

Résolution d'un problème de M. Z. Zahorski sur les limites approximatives

par

L. Belowska (Łódź)

Du théorème de Young sur la symétrie de la structure d'une fonction résulte la conséquence suivante:

Pour chaque fonction $f(x)$ de la variable réelle, définie dans un certain intervalle fermé, l'ensemble de toutes les valeurs x , pour lesquelles la limite supérieure à droite est inférieure à la limite supérieure à gauche, est tout au plus dénombrable.

M. Zahorski a demandé si ce théorème reste vrai quand on y remplace les limites supérieures par les limites supérieures approximatives.

Ce travail a pour objet de résoudre le problème de M. Zahorski. Nous y montrons, en effet, qu'il est possible de trouver une fonction de la variable réelle $f(x)$, définie pour chaque x , pour laquelle l'ensemble des points, dont la limite approximative supérieure à droite est inférieure à la limite approximative supérieure à gauche, a la puissance du continu.

La construction de cette fonction se composera de 2 parties. Dans la première, on construit dans l'intervalle $[-1, 2]$ l'image géométrique d'une fonction $f(x)$ non décroissante et bornée, qui admet, en tout point d'un ensemble non dense C ayant la puissance du continu, une dérivée à droite nulle et un nombre dérivé de Dini à gauche positif. En outre, cette fonction remplit la condition de Lipschitz dans l'intervalle de définition. Dans la seconde partie de la construction on détermine, à l'aide de la dérivée de la fonction $f(x)$, la fonction caractéristique $F(x)$ d'un certain ensemble, qui représentera la fonction cherchée.

1^{re} partie de la construction

Construisons l'image de la fonction $f(x)$ comme le produit d'une suite descendante d'ensembles fermés, bornés et non vides A_n . Les ensembles A_n sont connexes, se composent d'un nombre fini de segments rectilignes et de certains quadrilatères concaves. Nous définissons les ensembles A_n par induction de la façon suivante

A_1 est le quadrilatère concave R_0 formé en joignant par des segments rectilignes les points $B(0, 1/2)$ et $C(0, 1)$ aux points $A(-1, 0)$ et $D(2, 1)$.

Nous définissons l'ensemble A_2 de la façon suivante: nous joignons par un segment rectiligne le point $A(-1, 0)$ au point $P_1(0, 7/8)$, c'est-à-dire le sommet gauche inférieure du quadrilatère R_0 au point situé sur la diagonale plus courte (de longueur m_0), à la distance de $1/4$ de sa longueur à partir de C . Le point P_1 est le sommet gauche inférieur du quadrilatère concave R_{00} contenu dans R_0 ; nous définissons les sommets restants comme il suit: deux d'entre eux sont sur une droite parallèle à l'axe y , tracée à droite de P_1 , et le quatrième sommet P_3 est situé

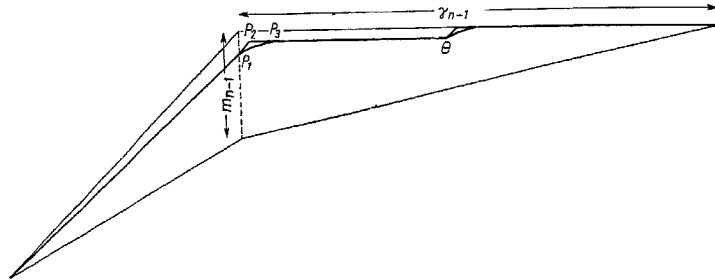


Fig. 1

à droite de cette ligne droite. Nous joignons les deux sommets situés sur la droite verticale à P_1 et P_3 . Le sommet P_2 du quadrilatère R_{00} situé plus haut sur la verticale a l'ordonnée $y = 1 - 1/16$, c'est-à-dire $1/8$ de la hauteur du quadrilatère R_0 à partir de son côté supérieur et le côté joignant P_2 à P_1 forme un angle de 45° avec le sens positif de l'axe x . Le sommet du quadrilatère R_{00} situé plus bas sur la verticale a une coordonnée y inférieure de $m_1 = m_0/2^{1+3}$ à l'ordonnée du sommet P_2 . Les ordonnées des sommets P_2 et P_3 sont égales et la distance r_1 des ces sommets est $1/8$. Le quadrilatère R_{01} est contenu dans le quadrilatère R_0 , il est congruent au quadrilatère R_{00} et les côtés correspondants de ces quadrilatères sont parallèles. R_{00} et R_{01} sont disjoints, le sommet gauche inférieur θ du quadrilatère R_{01} a la même ordonnée que P_2 et P_3 , se trouve à droite de P_3 à une distance égale à $1 - 3r_1 = 5/8$. Le côté du quadrilatère R_{01} situé le plus haut appartient au côté droit supérieur du quadrilatère R_0 . L'ensemble A_2 se compose des quadrilatères R_{00} et R_{01} et de 3 segments: le segment joignant le sommet gauche inférieur du quadrilatère R_0 au point P_1 , le segment $P_3\theta$ et le segment joignant le côté droit supérieur du quadrilatère R_{01} au sommet droit supérieur du quadrilatère R_0 . (Ce segment appartient au côté droit supérieur du quadrilatère R_0 et constitue sa moitié droite.)

Admettons que les ensembles A_1, A_2, \dots, A_n soient déjà déterminés et que chacun soit une partie du précédent. L'ensemble A_k se compose de 2^{k-1} quadrilatères $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{k-1}}$ ($\alpha_i = 0$ ou 1) et de $2^{k-1} + 1$ lignes brisées joignant ces quadrilatères pour $k > 1$, et pour $k = 1$ il se compose du quadrilatère R_0 seul. Toutes ces lignes brisées sont des images de fonctions non décroissantes et les coefficients angulaires de leurs segments ne dépassent pas 1.

Nous définissons l'ensemble A_{n+1} de la façon suivante: les lignes brisées appartenant à A_n appartiennent également à A_{n+1} et nous remplaçons chaque quadrilatère $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$ par 2 quadrilatères $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0}$ et $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}1}$ et par 3 segments joignant ces quadrilatères entre eux et avec les lignes brisées de l'ensemble A_n . Nous définissons $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0}$ ainsi (fig. 1): sur la diagonale plus courte du quadrilatère $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$ de longueur m_{n-1} , à une distance de $1/4 m_{n-1}$ de l'extrémité supérieure de cette diagonale, nous choisissons le point P_1 . Ce point est le sommet gauche inférieur du quadrilatère concave $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0}$ contenu dans $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$. Les deux sommets restants du quadrilatère $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0}$ sont sur la droite parallèle à l'axe y à droite du point P_1 tracée à une distance de $1/8 m_{n-1} = r_n/2$ de P_1 et le quatrième sommet P_3 est situé à droite de cette ligne droite. Les deux points situés sur la verticale sont joints aux points P_1 et P_3 . Le sommet P_2 , situé sur la verticale, a une ordonnée inférieure de $1/8 m_{n-1}$ à l'ordonnée du côté droit supérieur du quadrilatère $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$. Le côté du quadrilatère $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0}$ qui joint le point P_1 au point P_2 forme un angle de 45° avec le sens positif de l'axe x . Le sommet du quadrilatère concave $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0}$, situé plus bas sur la verticale, a une ordonnée y inférieure de $m_n = m_{n-1}/2^{n+3}$ à l'ordonnée y du sommet P_2 . Les sommets P_2 et P_3 du quadrilatère $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}0}$ ont des ordonnées égales et leur distance r_n est $m_{n-1}/4$.

Le quadrilatère $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}1}$ est contenu dans le quadrilatère $R_{0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}}$ et il est congruent au quadrilatère $R_{0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}0}$. Les côtés correspondants des quadrilatères $R_{0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}0}$ et $R_{0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}1}$ sont parallèles. Le sommet gauche inférieur θ du quadrilatère $R_{0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}1}$ a la même ordonnée que les sommets P_2 et P_3 du quadrilatère $R_{0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}0}$ et se trouve à droite de P_3 à une distance égale à $r_{n-1}/2 - 3r_n$. Le côté droit supérieur du quadrilatère $R_{0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}1}$ appartient au côté droit supérieur du quadrilatère $R_{0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}}$.

Nous remplaçons le quadrilatère $R_{0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}}$ par les quadrilatères $R_{0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}0}$ et $R_{0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}1}$ et par les trois segments suivants: le premier de ces segments joint l'extrémité droite de la ligne brisée de l'ensemble A_n (qui est en même temps le sommet gauche inférieur du quadrilatère $R_{0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}}$) au sommet gauche inférieur du quadrilatère $R_{0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}0}$. L'ordonnée de l'extrémité droite de ce segment dépasse celle de son extré-

mité gauche de $r_{n-1}/2 - m_{n-1}/4$. Le deuxième segment joint le sommet droit supérieur du quadrilatère $R_{0\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 0}$ au sommet gauche inférieur du quadrilatère $R_{0\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 1}$. C'est un segment parallèle à l'axe x et son ordonnée dépasse de $r_n/2$ celle de l'extrémité droite du segment I. Le troisième segment qui unit le sommet droit supérieur du quadrilatère $R_{0\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 1}$ à l'extrémité gauche de la ligne brisée de l'ensemble A_n (qui est en même temps le sommet droit supérieur du quadrilatère $R_{0\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 0}$) appartient au côté droit supérieur du quadrilatère $R_{0\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} 1}$. Il est donc parallèle à l'axe x et son ordonnée dépasse de $r_n/2$ celle du deuxième segment.

L'ensemble A_{n+1} est une partie de l'ensemble A_n . Il est composé de 2^n quadrilatères $R_{0\alpha_1 \dots \alpha_n}$ ($\alpha_i = 0$ ou 1) et de $2^n + 1$ lignes brisées joignant ces quadrilatères. De la construction des lignes brisées dans les quadrilatères particuliers il résulte qu'elles sont les images de fonctions non décroissantes et leurs coefficients angulaires ne dépassent pas 1.

Nous avons ainsi défini par induction la suite descendante d'ensembles A_n fermés, bornés et non vides.

Le produit des ensembles A_n se compose de lignes brisées et de produits infinis des quadrilatères:

$$R_0 R_{0\alpha_1} R_{0\alpha_1 \alpha_2} \dots R_{0\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \dots \quad (\alpha_i = 0 \text{ ou } 1).$$

Ces produits, en tant que produits de la suite descendante d'ensembles fermés, bornés, non vides et de diamètres tendant vers 0 sont, en vertu du théorème de Cantor, des ensembles composés d'un seul point.

Nous allons démontrer que chaque droite parallèle à l'axe y et coupant l'axe x dans l'intervalle $[-1, 2]$ a exactement un point commun avec le produit des ensembles A_n .

De la construction des ensembles A_n il s'ensuit que chaque droite verticale coupant l'axe x dans l'intervalle $[-1, 2]$ coupe chacun des ensembles A_n le long d'un segment fermé qui peut aussi être un point. En désignant le segment commun de l'ensemble A_n et de cette droite verticale par I_n , nous voyons que la longueur I_n n'est pas plus grande que le diamètre des quadrilatères de l'ensemble A_n . Par conséquent, les segments I_n forment une suite descendante de segments fermés dont les longueurs tendent vers 0, leur produit donc est un point. Toutefois c'est le produit de la droite verticale et du produit des ensembles A_n , c'est-à-dire cette droite coupe le produit des ensembles A_n exactement en un point.

Il résulte de ces considérations que le produit de la suite descendante des ensembles A_n est une image de la fonction $f(x)$. C'est une fonction non décroissante.

Pour le prouver, prenons les points x_1 et x_2 appartenant à l'intervalle $[-1, 2]$ et tels que $x_1 < x_2$. Par $A[x_1, f(x_1)]$ et $B[x_2, f(x_2)]$ nous désignerons les points correspondants de l'image de la fonction $f(x)$. Nous désignerons par A_k l'ensemble auquel appartient le plus petit des quadrilatères contenant les points A et B . Nous voyons que l'inégalité $f(x_1) \leq f(x_2)$ résulte de la construction des lignes brisées et des quadrilatères de l'ensemble A_{k+1} contenus dans le quadrilatère en question de l'ensemble A_k . En effet, si les points A et B n'étaient pas situés dans le même quadrilatère de l'ensemble A_{k+1} , alors ils seraient situés dans des quadrilatères différents ou sur des segments rectilignes (sur le même segment ou sur des segments différents) ou bien un de ces points se trouverait sur le quadrilatère de l'ensemble A_{k+1} et l'autre sur un segment rectiligne; mais le quadrilatère droit est situé plus haut que le quadrilatère gauche, chaque segment droit plus haut que le segment gauche et ces segments ont des coefficients angulaires non négatifs et, de même, chaque segment droit est situé plus haut que le quadrilatère gauche.

De la même façon nous démontrerons encore que la fonction $f(x)$ remplit, dans le segment de définition, la condition de Lipschitz avec la constante 1.

Considérons les points x_1 et x_2 appartenant à $[-1, 2]$ et les points correspondants $A[x_1, f(x_1)]$ et $B[x_2, f(x_2)]$ de l'image de la fonction $f(x)$. Désignons par A_k l'ensemble auquel appartient le plus petit des quadrilatères contenant les points A et B . De la construction des lignes brisées et des quadrilatères de l'ensemble A_{k+1} il s'ensuit que

$$\frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq 1.$$

En effet, quand les points A et B appartiennent à 2 quadrilatères différents, le plus grand coefficient angulaire de la sécante joignant A et B n'est pas plus grand que le coefficient angulaire de la droite joignant certains sommets de deux quadrilatères différents de l'ensemble A_{k+1} . Ce coefficient ne dépasse pas $1/3$. Lorsque A et B appartiennent au même segment, l'estimation est évidente (le coefficient angulaire ne dépasse pas 1). Quand un des points A ou B est situé dans le quadrilatère, le second sur le segment, ce coefficient ne dépasse pas 1 (coefficient angulaire d'un des côtés du quadrilatère de l'ensemble A_{k+1} ou A_k). Enfin, lorsque A et B appartiennent à des segments différents, ce coefficient ne dépasse pas 1, il atteint son maximum aux extrémités des segments correspondants.

Nous désignons par C la projection des produits $R_0 R_{0\alpha_1} R_{0\alpha_1 \alpha_2} \dots R_{0\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \dots$ ($\alpha_i = 0$ ou 1) sur l'axe x . C'est un ensemble non dense ayant la puissance du continu.

LEMME 1. Aux points de l'ensemble C la dérivée supérieure à gauche de Dini de la fonction $f(x)$ est au moins égale à $1/3$.

Démonstration. Il suffit de prouver qu'au point x de l'ensemble C il existe un nombre dérivé à gauche de la fonction $f(x)$ ne dépassant pas $1/3$, c'est-à-dire il existe une suite d'entourages à gauche du point x , de longueurs $h_k \rightarrow 0$, telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(x - h_k)}{h_k} \geq \frac{1}{3}.$$

Pour le démontrer, prenons le point $B[x, f(x)]$ de l'image de la fonction $f(x)$ correspondant au point x . Le point B est le produit $R_0 R_{0a_1} R_{0a_1 a_2} \dots R_{0a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$. Considérons les sommets inférieurs gauches et supérieurs droits des quadrilatères de la suite $R_0, R_{0a_1}, R_{0a_1 a_2}, \dots, R_{0a_1 \dots a_{n-1}}$. Désignons les suites des abscisses des sommets mentionnés respectivement par $\{x_{n-1}\}$ et $\{x'_{n-1}\}$. Pour suite d'entourages gauches du point x prenons la suite des intervalles de longueurs $h_{n-1} = x - x_{n-1}$ et nous démontrerons qu'elle remplit les conditions demandées.

De la construction de la fonction $f(x)$ résulte que dans chaque quadrilatère $R_{0a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$, le plus petit coefficient angulaire des droites passant par le sommet inférieur gauche de ce quadrilatère et par tout autre point de celui-ci est le coefficient de la droite passant par le sommet supérieur droit. Ce coefficient est $1/3$. Par conséquent, pour le coefficient différentiel de la fonction $f(x)$ formé au point x avec l'accroissement $h_{n-1} = x - x_{n-1}$ on a la relation

$$\frac{f(x) - f(x - h_{n-1})}{h_{n-1}} \geq \frac{f(x'_{n-1}) - f(x_{n-1})}{x'_{n-1} - x_{n-1}} = \frac{1}{3}.$$

Il en résulte l'inégalité

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(x - h_{n-1})}{h_{n-1}} \geq \frac{1}{3}.$$

LEMME 2. Aux points de l'ensemble C la dérivée à droite de la fonction $f(x)$ est nulle.

Démonstration. Considérons le point du quadrilatère $R_{0a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$ situé sur sa diagonale plus courte ou bien à droite d'elle. Nous voyons que le coefficient angulaire le plus grand de la droite joignant un tel point à un point arbitraire de l'ensemble $A_n \cdot R_{0a_1 a_2 \dots a_{n-2}}$, situé à droite du sommet supérieur gauche du quadrilatère $R_{0a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$, est le coefficient angulaire de la droite joignant le sommet supérieur droit du quadrilatère $R_{0a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$ au sommet supérieur gauche du quadrilatère $R_{0a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$. Ce coefficient est

$$(1) \quad \frac{r_{n-1}}{2 \left(\frac{r_{n-2}}{2} - \frac{5}{2} r_{n-1} \right)} = \frac{m_{n-2}}{m_{n-3} - 5m_{n-2}} = \frac{1}{2^{n+1} - 5}.$$

Prenons maintenant $x \in C$. Nous démontrerons que

$$(2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

Comme on le sait, x est, en vertu de la construction de la fonction $f(x)$, l'abscisse du point qui est le produit $R_0 R_{0a_1} \dots R_{0a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$. Considérons la suite des sommets supérieurs droits des quadrilatères du produit ci-dessus. Nous désignons par $\{x_{n-1}\}$ la suite des abscisses de ces sommets. C'est une suite décroissante. Pour démontrer l'égalité (2) il suffit d'évaluer le coefficient différentiel

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

lorsque h varie dans l'intervalle

$$(3) \quad x_n \leq x+h \leq x_{n-1}.$$

Supposons que A_n désigne l'ensemble auquel appartient le plus petit quadrilatère contenant les points $[x, f(x)]$ et $[x+h, f(x+h)]$. Le point $[x+h, f(x+h)]$ se trouvera alors dans l'ensemble $A_{n-1} \cdot R_{0a_1 \dots a_{n-2} x_{n-1}}$ à droite du sommet supérieur droit du quadrilatère $R_{0a_1 \dots a_{n-1}}$. L'abscisse de ce point appartient à l'intervalle (3). En vertu de la construction de l'ensemble A_n et de la relation (1), le coefficient différentiel de la fonction $f(x)$ au point x satisfait un accroissement h vérifiant (3), l'inégalité

$$(4) \quad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x+h) - f(x_n)}{x+h - x_n} \leq \frac{1}{2^{n+1} - 5}.$$

Étant donné que pour $h \rightarrow 0$, $\frac{1}{2^{n+1} - 5} \rightarrow 0$, et inversement, l'égalité (2)

est bien vraie et le lemme 2 est prouvé.

La construction de la fonction $f(x)$ montre que toutes ses dérivées de Dini aux points de l'intervalle $[-1, 2]$ ne dépassent pas l'unité. En outre, on voit que la fonction $f(x)$ admet presque partout dans l'intervalle de définition une dérivée non négative et limitée par 1. Désignons cette dérivée par $g(x)$.

2^e partie de la construction

Considérons dans l'intervalle $[-1, 2]$ l'ensemble des composants de l'ensemble complémentaire de C . Ce sont des segments ouverts et disjoints, dont les extrémités appartiennent à l'ensemble C . Leur nombre est dénombrable. Soit $A_n = (a_n, b_n)$ un de ces segments et d_n son milieu. Pre-

nous 2 suites infinies $\{x_{nm}\}$ et $\{x'_{nm}\}$ de points du segment (a_n, b_n) définies de la façon suivante:

$$\begin{aligned}x_{n1} &= x'_{n1} = a_n, \\x_{nm+1} &= \frac{x_{nm} + b_n}{2}, \\x'_{nm+1} &= \frac{x'_{nm} + a_n}{2}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que:

$$(5) \quad x_{nm+1} - x_{nm} = b_n - x_{nm+1}, \quad x'_{nm} - x'_{nm+1} = x'_{nm+1} - a_n.$$

Considérons les segments:

$$[x_{nm}, x_{nm+1}] = L_{nm}, \quad [x'_{nm+1}, x'_{nm}] = L'_{nm}.$$

Soit $|L_{nm}| = |L'_{nm}|$ la longueur des segments en question et k_m le plus grand nombre entier inférieur ou égal à $1/|L_{nm}| + 1$, c'est-à-dire

$$(6) \quad k_m = \left[\frac{1}{|L_{nm}|} + 1 \right].$$

Divisons chacun des segments L_{nm} et L'_{nm} en k_m segments égaux et désignons les intervalles ainsi obtenus par L_{nmi} et L'_{nmi} où m est constant, $i = 1, 2, \dots, k_m$. Dans l'intervalle L_{nmi} (les considérations seraient analogues pour l'intervalle L'_{nmi}) prenons l'intervalle concentrique L^*_{nmi} de longueur

$$(7) \quad |L^*_{nmi}| = \int_{L_{nmi}} g(t) dt,$$

où l'on a

$$(8) \quad |L^*_{nmi}| \leq |L_{nmi}|.$$

Définissons maintenant dans l'intervalle $[-1, 2]$ la fonction $F(x)$ comme il suit:

$$F(x) = \begin{cases} 1, & \text{lorsque } x \in L^*_{nmi} \text{ ou } L'_{nmi}, \\ 0 & \text{aux points restants de l'intervalle } [-1, 2]. \end{cases}$$

C'est la fonction caractéristique de l'ensemble qui est la somme des intervalles L^*_{nmi} et L'_{nmi} .

LEMME 3. Pour chaque $x \in C$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F(t) dt \right) = 0.$$

Démonstration. Soit $x \in C$.

Considérons l'expression

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F(t) dt \right|.$$

De la relation (7) et de la définition de $F(x)$ il s'ensuit que

$$\int_{L_{nmi}} g(t) dt = |L^*_{nmi}| = \int_{L^*_{nmi}} 1 dt = \int_{L^*_{nmi}} F(t) dt,$$

par conséquent, lorsque $x+h \in C$ ou $x+h$ est l'extrémité de l'intervalle L_{nmi} , on a

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F(t) dt.$$

Si, au contraire, $x+h \in \text{int} L_{nmi}$ nous obtenons l'inégalité

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F(t) dt \right| \leq 2 \frac{|L^*_{nmi}|}{|h|}.$$

Prenons maintenant le segment L_{nmi} qui contient L_{nmi} . De (5) il résulte que $|L_{nmi}| = x_{nm+i} - x_{nm} = b_n - x_{nm} \leq |h|$. De ce qui précède et de (8), (6) et (7) nous tirons ensuite

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F(t) dt \right| &\leq 2 \frac{|L^*_{nmi}|}{|h|} \leq 2 \frac{|L_{nmi}|}{|h|} \leq 2 \frac{|L_{nmi}|}{|L_{nmi}|} \\ &= \frac{2}{\left[\frac{1}{|L_{nmi}|} + 1 \right]} \leq \frac{2}{\left[\frac{1}{|h|} + 1 \right]} \leq \frac{2}{|h|} = 2|h|. \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F(t) dt \right) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

La fonction $f(x)$, étant absolument continue (nous avons démontré qu'elle remplit la condition de Lipschitz), est une intégrale indéfinie de sa dérivée, on a donc

$$\begin{aligned} \limsup_{h \rightarrow 0-} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt &= \limsup_{h \rightarrow 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \\ \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt &= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \end{aligned}$$

d'où nous obtenons, en vertu des lemmes 1 et 2,

$$(9) \quad f'_-(x) = \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt = \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F(t) dt \geq \frac{1}{3},$$

$$f'_+(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} g(t) dt = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F(t) dt = 0.$$

Soit A en ensemble mesurable et $X_A(x)$ la fonction caractéristique de cet ensemble.

Nous dirons que le point x_0 est un point de densité 0 de l'ensemble A , si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} X_A(t) dt = 0.$$

Admettons encore que $h(x)$ soit une fonction mesurable définie dans l'intervalle (a, b) .

Nous dirons que le nombre L_0 est la limite approximative supérieure à droite (à gauche) de la fonction $h(x)$ au point $x_0 \in (a, b)$, si L_0 est la borne inférieure des nombres L pour lesquels l'ensemble de tous les points $x > x_0$ ($x < x_0$) tels que $f(x) < L$ admet en x_0 un point de densité 0.

En vertu de cette définition et des relations (9), la fonction $F(x)$ admet aux points de l'ensemble C une limite approximative supérieure à droite nulle et une limite approximative supérieure à gauche égale à 1. Étant donné que l'ensemble C a la puissance du continu, nous obtenons le théorème suivant:

THEOREME. *Il existe une fonction $F(x)$ de la variable réelle, définie dans l'intervalle $[-1, 2]$, pour laquelle l'ensemble des nombres $x \in [-1, 2]$, où la limite approximative supérieure à droite est inférieure à la limite approximative supérieure à gauche, a la puissance du continu.*

Reçu par la Rédaction le 18. 4. 1959

On the extensibility of mappings, their local properties and some of their connections with the dimension theory

by

J. Jaroń (Łódź)

Introduction

The relations τ and τ_0 defined by Kuratowski (see [10]⁽¹⁾, p. 252) are in a certain sense a generalization of those stated in an important theorem of Tietze ([9], p. 117) and have been applied to the characterization of the important classes of spaces distinguished by Borsuk, such as the absolute retracts (see [2], p. 159), the absolute neighbourhoods retracts (see [3], p. 222) and many others. These relations also possess a number of interesting properties (compare for instance [10] and [11]).

Special attention should be paid to the connection between the dimension of the space of arguments and the extension of the continuous mappings into an n -dimensional sphere. The above connection as well as a number of other interesting properties of the relation τ have been discussed in chapter VII of book [10] by Kuratowski, and also in his paper [11] specially devoted to these problems.

In this paper⁽²⁾ further properties of the relation τ (see section 2) — in particular its local properties — are investigated by means of a relation φ (see sections 1 and 3) specially defined for this purpose; some close and natural analogies with the theory of dimension are also discussed (see section 4). These considerations show the role of the extensibility of continuous mappings not only for the dimension of sets but also for some derivative notions, for instance: the disconnection of a space, the

(¹) The numbers in brackets refer to the bibliography at the end of the paper.

(²) This publication is a part of the dissertation presented at the University in Łódź as a Doctor's thesis in Mathematics. It has been prepared under the direction of Professor K. Kuratowski, to whom the author wishes to express his indebtedness for suggesting the problem which led to this work and the friendly care shown during its realization.

At the same time the author expresses his thanks to Professor B. Knaster for the numerous valuable remarks which he kindly made during the preparation of this paper for printing.