Sur la compactification des espaces métriques

par

R. Engelking (Warszawa)

Dans leur travail [1], J. de Groot et R. H. McDowell ont introduit la notion de $\{\Phi_\tau\}_{\tau\in T}$-*compactification* pour un espace métrique X, $\{\Phi_\tau\}_{\tau\in T}$ étant une famille de transformations de X dans X. On appelle ainsi un espace métrique compacte $\widetilde{X}$, dont X est un sous-ensemble dense, s'il existe une famille $\{\widetilde{\Phi}_\tau\}_{\tau\in T}$ de prolongements des Φ_τ sur $\widetilde{X}$ à valeurs dans $\widetilde{X}$. Ils ont aussi prouvé que pour chaque espace X métrique séparable et chaque famille dénombrable $\{\Phi_i\}$ il existe une $\{\Phi_i\}$-compactification; de plus, si $\dim X \leqslant 0$, on peut supposer $\dim \widetilde{X} \leqslant 0$. On a posé dans [1] le problème de trouver une $\{\Phi_i\}$-compactification n-dimensionnelle pour un espace X de dimension n et une famille $\{\Phi_i\}$ dénombrable. Le présent travail donne une solution de ce problème. Nous nous proposons de prouver le théorème suivant:

THÉORÈME. *X étant un espace métrique séparable de dimension $\leqslant n$ et $\{\Phi_i\}$ une famille de transformations de X dans X, il existe une $\{\Phi_i\}$-compactification $\widetilde{X}$ de X telle que* $\dim \widetilde{X} \leqslant n$.

Démonstration. On peut supposer que les fonctions superposées $\Phi_i\Phi_j$ et l'identité I de X appartiennent aussi à $\{\Phi_i\}$. Admettons dans X une métrique ϱ totalement bornée telle que les fonctions Φ_i soient uniformément continues dans ϱ (cf. [1]).

Pour chaque $m = 1, 2, \ldots$ nous définissons par induction un recouvrement [1] $\mathfrak{A}_m = \{U_1^m, \ldots, U_{k_m}^m\}$ de X tel que:

(a) $\delta(U_i^m) \leqslant 1/m$ $(i = 1, \ldots, k_m)$,

(b) rang $\mathfrak{A}_m \leqslant n$,

(c) pour chaque $l < m$ et $s \leqslant k_m$ il existe un $r \leqslant k_{m-1}$ tel que $\Phi_l(U_s^m) \subset U_r^{m-1}$

et une famille de fonctions $f_1^m, \ldots, f_{k_m}^m$ satisfaisant aux conditions

(d) $f_s^m : X \to [0, 1]$,

(1) Le mot „recouvrement" signifie toujours „recouvrement fini et ouvert". Un recouvrement $\mathfrak{A}$ est contenu dans $\mathfrak{A}_1$ (ou $\mathfrak{A}_1$ contient $\mathfrak{A}$) si pour chaque $U \in \mathfrak{A}$ il existe un $U_1 \in \mathfrak{A}_1$ tel que $U \subset U_1$.

(e) $(f_s^m)^{-1}(0) = X - U_s^m$,

(f) $\sum_{s=1}^{k_m} f_s^m(x) \geqslant 1$ pour chaque $x \in X$,

(g) si $x, y \in U_r^m$ pour un $r \leqslant k_m$ on a pour chaque $i < m$:

$$|f_s^i(x) - f_s^i(y)| \leqslant \frac{1}{2^{m-i+1}} \quad \text{où} \quad s = 1, \ldots, k_i .$$

Construction pour $n = 1$. Soit $\mathfrak{D}^1 = \{O_i^1\}$ un recouvrement fini de X, tel que $\delta(O_i^1) \leqslant 1$ pour chaque i (un tel recouvrement existe, X étant totalement borné). Comme $\dim X \leqslant n$, $\{O_i^1\}$ contient un recouvrement $\mathfrak{A}_1 = \{U_1^1, \ldots, U_{k_1}^1\}$ de rang $\leqslant n$. D'après [3], § 16. II, il existe un recouvrement fermé $\{F_1^1, \ldots, F_{k_1}^1\}$ tel que $F_i^1 \subset U_i^1$ $(i = 1, \ldots, k_1)$. En vertu de [3], § 16. III (remarque 2), il existe des fonctions $f_i^1 \colon X \to [0, 1]$ telles que $f_i^1(x) = 1$ pour $x \in F_i^1$ et $(f_i^1)^{-1}(0) = X - U_i^1$ $(i = 1, \ldots, k_1)$.

On voit sans peine que les conditions (a)-(g) sont satisfaites pour $m = 1$.

Supposons maintenant les recouvrements $\mathfrak{A}_i$ et les fonctions f_s^i définies pour $i < m$.

Pour chaque $i < m$ et $s = 1, \ldots, k_i$ soit

$$A_{s,m,k}^i = (f_s^i)^{-1}\left(\left(\frac{k-1}{2^{m-i+2}}, \frac{k+1}{2^{m-i+2}}\right)\right) \qquad (k = 2, \ldots, 2^{m-i+2}-2),$$

$$A_{s,m,1}^i = (f_s^i)^{-1}\left(\left[0, \frac{2}{2^{m-i+2}}\right)\right),$$

$$A_{s,m,2^{m-i+2}-1}^i = (f_s^i)^{-1}\left(\left(\frac{2^{m-i+2}-2}{2^{m-i+2}}, 1\right]\right).$$

$\mathfrak{B}_{s,m}^i = \{A_{s,m,1}^i, \ldots, A_{s,m,2^{m-i+2}-1}^i\}$ est un recouvrement de X. Pour un i fixé il existe k_i recouvrements $\mathfrak{B}_{s,m}^i$. Soit maintenant $\mathfrak{D}^m = \{O_i^m\}$ un recouvrement fini de X de diamètre $\leqslant 1/m$, posons [2]:

$$\mathfrak{A}_m^* = \mathfrak{D}^m \wedge \mathfrak{B}_{1,m}^1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}_{k_1,m}^1 \wedge \mathfrak{B}_{1,m}^2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{B}_{k_{m-1},m}^{m-1} \wedge \Phi_1^{-1}(\mathfrak{A}_{m-1}) \wedge \ldots \wedge \Phi_{m-1}^{-1}(\mathfrak{A}_{m-1})$$

(les $\Phi_i^{-1}(\mathfrak{A}_{m-1})$ sont évidemment des recouvrements de X) et soit $\mathfrak{A}_m = \{U_1^m, \ldots, U_{k_m}^m\}$ un recouvrement de rang $\leqslant n$ contenu dans $\mathfrak{A}_m$. Si les fonctions f_i^m sont définies comme pour le cas $m = 1$ tous les conditions (a)-(g) seront satisfaites.

---

[2] Si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_1$ sont des recouvrements, $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{A}_1$ est le recouvrement formé des ensembles $U \cap U_1$ où $U \in \mathfrak{A}$, $U \in \mathfrak{A}_1$. Si f est une transformation de X en Y et A est un recouvrement de Y, $f^{-1}(\mathfrak{A})$ est le recouvrement de X formé des ensembles $f^{-1}(U)$, où $U \in \mathfrak{A}$.

L'ensemble des systèmes $\langle n, i, s\rangle$ étant dénombrable pour $n = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$, $s = 1, \ldots, k_i$ désignons par (n, i, s) le numéro du système $\langle n, i, s\rangle$. Posons:

$$\widetilde{\varrho}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varrho\big(\Phi_n(x), \Phi_n(y)\big) + \sum_{(n,i,s)=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(n,i,s)}} |f_s^i\Phi_n(x) - f_s^i\Phi_n(y)|$$

pour $x, y \in X$.

On voit sans peine que $\widetilde{\varrho}$ est une métrique dans X, équivalente à ϱ. Soit $\widetilde{\delta}(\mathfrak{A}_i)$ le $\widetilde{\varrho}$-diamètre du recouvrement $\mathfrak{A}_i$; nous démontrerons que $\lim_{i=\infty} \widetilde{\delta}(\mathfrak{A}_i) = 0$ ce qui fournira en même temps la démonstration du fait que X est totalement borné dans $\widetilde{\varrho}$.

En effet, étant donné un $\varepsilon > 0$ prenons un M tel que $1/2^M \leqslant \varepsilon/4$. En vertu de la continuité uniforme des fonctions Φ_k il existe un δ tel que $\varrho(x, y) < \delta$ implique $\varrho\big(\Phi_n(x), \Phi_n(y)\big) \leqslant \varepsilon/4M$ pour $n \leqslant M$; soit $1/N < \delta$. Il existe évidemment $N_1 \geqslant \sup\big(\max_{(n,i,s) \leqslant M} i+2, \max_{(n,i,s)\leqslant M} n\big)$ tel que

$$\sum_{(n,i,s)=1}^{M} \frac{1}{2^{(n,i,s)}} \cdot \frac{1}{2^{N_1 - i}} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Prenons maintenant $r \geqslant \max(M, N, N_1)$ et $x, y \in U_s^r$, par un simple calcul on obtient $\widetilde{\varrho}(x, y) \leqslant \varepsilon$ ce qu'il fallait démontrer.

Supposons maintenant $(X, \widetilde{\varrho})$ plongé, par le procédé bien connu, de façon isométrique dans un espace $\widetilde{X}$ métrique complet (cf. [3], § 29. VII). Désignons aussi par $\widetilde{\varrho}$ la métrique dans $\widetilde{X}$. X étant totalement borné, $\widetilde{X}$ est un espace compact. Les fonctions Φ_k, f_s^i, étant uniformément continues dans $\widetilde{\varrho}$, peuvent être prolongées sur X (l'identité I de X est une des fonctions Φ_k!), désignons leurs prolongements par $\widetilde{\Phi}_k, \widetilde{f}_s^i$, $k, i = 1, 2, \ldots$, $s = 1, 2, \ldots, k_i$.

Désignons maintenant:

$$\widetilde{U}_s^i = (\widetilde{f}_s^i)^{-1}\big((0, 1]\big);$$

puisqu'on a en vertu de (f), $\sum_{s=1}^{k_i} \widetilde{f}_s^i(x) \geqslant 1$,

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_i = \{\widetilde{U}_1^i, \ldots, \widetilde{U}_{k_i}^i\}$$

est un recouvrement de $\widetilde{X}$.

On a aussi $\widetilde{U}_s^i \cap X = U_s^i$ et, par (e), $\overline{\widetilde{U}_s^i} = \overline{U_s^i}$ (fermeture dans $\widetilde{X}$), d'où $\lim_{i=\infty} \widetilde{\delta}(\widetilde{\mathfrak{A}}_i) = 0$.

Si $\widetilde{U} = \widetilde{U}^i_{m_1} \cap \ldots \cap \widetilde{U}^i_{m_s} \neq 0$, il existe $x \in \widetilde{U} \cap X$, car X est dense et $\widetilde{U}$ est ouvert dans $\widetilde{X}$, on voit donc que rang $(\widetilde{\mathfrak{U}}_i) = $ rang $(\mathfrak{U}_i) \leqslant n$, ce qui achève la démonstration de notre théorème en vertu de [3], § 40. IV.

Remarques. 1. Si la famille de fonctions $\{\Phi_k\}$ est vide, on obtient du théorème de ce travail la théorème de Hurewicz sur la compactification n-dimensionnelle d'un espace métrique séparable de dimension n. La démonstration donnée ici semble plus simple que celle de Hurewicz dans [2]; elle est indépendante du théorème de plongement dans I^{2n+1} (cf. [3], § 40. VII).

2. Si les fonctions Φ_k prennent leurs valeurs dans les espaces métriques séparables Y_k le théorème reste vrai, la démonstration étant légèrement modifiée (p. ex. le premier terme de la définition de $\widetilde{\varrho}$ aura la forme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \varrho_n\big(\Phi_n(x), \Phi_n(y)\big),$$

ϱ_n étant une métrique bornée dans Y_n). Les fonctions prolongées $\breve{\Phi}_n$ prennent alors leurs valeurs dans les compactifications $\widetilde{Y}_n$ de Y_n.

3. M. C. Kuratowski a attiré mon attention sur le problème interresant d'établir la catégorie de l'ensemble des homéomorphies f de X dans I^{2n+1}, telles que $\overline{f(X)}$ soit une $\{\Phi_k\}$-compactification de X, dans l'espace $(I^{2n+1})^X$.

Travaux cités

[1] J. de Groot et R. H. McDowell, *Extension of mappings on metric spaces*, Fund. Math. 48 (1960), p. 251-263.

[2] W. Hurewicz, *Über das Verhältniss separabler Räume zu kompakten Räumen*, Proc. Acad. Amsterdam 30 (1927), p. 425.

[3] C. Kuratowski, *Topologie I, II*, Warszawa 1958 et 1952.

Reçu par la Rédaction le 30. 5. 1959

On the determining of the form of congruences in abstract algebras with equationally definable constant elements

by

J. Słomiński (Toruń)

As we know all the homomorphic images of any abstract algebra $\boldsymbol{A}$ are determined (up to isomorphisms) by the congruences in $\boldsymbol{A}$. Therefore the knowledge of the form of all congruences in $\boldsymbol{A}$ is very important. For some abstract algebras the form of congruences is already determined, e. g. in any group, ring and boolean algebra. Let $\boldsymbol{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}\rangle$, $\boldsymbol{R} = \langle R, +, -, \cdot\rangle$ and $\boldsymbol{B} = \langle B, \cup, \cap, '\rangle$ be any group, ring and boolean algebra. Every congruence $\sim$ in those algebras has one of the following forms:

1° for all x and y in G, $x \sim y$ if and only if $x \cdot y^{-1} \in N$, where N is a normal subgroup of $\boldsymbol{G}$,

2° for all x and y in R, $x \sim y$ if and only if $x + (-y) \in I$, where I is an ring-ideal in $\boldsymbol{R}$,

3° for all x and y in B, $x \sim y$ if and only if $x \cap y' \cup x' \cap y \in J$, where J is a boolean-ideal in $\boldsymbol{B}$.

The sets N, I and J are whole abstraction classes of congruence $\sim$ in $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{R}$ and $\boldsymbol{B}$ determined respectively by the unit $e = x \cdot x^{-1} = y \cdot y^{-1}$ of $\boldsymbol{G}$, the zero element $0 = x + (-x) = y + (-y)$ in $\boldsymbol{R}$ and by the boolean zero $0^* = x \cap x' \cup x' \cap x = y \cap y' \cup y' \cap y$ in $\boldsymbol{B}$. Hence it follows that every congruence $\sim$ in $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{R}$ and $\boldsymbol{B}$ has one of the following properties:

$1^{\circ\circ}$ for all x, y in G, $x \sim y$ if and only if $x \cdot y^{-1} \sim e$,

$2^{\circ\circ}$ for all x, y in R, $x \sim y$ if and only if $x + (-y) \sim 0$,

$3^{\circ\circ}$ for all x, y in B, $x \sim y$ if and only if $x \cap y' \cup x' \cap y \sim 0^*$.

The properties $1^{\circ\circ}$, $2^{\circ\circ}$ and $3^{\circ\circ}$ are very similar. We see that the ways of the determining of the form of congruences in $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{R}$ and $\boldsymbol{B}$ are analogical. J. Łoś has set the following question: Can be determined the form of congruences in every equationally definable class $\mathfrak{A}_0$ of algebras with equationally definable constant elements in an analogical way as in groups? The solution of this problem is negativ (see (5.5)).