définition „densité" par la définition „densité extérieure".

D'une façon analogue nous déterminons la *limite approximative gauche supérieure*

$$\overline{\lim_{x\to x_0-}}\operatorname{apr} f(x) = \inf_b \left[\lim_{h\to 0+} \frac{|(x_0-h, x_0) \cap \{f(x) > b\}|}{h} = 0\right].$$

Dans son travail „Résolution d'un problème de M. Z. Zahorski sur les limites approximatives", Fund. Math. 48 (1960), p. 277-286, L. Belowska a indiqué la construction de la fonction $f(x)$, pour laquelle l'ensemble des points x_0, dont la limite approximative supérieure gauche n'est pas égale à la limite approximative supérieure droite, est de la puissance du continu. Ci-dessous nous démontrerons qu'un tel ensemble est de la I-ère catégorie.

Théorème. *L'ensemble E des points x_0, pour lesquels*

$$\overline{\lim_{x\to x_0+}}\operatorname{apr} f(x) \neq \overline{\lim_{x\to x_0-}}\operatorname{apr} f(x)\,,$$

est un ensemble de la I-ère catégorie.

Démonstration. Désignons

$$\overline{\lim_{x\to x_0+}} \operatorname{apr} f(x) = M(x_0),$$

$$\overline{\lim_{x\to x_0-}} \operatorname{apr} f(x) = L(x_0).$$

Admettons que l'ensemble E soit un ensemble de tous les points x_0, pour lesquels $M(x_0) \neq L(x_0)$. Il est évident que l'ensemble $E = Z \cup T$, où

$$Z = \mathop{E}_{x_0} \{M(x_0) - L(x_0) > 0\},$$

$$T = \mathop{E}_{x_0} \{M(x_0) - L(x_0) < 0\}.$$

Nous démontrerons que l'ensemble Z est de la I-ère catégorie. Indiquons pour chaque n naturel, par Z_n l'ensemble $Z_n = \mathop{E}_{x_0}\{M(x_0) - L(x_0) > 1/n\}$; il est évident que $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$.

Divisons l'axe y en parties d'une longueur de $1/2^n$ et par Z_{nm} indiquons cette partie de l'ensemble Z_n, pour les points de laquelle a lieu l'inégalité

$$\frac{m}{2^n} \leqslant L(x_0) < \frac{m+1}{2^n}, \tag{1}$$

où m est un nombre entier arbitraire. Il est facile de constater que $Z_n = \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} Z_{nm}$.

En vertu de l'inégalité (1) et de la définition de l'ensemble Z_n, il ressort que $M(x_0) > (m+1)/2^n$ pour chaque point $x_0 \in Z_{nm}$. De la définition de la limite approximative droite supérieure et de l'hypothèse $M(x_0) > (m+1)/2^n$, il resulte que

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\left|(x_0, x_0+h) \cap \left\{f(x) > \frac{m+1}{2^n}\right\}\right|}{h} > 0. \tag{2}$$

Désignons pour p naturel par Z_{nmp} la partie de l'ensemble Z_{nm}, pour les points de laquelle est remplie l'inégalité

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \frac{\left|(x_0, x_0+h) \cap \left\{f(x) > \frac{m+1}{2^n}\right\}\right|}{h} > \frac{1}{p}. \tag{3}$$

Il est évident que $Z_{nm} = \bigcup_{p=1}^{\infty} Z_{nmp}$.

Étant donné que pour les points $x_0 \in Z_{nm}$ est $L(x_0) < (m+1)/2^n$, alors vu la définition de la limite approximative gauche supérieure il est

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left|(x_0-h, x_0) \cap \left\{f(x) > \frac{m+1}{2^n}\right\}\right|}{h} = 0. \tag{4}$$

Désignons par Z_{nmpk} la partie de l'ensemble Z_{nmp} pour les points de laquelle est remplie l'inégalité

$$\frac{\left|(x_0-h, x_0) \cap \left\{f(x) > \frac{m+1}{2^n}\right\}\right|}{h} < \frac{1}{p} \tag{5}$$

pour $h < 1/k$, $h > 0$, où k est un nombre natural arbitraire. Il est facile de voir que $Z_{nmp} = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_{nmpk}$. Démontrons que les ensembles Z_{nmpk} sont de la I-ère catégorie. Supposons le contraire, c.-à.-d. qu'il existe de tels nombres naturels n_0, p_0, k_0 et un tel nombre entier m_0, que l'ensemble $Z_{n_0m_0p_0k_0}$ est de la deuxième catégorie. De la définition des ensembles de la deuxième catégorie il résulte que l'ensemble $Z_{n_0m_0p_0k_0}$ est dense sur un certain intervalle (a, b). Nous pouvons admettre que la longueur de cet intervalle est plus petite que $1/k_0$. Soit le point $x_0 \in (a, b) \cap Z_{n_0m_0p_0k_0}$.

En vertu de la définition de l'ensemble $Z_{n_0m_0p_0}$, il existe un tel point $\xi_0 > x_0$ et $\xi_0 \in (a, b)$ que

$$\frac{\left|(x_0, \xi_0) \cap \left\{f(x) > \frac{m_0+1}{2^{n_0}}\right\}\right|}{\xi_0 - x_0} > \frac{1}{p_0}. \tag{6}$$

La fonction

$$D(\xi) = \frac{\left|(x_0, \xi) \cap \left\{f(x) > \frac{m_0+1}{2^{n_0}}\right\}\right|}{\xi - x_0}$$

est une fonction continue de la variable ξ; il existe donc un tel entourage (c, d) du point ξ_0, contenu dans (a, b), où $c > x_0$, que pour tous les ξ de cet entourage a lieu l'inégalité

$$\frac{\left|(x_0, \xi) \cap \left\{f(x) > \frac{m_0+1}{2^{n_0}}\right\}\right|}{\xi - x_0} > \frac{1}{p_0}. \tag{7}$$

Vu la densité de l'ensemble $Z_{n_0 m_0 p_0 k_0}$ dans le segment (a, b) il existe dans l'entourage (c, d) un tel point $\bar{\xi} \in Z_{n_0 m_0 p_0 k_0}$ que

$$\frac{\left|(x_0, \bar{\xi}) \frown \left\{f(x) > \frac{m_0+1}{2^{n_0}}\right\}\right|}{\bar{\xi} - x_0} > \frac{1}{p_0}. \tag{8}$$

Il est évident que $\bar{\xi} > x_0$.

Vu que le point $\bar{\xi} \in Z_{n_0 m_0 p_0 k_0}$, donc est remplie l'inégalité

$$\frac{\left|(\bar{\xi} - h, \bar{\xi}) \frown \left\{f(x) > \frac{m_0+1}{2^{n_0}}\right\}\right|}{h} < \frac{1}{p_0} \tag{9}$$

pour chaque $h < 1/k_0$.

Soit $h = \bar{\xi} - x_0$. Etant donné que les points x_0 et $\bar{\xi}$ appartiennent à l'intervalle (a, b) d'une mesure inférieure à $1/k_0$, donc $h = \bar{\xi} - x_0 < 1/k_0$. Mettant $h = \bar{\xi} - x_0$ dans l'inégalité (9), nous obtenons l'inégalité

$$\frac{\left|(x_0, \bar{\xi}) \frown \left\{f(x) > \frac{m_0+1}{2^{n_0}}\right\}\right|}{\bar{\xi} - x_0} < \frac{1}{p_0} \tag{10}$$

contraire à l'inégalité (8).

De l'hypothèse que l'ensemble $Z_{n_0 m_0 p_0 k_0}$ est de la deuxième catégorie, nous sommes arrivés à une contradiction. Chacun des ensembles Z_{nmpk} est donc de la première catégorie et l'ensemble $Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=-\infty}^{\infty} \bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} Z_{nmpk}$ est de la I-ère catégorie comme somme de la quantité denombrable des ensembles de la I-ère catégorie.

On peut démontrer d'une façon analogue que l'ensemble T est de la I-ère catégorie.

Il est évident que l'ensemble $E = Z + T$ est de la première catégorie.

La démonstration d'un théorème analogue pour les limites approximatives inférieures n'exige pas de modifications essentielles.

Reçu par la Rédaction le 19. 10. 1959