Bündige Räume

von

H. Freudenthal (Utrecht)

Dieser Aufsatz enthält Berichtigungen, Ergänzungen und Vereinfachungen zu der Arbeit *Enden und Primenden* des Verf. (1), zitiert als EP.

1. In EP 2 betrachteten wir den Quasikomponentenraum $Q(R)$ eines separabel metrisierbaren Raumes R. Seine Punkte sind die minimalen nichtleeren Durchschnitte von Brocken von R (= Mengen, die offen und abgeschlossen sind). Die in einem Brocken enthaltenen Quasikomponenten bilden eine offene Menge von $Q(R)$, und all diese offenen Mengen bilden eine Basis von R.

In EP 2 war stillschweigend vorausgesetzt, daß $Q(R)$ ein abzählbare Basis besitzt. Es gibt aber einfache Gegenbeispiele gegen diese Annahme. Man nehme als R die durch

$$x = 0, \qquad y \text{ beliebig,}$$
$$x = \frac{1}{n}, \qquad y = m \qquad (n,\ m \text{ natürliche Zahlen})$$

definierte Teilmenge der (x, y)-Ebene.

Das Versehen macht nicht viel aus, da an R weiterhin die Forderung der Bündigkeit gestellt wird, d. h. eine Kompaktheitsforderung, die die Existenz einer abzählbaren Basis zur Folge hat. Allerdings ergibt sich aus dem Kontext nicht gleich, wie die Kompaktheit zu verstehen ist.

Die Berichtigung des Versehens hat nur kleine Änderungen im Weiteren zufolge (2). Trotzdem wollen wir einige Beweispunkte noch einmal auseinandersetzen, da wir einige wichtige Vereinfachungen anbringen können. Das geschieht hier in 4, das EP 2.1-7, 5.1-7 ersetzt.

2. In EP 1 definierten wir einen Begriff $\curlywedge$: Eine abgeschlossene Menge Z, die zwischen den offenen Mengen O, P zusammenhängt, heißt *Brücke* zwischen O und P. Eine absteigende Folge Z_n von Brücken zwischen O und P heißt *Scheinbrücke*, wenn $\bigcap Z_n \subset O \cup P$ ist. $O \curlywedge P$ bedeutet: Es gibt keine Scheinbrücke zwischen O und P.

---

(1) Fund. Math. 39 (1952), S. 189-210.

(2) Das Versehen findet sich auch in *Neuaufbau der Endentheorie* (Ann. of Math. 43 (1942), speziell S. 272-273), wo man also analog korrigiere.

Nach diesen Definitionen können O und P, die sich in einem Randpunkt berühren, in der Beziehung $\curlywedge$ stehen. Das widerspricht dem anschaulichen Sinn des $\curlywedge$, das als „entfernt von" gelesen werden soll. Es ist anschaulich besser und auch sonst zweckmäßiger, von der Scheinbrücke zu fordern, daß

$$\bigcap Z_n \subset \overline{O \cup P}\,.$$

Der Begriff $\curlywedge$ wird dann enger. Diese Verengung wurde bei den Anwendungen von $\curlywedge$ hinterdrein in EP 3.1 vollzogen. Es ist aber besser (u. a. zur Vermeidung einiger unnötigen Komplikationen), von vornherein den engeren Begriff $\curlywedge$ zugrunde zu legen. An den Sätzen und Beweisen, in denen $\curlywedge$ vorkommt, ändert sich nichts Wesentliches. Wir unterlassen es, sie zu wiederholen.

3. Man streiche in EP, S. 191, Z. 6: „zusammenhängenden". Man streiche 1.5 und 1.10, die jetzt überflüssig sind. Man ergänze im Titel von EP 3: $\tilde{\tilde{R}}$. Man ersetze in EP 3.14 $\subset$ durch $\supset$. Man ersetze in EP, S. 199, Z. 4 v. u., $\notin$ durch $\in$.

4. R sei stets separabel metrisierbar.

4.1. *Es gibt eine abzählbare Menge $\mathfrak{A}$ von Brocken von R mit der Eigenschaft: Sind $p, q \in R$ und existiert ein Brocken B von R mit $p \in B$, $q \notin B$, so existiert ein Brocken $A \in \mathfrak{A}$ mit $p \in A$, $q \notin A$* [3].

Beweis. Sei $U_1, U_2, \ldots$ eine abzählbare Basis der offenen Mengen von R, die mit zwei Mengen auch ihren Durchschnitt enthält. Sei $\mathfrak{A}_{ij}$ die Menge der Brocken B von R mit $U_i \subset B$, $U_j \cap B = \bigcirc$. Aus jedem nichtleeren $\mathfrak{A}_{ij}$ wählen wir ein Element. Das ergibt eine abzählbare Menge $\mathfrak{A}$.

Sei $p, q \in R, B$ Brocken von $R, p \in B$, $q \notin B$. Dann gibt es i, j mit $p \in U_i \subset B$, $q \in U_j \subset R \setminus B$. Also ist $\mathfrak{A}_{ij} \neq \bigcirc$. Also gibt es ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $U_i \subset A$, $U_j \cap A = \bigcirc$. Also $p \in A$, $q \notin A$.

$\mathfrak{A}$ erfüllt also das Verlangte.

4.2. *Sei $M \subset R$ und $\hat{M}$ der Durchschnitt aller M enthaltenden Brocken von R. Dann ist $\hat{M}$ bereits Durchschnitt abzählbar vieler solcher Brocken, also auch einer absteigenden Folge.*

Beweis. $R \setminus \hat{M}$ ist Vereinigung der zu M fremden Brocken, also wegen der Separabilität bereits Vereinigung abzählbar vieler. Übergang zu den Komplementen ergibt das Gewünschte.

4.3. R heißt *bündig*, wenn es eine der Eigenschaften (α), (β) besitzt:

(α) Jede absteigende Folge nichtleerer Brocken von R hat einen nichtleeren Durchschnitt.

(β) R hat nur abzählbar viel verschiedene Brocken.

[3] Siehe C. Kuratowski, *Topologie II*, 2 Aufl., Warszawa 1952, S. 93.

Wir zeigen in 4.4, daß diese Eigenschaften äquivalent sind. Bündigkeit von R bedeutet auch, daß der Quasikomponentenraum von R ein Kompaktum ist.

4.4. (α)$\to$(β): Sei $\mathfrak{A}$ wie in 4.1 bestimmt. Sei $\mathfrak{A}'$ die kleinste Menge, die alle Elemente von $\mathfrak{A}$ und mit zwei Elementen von $\mathfrak{A}$ ihren Durchschnitt und ihre Vereinigung enthält.

Sei B Brocken von $R, p \in B, \mathfrak{A}'_p$ die Menge aller A mit $p \in A \in \mathfrak{A}'$. Nach 4.1 enthält B den Durchschnitt aller $A \in \mathfrak{A}'_p$. Also gibt es eine absteigende Folge $A_1, A_2, \ldots$ mit $A_i \in \mathfrak{A}'_p \subset \mathfrak{A}'$ und $\bigcap_i A_i \subset B$. Die $A_i \setminus B$ bilden eine absteigende Folge von Brocken von R mit leerem Durchschnitt. Also gibt es ein i mit leerem $A_i \setminus B$; $A_i \subset B$.

Also gibt es zu dem Brocken B und jedem $p \in B$ ein $A_p \in \mathfrak{A}'$ mit $p \in A_p \subset B$. Sei $\mathfrak{A}'_B$ die Menge aller A mit $A \in \mathfrak{A}'$, $A \subset B$. Ihre Vereinigung ist B. Also gibt es eine aufsteigende Folge $A_1, A_2, \ldots$ mit $A_i \in \mathfrak{A}'_B \subset \mathfrak{A}'$ und $\bigcup_i A_i = B$. Die $B \setminus A_i$ bilden eine absteigende Folge von Brocken von R mit leerem Durchschnitt. Also gibt es ein $A_i = B$. Also ist $B \in \mathfrak{A}'$.

Alle Brocken von R sind bereits in dem (abzählbaren) $\mathfrak{A}'$.

(β)$\to$(α): Sei $B_1, B_2, \ldots$ eine echt absteigende Folge nichtleerer Brocken von R mit $\bigcap B_n = \bigcirc$. Wir setzen $C_n = B_n \setminus B_{n+1}$. Sei N die Menge der natürlichen Zahlen und $M \subset N$.

$$P = \bigcup_{n \in M} C_n, \qquad Q = \bigcup_{n \in N \setminus M} C_n$$

sind offen, und wegen $P \cup Q = B_1$, $P \cap Q = \bigcirc$ auch abgeschlossen. Durchläuft M alle Teilmengen von N, so durchläuft P Kontinuum viel verschiedene Brocken.

4.5. Aus 4.3-4 folgt: *Ist R bündig, so hat jede endlich gebundene Menge von Brocken einen nichtleeren Durchschnitt.*

4.6. *Seien R bündig, O und P offen in R, $O \curlywedge P$. Sei $B_1, B_2, \ldots$ eine absteigende Folge von Brocken von $R \setminus P$ mit $B_n \cap O \neq \bigcirc$. Dann ist $\bigcap_n B_n \neq \bigcirc$.*

Beweis. Wir nehmen erst an, daß ein gewisses B_i nicht zusammenhängt zwischen O und P. Dann gibt es also C und D mit

$$B_i = C \cup D, \quad (C \cup O) \cap (D \cup P) = \bigcirc\,,$$
$$C \cup O \text{ Brocken von } B_i \cup O \cup P\,.$$

Bildet man den Durchschnitt mit $B_i \cup P$, so sieht man, daß C offen ist in $B_i \cup P$; weiter ist $B_i \cup P$ offen in R, also C offen in R. Bildet man dagegen den Durchschnitt mit B_i, so sieht man, daß C abgeschlossen ist in B_i; da B_i abgeschlossen in $R \setminus P$, also auch in R ist, ist C abgeschlossen in R, also Brocken von R. Also sind die $B_n \cap C$ absteigende Brocken von R, ferner $(B_n \cap C) \cap O = B_n \cap (C \cap O) = B_n \cap (B_i \cap O) = (B_n \cap B_i) \cap O \neq \bigcirc$, also ist $\bigcap (B_n \cap C) \neq \bigcirc$ und daher auch $\bigcap B_n \neq \bigcirc$.

Hängen aber alle B_i zwischen O und P zusammen, so ist $\bigcap B_i \neq \bigcirc$ wegen $O \curlywedge P$.

4.7. *Seien* O, P *offen in* R, $O \cap P = \bigcirc$, A *Brocken von* $R \backslash O$, B *Brocken von* $R \backslash P$. *Dann ist* $A \cap B$ *Brocken von* R.

Beweis. $A \cup O$ und $B \cup P$ sind offen in R, also ist ihr Durchschnitt $A \cap B$ offen in R. A und B sind abgeschlossen in R, also auch ihr Durchschnitt.

4.8. *Sei* R *bündig,* P *und* P' *offen in* R, $P \cap P' = \bigcirc$. *Dann gibt es eine absteigende Folge* A_n *von Brocken von* $R \backslash P$ *mit* $P' \subset A_n$ *und mit der Eigenschaft: Ist* B *ein Brocken von* $R \backslash P$ *mit* $P' \subset B$, *und ist* O *eine offene Menge mit* $O \curlywedge P$ *und* $B \cap O = \bigcirc$, *so gibt es auch ein* n *mit* $A_n \cap O = \bigcirc$.

Beweis. Sei $\hat{P}'$ der Durchschnitt aller P' enthaltenden Brocken von $R \backslash P$. Aus 4.2 (für $R \backslash P$ statt R) erhalten wir eine absteigende Folge von Brocken A_n von $R \backslash P$ mit $\bigcap_n A_n = \hat{P}'$. Nun bilden die $A_n \backslash B$ eine absteigende Folge von Brocken von $R \backslash P$ mit leerem Durchschnitt. Nach 4.6 ist also für ein gewisses n: $(A_n \backslash B) \cap O = \bigcirc$, also wegen $B \cap O = \bigcirc$ auch $A_n \cap O = \bigcirc$.

4.9. Sei R bündig. Sei $\mathfrak{U}$ von nun an eine abzählbare Basis der offenen Mengen von R, und sei mit U_1, U_2 auch $U_1 \cap U_2$ und $U_1 \cup U_2$ in $\mathfrak{U}$. Zu jedem Paar $P, P' \in \mathfrak{U}$ mit $P \cap P' = \bigcirc$ bestimmen wir eine Folge von Brocken von $R \backslash P$ wie in 4.8. Diese bilden eine abzählbare Menge $\mathfrak{V}'$.

Dann gilt also: *Seien* $P, P' \in \mathfrak{U}$, $P \cap P' = \bigcirc$, $O \curlywedge P$. *Gibt es einen Brocken* B *von* $R \backslash P$ *mit* $P' \subset B$ *und* $B \cap O = \bigcirc$, *so gibt es auch einen Brocken* V *von* $R \backslash P$ *mit* $V \in \mathfrak{V}'$, $P' \subset V$ *und* $V \cap O = \bigcirc$.

4.10. Die Menge der Brocken von R heiße $\mathfrak{V}''$. Die Menge der $V_1 \cup V_2$ mit $V_1 \in \mathfrak{V}'$, $V_2 \in \mathfrak{V}''$ heiße $\mathfrak{V}$.

Wegen 4.4 ist $\mathfrak{V}''$, also auch $\mathfrak{V}$ abzählbar.

4.11. Φ sei wie in EP 3.1 definiert. Wir brauchen hier aber nur, daß die $f \in \Phi$ stetige reelle Funktionen in R sind mit

$$E[f < \alpha] \curlywedge E[f > \beta]$$

für alle α, β mit $\alpha < \beta$.

R sei nun immer bündig.

4.12. *Sei* $f \in \Phi$ *und* $\alpha < \beta$. *Dann gibt es ein* $U \in \mathfrak{U}$, *das*

$$U \subset E[\alpha < f < \beta]$$

erfüllt, und zu dem ein Brocken B *von* $R \backslash U$ *existiert mit*

$$E[f < \alpha] \subset B \subset E[f < \beta].$$

Beweis. Sei $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$. $E[\alpha < f < \beta]$ ist Vereinigung einer aufsteigenden Folge von $U_n \in \mathfrak{U}$.

$$\bigcap_n (R \backslash U_n) = E[f \leqslant \alpha] \cup E[f \geqslant \beta]$$
$$\subset E[f < \alpha'] \cup E[f > \beta'].$$

Wegen $E[f < \alpha'] \curlywedge E[f > \beta']$ können nicht alle $R \backslash U_n$ zwischen $E[f < \alpha']$ und $E[f > \beta']$ zusammenhängen. Für gewisses n gibt es eine Zerlegung

$$R \backslash U_n = C \cup D \quad \text{mit} \quad (C \cup E[f < \alpha']) \cap (D \cup E[f > \beta']) = \bigcirc,$$
$$C \cup E[f < \alpha'] \text{ Brocken von } (R \backslash U_n) \cup E[f < \alpha'] \cup E[f > \beta'].$$

Man bilde den Durchschnitt mit $R \backslash U_n$. Dann ist:

$$B = (C \cup E[f < \alpha'])\ \ U_n$$

Brocken von $R \backslash U_n$ und

$$E[f < \alpha] \subset B \subset E[f \leqslant \beta'] \subset E[f < \beta].$$

4.13. *Sei* $f \in \Phi$ *und* $\alpha < \beta$. *Dann gibt es ein* $V \in \mathfrak{V}$ *mit*

$$E[f < \alpha] \subset V \subset E[f < \beta].$$

Beweis. Wir wählen γ_i mit $\alpha = \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 < \gamma_4 < \beta$. Ferner P, P', B, B' mit

$$P, P' \in \mathfrak{U},\ B \text{ Brocken von } R \backslash P,\ B' \text{ Brocken von } R \backslash P',$$
$$P' \subset E[\gamma_1 < f < \gamma_2], \quad P \subset E[\gamma_2 < f < \gamma_3],$$
$$E[f < \gamma_1] \subset B' \subset E[f < \gamma_2], \quad E[f < \gamma_2] \subset B \subset E[f < \gamma_3],$$

was wegen 4.11 möglich ist.

Dann ist $P \cap P' = \bigcirc$, $P' \subset B$. Wir können 4.9 anwenden mit $O = E[f > \gamma_4]$, da $B \cap O = \bigcirc$ und $P \subset E[f < \gamma_3]$, also $\curlywedge E[f > \gamma_4]$ ist (siehe EP 1.9). Es gibt also einen Brocken V' von $R \backslash P$ mit $V' \in \mathfrak{V}'$, $P' \subset V'$ und $V' \cap O = \bigcirc$, also

$$V' \subset E[f < \beta].$$

Aus $P' \subset B$ und $P' \subset V'$ folgt:

$$(B \backslash V') \cap P' = \bigcirc.$$

Mit B und V' ist auch $B \backslash V'$ Brocken von $R \backslash P$.

Andererseits war $B' \cap P = \bigcirc$ und B' Brocken von $R \backslash P'$. Schließlich $P \cap P' = \bigcirc$.

Anwendung von 4.7 mit $P, P', B\backslash V', B'$ bzw. statt O, P, A, B ergibt (siehe 4.10)

$$V'' = (B\backslash V') \frown B' \in \mathfrak{B}''.$$

Wir setzen $V = V' \smile V''$. Dann ist (4.10) $V \in \mathfrak{B}$. Weiter ist

$$\begin{aligned} V &= V' \smile [(B\backslash V') \frown B'] \\ &= [V' \smile (B\backslash V')] \frown (V' \smile B') \\ &\supset B \frown B' \supset E[f < \gamma_1] = E[f < \alpha] \end{aligned}$$

und

$$V \subset V' \smile B' \subset E[f < \beta].$$

Reçu par la Rédaction le 5. 5. 1959

Hyperarithmetical quantifiers *

by

C. Spector (Columbus, Ohio)

Let HA be the class of hyperarithmetical functions, predicates and sets of natural numbers [4, 5]; let $(Ea)_{HA}P(a) \equiv (Ea)[a \in HA \,\&\, P(a)]$; and let "$HA$" also be an abbreviation for "hyperarithmetical".

From the proof of XXVI [5], it follows that if R is a recursive predicate then there is a primitive recursive predicate P (obtained uniformly from a Gödel number of R) such that

$$(0.1) \qquad (Ea)_{HA}(x)R(a, x, a) \equiv (a)(Ex)P(a, x, a).$$

This result is used in [1] and is proved explicitly in [7]. In the latter paper, Kleene asks whether the converse is true; i. e. given a recursive P, can a primitive recursive R be found which satisfies (0.1)? We answer this question in the affirmative (1).

The method of proof involves an analysis of the inductive definitions of the set O of Church-Kleene ordinal notations and of the two-place predicates $|a| = |b|$ and $|a| < |b|$, where $|a|$ is the ordinal corresponding to a via O and both predicates are taken to be false if either a or b is not in O. The techniques developed by Kleene in [2] and amended in [6] play an important rôle. In particular we shall employ the predicate $(x)(Ey)R(a, x, y)$ defined in § 14 of [2], which Kleene abandons in the amended version [6] (2).

1. $C(b)$ **and** Q_0**.** For each natural number b let $C(b)$ be the set defined in [2] § 13 and $V(a, b, x)$ the primitive recursive predicate such that $a \in C(b) \equiv (Ex)V(a, b, x)$. If $a = 3 \cdot 5^{(a)_2}$, let $a_n = \Phi\big((a)_2, n_O\big)$, i. e. if $a \in O$, then in a manner of speaking, $a_0, a_1, a_2, \ldots$ is the fundamental sequence whose limit is a. Let $\mathrm{Def}(a, n) \equiv [a_n$ is defined], more precisely $\mathrm{Def}(a, n) \equiv (Ey)\,T_1\big((a)_2, n_O, y\big)$.

---

* Research for this paper was conducted under a grant from the National Science Foundation, U. S. A.

(1) This answer appears as Corollary 2. Kreisel and Mostowski asked similar questions, which are answered by Corollary 1 and [6] Theorem 1.

(2) It is recommended that the reader be familiar with [2] through § 14 and [6] through § 20, and have both papers available for reference.