Некоторые обобщения теорем вложения

С. Л. Соболев (Москва-Новосибирск)

Введение

Функции многих переменных, встречающиеся в анализе, обычно трактуются как функции n-мерного вектора в Евклидовом пространстве. Однако, часто такая точка зрения не соответствует сути дела. Бывают случаи, когда роли разных независимых переменных совершенно различны и рассмотрение их всех объединенных в одном пространстве нецелесообразно. Простейшим примером именно такого рода являются, например, коэффициенты квази-линейных уравнений в частных производных 2-го порядка

$$\sum A_{ij}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, x_1, x_2, \ldots, x_n\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F .$$

Ясно, что пространственные переменные x_k играют здесь одну роль, а переменные $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$ совершенно другую. Соответственно этому и характер зависимости A_{ij} от этих переменных обычно всегда предполагают различным.

Пусть функция

$$\Phi(u_1, u_2, \ldots, u_m \mid x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

есть функция двух таких групп переменных.

При фиксированных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ она обращается в функцию m переменных и следовательно каждому вектору x из Евклидова пространства R_n отвечает некоторый элемент соответствующего функционального пространства X функций m переменных $u_1, u_2, \ldots, u_m$. Таким образом совершенно естественно рассматривать эту функцию $m+n$ переменных как функцию m переменных со значениями в функциональном пространстве X.

Основные операции анализа, дифференцирование, интегрирование и т. п. для абстрактных функций являются естественным обобщением обычных операций для функций числовых. Однако, как выяснили исследования различных авторов ([4], [5]), такое обобщение часто происходит нетривиальным образом.

В настоящей статье мы разовьём попутно понятия об интеграле от абстрактных функций путем несколько отличным от указанных авторов.

Основной целью нашего исследования является перенос на абстрактные функции некоторых вопросов функционального анализа, типа т. н. *теорем вложения*, устанавливающих поведение функций, производные которых интегрируемы с некоторой степенью $p \geqslant 1$, т. е. принадлежащих пространству $W_p^{(l)}$ (см. [1], [2]).

Как мы уже отмечали, построить для абстрактных функций операцию дифференцирования нетрудно. Однако построение нормированных Банаховых пространств типа L_p и $W_p^{(l)}$, как мы увидим, является менее тривиальной задачей и может быть выполнено разными путями.

Для того, чтобы пояснить в чем тут суть дела, сделаем несколько замечаний. Каждой суммируемой числовой функции точки $\varphi(x)$ в n-мерной области Ω можно привести в соответствие некоторую функцию множеств: её неопределенный интеграл

$$\varphi(E) = \int_E \varphi(x)\,dx\,. \tag{0.1}$$

Функция $\varphi(x)$ определяет таким образом функцию множеств, т. е. некоторое отображение множества всех L-измеримых множеств на евклидову прямую.

Обратно имея аддитивную абсолютно непрерывную числовую функцию множества $\varphi(E)$ мы всегда можем построить её производную $\varphi(x)$, связанную с $\varphi(E)$ формулой (0.1).

Поэтому $\varphi(E)$ и $\varphi(x)$ эквивалентны при их рассмотрении.

Аддитивные абсолютно непрерывные числовые функции множеств также, как и соответствующие им суммируемые функции точки, образуют два изоморфные Банаховы пространства L_1. Для построения этих пространств достаточно определить в них норму: для функции точки это будет

$$\|\varphi(x)\|_{L_1} = \int_\Omega |\varphi|\,dx\,, \tag{0.2}$$

а для функции множеств, соответственно:

$$\|\varphi(E)\|_{L_1} = \sup_{E_1, E_2} [\varphi(E_1) - \varphi(E_2)]\,, \tag{0.3}$$

где E_1 и E_2 пробегают произвольные измеримые множества.

Аналогично можно нормировать важные в приложениях подпространства L_p $(p \geqslant 1)$ пространства L_1 при помощи формул:

$$\|\varphi(x)\|_{L_p} = \Big[\int_\Omega |\varphi|^p\,dx\Big]^{1/p} \tag{0.4}$$

или

$$\|\varphi(E)\|_{L'_p} = \sup \frac{\left|\int \psi(x)\,d\varphi(E)\right|}{\|\psi\|_{L_{p'}}}\,, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,, \tag{0.5}$$

где $\psi(x)$ пробегает всевозможные ступенчатые функции, принимающие лишь конечное число значений (для таких функций интеграл в числителе имеет очевидный смысл), а $\|\psi\|_{L_{p'}}$ определено формулой (0.4).

Изоморфизм двух пространств L_p и L'_p при законе соответствия выражаемом формулой (0.1) вначале непосредственно устанавливается не для всех функций, а лишь для $\varphi(x)$ принадлежащих некоторому всюду плотному множеству, а именно для ступенчатых функций, принимающих лишь конечное число значений.

Правая часть формулы (0.1) представляет таким образом некоторый оператор действующий в пространстве числовых суммируемых функций точки, значения которого принадлежат пространству функций множеств. Этот оператор определенный на некотором множестве числовых функций распространяется на любые суммируемые функции. Это позволяет нам, между прочим, подойти с новой точки зрения к понятию интеграла, совпадающему теперь с $\varphi(E)$.

Для абстрактных функций формулы (0.2) и (0.3) равно как и (0.4) и (0.5) обобщаются вполне естественно, но, как мы увидим ниже, они не будут равносильными, ибо нормы определенные ими уже не будут совпадать и даже не будут эквивалентными. Эти нормы связаны с двумя аспектами абсолютной сходимости. Важное свойство абсолютно сходящихся интегралов от числовых функций, т. е. таких, для которых суммируемы их абсолютные величины также как и свойство абсолютно сходящихся числовых рядов, состоит в независимости их величины (или суммы ряда) от порядка интегрирования или суммирования. Как только множество E_n достаточно близко к E (например по мере в случае Лебега) или как только сложено достаточно много членов ряда, интеграл или сумма будет сколь угодно мало отличаться от своего предельного значения. Эта независимость от порядка для числовых функций или рядов равносильна сходимости сумм абсолютных величин. Но, уже ряды, члены которых суть элементы Банахова пространства X могут обладать этим свойством без того, чтобы ряды из их норм сходились. Укажем простейший пример:

Пусть пространство X есть l_2, т. е. пространство последовательностей со сходящейся суммой квадратов. Обозначим через $i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots$ орты, т. е. векторы вида $(0, 0, 0, \ldots, 0, \overset{k}{1}, 0, \ldots)$.

Ряд

$$\sum \frac{i_k}{k} \tag{0.6}$$

не будет сходится абсолютно в обычном смысле, так как сумма норм его членов растет неограничено. Однако эта сумма не зависит от порядка слагаемых так как норма суммы любого числа его членов, стоящих достаточно далеко будет сколь угодно мала:

$$\Big\| \sum_{k_s>N} \frac{i_{k_s}}{k_s} \Big\| \leqslant \Big[\sum_{i=N}^{\infty} \frac{1}{i^2} \Big] < \varepsilon \, .$$

В следующих параграфах мы будем изучать интегралы и функции множеств с нормами (0.3) и (0.5), являющиеся обобщением таких „абсолютно сходящихся" интегралов.

Наше исследование в части интегрирования примыкает к некоторым более ранним работам. В своей статье, посвященной интегралам об абстрактных функций С. Бохнер (S. Bochner) используя норму

$$\|\varphi\|_{B_1} = \int \|\varphi(x)\|_X \, dx,$$

обобщающую (0.2), строит интеграл от абстрактных функций точки $\varphi(x)$, распространяя этот оператор интегрирования (0.1).

Другой способ построения интеграла, более общий, использующий другую идею предложен И. М. Гельфандом [5].

При помощи формулы

$$(0.8) \qquad \varphi(E) = \int_E \varphi(x)\, dx$$

можно построить образ полученного Бохнером пространства функций B_1 в совокупности абстрактных функций множеств $\varphi(E)$. Рассмотрим теперь этот вопрос по иному. Введем в множество функций $\varphi(E)$ норму $\| \, \|_{\Phi_1}$ при помощи формулы

$$(0.9) \qquad \|\varphi\|_{\Phi_1} = \sup_{E_1, E_2} \|\varphi(E_1) - \varphi(E_2)\|_X$$

являющуюся естественным обобщением (0.3).

Тем самым, мы выделим из совокупности аддитивных абстрактных функций множеств Банахово пространство Φ_1. Оказывается, что это пространство не совпадает с образом B_1 даваемым формулой (0.7). Для функций $\varphi(E)$ и $\varphi(x)$, связанных (0.7) будет иметь место неравенство:

$$(0.10) \qquad \|\varphi(E)\|_{\Phi_1} \leqslant \|\varphi(x)\|_{B_1} \, .$$

При соответствующем определении норм B_p и Φ_p формулами

$$(0.11) \qquad \|\varphi(x)\|_{B_p} = \Big[\int \|\varphi(x)\|^p dx \Big]^{1/p} ,$$

$$(0.12) \qquad \|\varphi(E)\|_{\Phi_p} = \sup \frac{\|\int \psi(x)\, d\varphi(E)\|_X}{\|\psi(x)\|_{L_{p'}}} , \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

устанавливается аналогичное неравенство и для этих норм

$$(0.13) \qquad \|\varphi(E)\|_{\Phi_p} \leqslant \|\varphi(x)\|_{B_p} \, .$$

В настоящей статье будет показано, что образ пространства функций B_p $(p \geqslant 1)$ определяемый (0.7) будет существенно уже пространства функций множеств из Φ_p, т. е. что в Φ_p содержатся элементы, не являющиеся образом никаких элементов из B_p.

Более того, если мы интродуцируем на функциях точки $\varphi(x)$ норму при помощи отображения (0.7) перенеся в него норму Φ_p (это как и раньше, всегда можно сделать для ступенчатых функций), то мы не сможем получить из этих функций $\varphi(x)$ полное пространство без введения идеальных элементов. Отсюда сразу видно, что естественный класс объектов, для которых мы будем строить нашу теорему, есть именно класс абстрактных функций множеств.

Задачей настоящей статьи является построение функциональных пространств Φ_p и $\Psi_p^{(l)}$ абстрактных функций множеств, аналогичных пространствам L_p и $W_p^{(l)}$, норма которых строится по формулам (0.8) и (0.11), и установление для них теорем вложения, аналогичных теоремам для числовых функций.

Вначале мы займемся анализом некоторых важных свойств абстрактных функций множеств.

§ 1. Основное функциональное пространство

1. Несколько теорем о непрерывных абстрактных функциях. Пусть дано метрическое пространство $\boldsymbol{P}$, в котором определено расстояние между элементами

$$(1.1) \qquad \varrho(\alpha, \beta) = \varrho(\beta, \alpha) \, .$$

Функция $\varrho(\alpha, \beta)$ предполагается положительной и удовлетворяющей условию треугольника:

$$(1.2) \qquad \varrho(\alpha, \gamma) \leqslant \varrho(\alpha, \beta) + \varrho(\beta, \gamma) \, .$$

Дана еще абстрактная функция $F(\alpha)$ определенная на множестве Ω элементов $\boldsymbol{P}$, со значениями из Банаховского пространства X.

Функция $F(\alpha)$ называется *равномерно непрерывной* на Ω если каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно назвать такое $\delta(\varepsilon)$ что при

$$\varrho(\alpha, \beta) < \delta(\varepsilon)$$

справедливо неравенство

$$(1.3) \qquad \|F(\alpha) - F(\beta)\|_X < \varepsilon \, .$$

Произвольная такая функция $\delta(\varepsilon)$ называется *модулем непрерывности* для $F(\alpha)$. Для абстрактных функций равномерно непрерывных справедливо несколько теорем, обычно доказываемых для непрерывных числовых функций.

Мы укажем здесь эти теоремы не приводя их доказательства, вполне повторяющее известные.

Множество функций $\{F(\alpha)\}$ мы будем называть *равностепенно непрерывным*, если они имеют общий модуль непрерывности, под которым понимается произвольная функция $\delta(\varepsilon)$ удовлетворяющая условию (1.3) для всех $F(\alpha) \in \{F(\alpha)\}$.

Для равномерно сходящейся последовательности равномерная непрерывность предельной функции и равностепенная непрерывность последовательности равносильны.

Теорема 1. *Предельная функция $F_0(\alpha)$ равномерно сходящейся последовательности $F_k(\alpha)$ равностепенно непрерывных функций будет равномерно непрерывной.*

Теорема 2. *Равномерно сходящаяся последовательность $F_k(\alpha)$ функций равномерно непрерывных равностепенно непрерывна. Из сходимости всюду на компактном в себе множестве и равностепенной непрерывности следует равномерная сходимость.*

Теорема 3. *Равностепенно непрерывная последовательность $F_k(\alpha)$, сходящаяся всюду на множестве E компактном в себе, т. е. замкнутом и содержащем конечную ε-сеть при любом ε, сходится равномерно.*

Теорема 4. *Непрерывная функция $F(\alpha)$ на замкнутом компактном множестве E ограничена на нем и достигает там максимума своей нормы.*

Теорема 5. *Функция $F(\alpha)$ непрерывная на замкнутом компактном в себе множестве E будет там равномерно непрерывна.*

Теорема 6. *Функция $F(\alpha)$, заданная на всюду плотном множестве E в метрическом пространстве $\mathbf{P}$ и равномерно непрерывная на нем, может быть непрерывно продолжена на все пространство и притом единственным образом.*

Доказательство этой теоремы не представляет труда. Достаточно установить, что для сходящейся к α_0 последовательности точек α_k множество значений $F(\alpha_k)$ сходится в себе и определяет $F(\alpha_0)$. Непрерывность построенной функции устанавливается элементарно.

2. Рассмотрим некоторое измеримое множество Ω n-мерного евклидова пространства, и пусть $\varphi(E)$ некоторая абстрактная функция множеств со значениями из векторного Банахова пространства X, определенная на всех множествах E измеримых по Лебегу, являющихся частью Ω. Функцию $\varphi(E)$ будем считать *конечно аддитивной*. Это обозначает, что для двух любых множеств E_1 и E_2 без общих точек справедливо равенство

(1.4) $$\varphi(E_1)+\varphi(E_2)=\varphi(E_1 \cup E_2)\,.$$

Из (1.3) следует, что для пустого множества O

$$\varphi(0) = \theta\,,$$

где θ обозначает нулевой элемент в пространстве X.

Мы будем ниже рассматривать не одну индивидуальную функцию множеств, а их множества. При этом для того, чтобы не возникло недоразумений, мы будем обозначать через $\varphi(E)$ элемент пространства X, являющийся значением φ при заданном или переменном E.

Символом φ будем обозначать данную функцию множеств целиком, т. е. данное отображение всех измеримых по Лебегу множеств на пространство X.

Для множества функций φ, рассматриваемого нами, очевидным образом определяются сложение и умножение на постоянную.

Многообразие Φ всех аддитивных абстрактных функций множеств есть таким образом векторное многообразие. Нулем в этом многообразии будет служить функция тождественно равная нулевому элементу в X.

Из многообразия Φ выделяется нормированное многообразие Φ^*, если ввести в него какую-либо норму $\|\varphi\|_{\Phi^*}$, подчиненую обычным аксиомам нормы:

(1.5)
1. $\|a\varphi\|_{\Phi^*} = |a|\,\|\varphi\|_{\Phi^*}$.
2. $\|\varphi_1+\varphi_2\|_{\Phi^*} \leqslant \|\varphi_1\|_{\Phi^*}+\|\varphi_2\|_{\Phi^*}$.
3. $\|\varphi\|_{\Phi^*} > 0$, если φ не тривально постоянная равная нулю.
4. Из $\|\varphi\|_{\Phi^*} = 0$ следует $\varphi \equiv \theta$.

Допустим, что для выбранной таким образом нормы выполняется *условие полноты*, т. е. каждая сходящаяся в себе по норме $\|\varphi\|_{\Phi^*}$ последовательность φ_k имеет предел: иначе говоря, из

$$\|\varphi_k-\varphi_l\|_{\Phi^*} < \varepsilon \quad \text{при} \quad k,\, l > N_1(\varepsilon)$$

следует существование φ_0 такого, что

(1.6) $$\|\varphi_k-\varphi_0\|_{\Phi^*} < \varepsilon \quad \text{при} \quad k > N_1(\varepsilon)\,.$$

Тогда Φ^* будет в свою очередь Банаховым пространством. Одной из простейших норм Φ^* может служить равномерная норма

(1.7) $$\|\varphi\|_M = \sup_E \|\varphi(E)\|_X\,.$$

Многообразие всех аддитивных абстрактных функций множеств с конечной нормой $\|\varphi\|_M$ будет линейным Банаховым пространством.

В самом деле выполнение четырех аксиом (1.5) очевидно. Покажем полноту пространства M с этой нормой. Для любого множества E_1 из сходимости

φ_k в себе по норме $\|\varphi\|_M$ и полноты Банахова пространства X следует существование предела

$$\varphi_0(E_1) = \lim_{k\to\infty} \varphi_k(E_1)$$

равно как и ограниченность его по норме.

Предел $\varphi_0(E_1)$, как легко проверить, будет аддитивной функцией E_1. На некоторых линейных многообразиях Φ^* из Φ может быть определена еще какая-либо иная норма $\| \|_{\Phi^*}$.

Условимся называть норму $\|\varphi\|_{\Phi^*}$ *подчиненной норме* $\|\varphi\|_M$, если существует постоянная A такая, что

$$\|\varphi\|_M \leqslant A\|\varphi\|_{\Phi^*}. \tag{1.8}$$

Если $\|\varphi\|_\Phi$ подчинена $\|\varphi\|_M$, то из сходимости последовательности по норме Φ следует ее сходимость по норме M. Подчиненная норма определяется, вообще говоря, на более узком многообразии.

З а м е ч а н и е. Любое многообразие Ψ^* из Φ, на котором всюду определена норма $\| \|_\Phi$, подчиненная $\| \|_M$ может быть замкнуто по норме $\| \|_\Phi$ и дополнено до линейного пространства $\Psi\subset\Phi$. По норме $\| \|_M$ многообразие Ψ полученное таким образом, как известно, может не быть замкнутым.

Докажем эти утверждения. Покажем сначала, что для всякой последовательности φ_k, сходящейся в себе в смысле нормы Φ, существует предельный элемент в смысле нормы M. Это следует из оценки

$$\|\varphi_k-\varphi_l\|_M \leqslant A\|\varphi_k-\varphi_l\|_\Phi$$

и из полноты пространства Φ по норме M.

Для такого предельного элемента φ_0 можно определить в свою очередь норму $\|\varphi_0\|_\Phi$. В самом деле из аксиомы треугольника имеем

$$\|\varphi_k\| \leqslant \|\varphi_k-\varphi_l\|_\Phi+\|\varphi_l\|_\Phi,$$

откуда и из симметричного неравенства: $|\,\|\varphi_k\|-\|\varphi_l\|\,|<\varepsilon$.

Таким образом $\|\varphi_k\|_\Phi$ должна стремиться к конечному пределу, который может быть лишь один для всех сходящихся в себе φ_k допускающих объединение в одну последовательность. Припишем φ_0 норму

$$\|\varphi_0\|_\Phi = \lim \|\varphi_k\|_\Phi. \tag{1.9}$$

Элементы вида $\alpha_1\varphi_0^{(1)}+\alpha_2\varphi_0^{(2)}$, где $\varphi_0^{(1)}$ и $\varphi_0^{(2)}$ суть пределы двух сходящихся в $\| \|_\Phi$ последовательностей, всегда также являются пределами сходящихся последовательностей. Для них определяется норма

$$\|\alpha_1\varphi_0^{(1)}+\alpha_2\varphi_0^{(2)}\| = \lim \|\alpha_1\varphi_k^{(1)}+\alpha_2\varphi_k^{(2)}\|. \tag{1.10}$$

Следовательно, построенное расширение Ψ^* само будет линейным.

Предельный переход дает нам аксиому треугольника и другие свойства нормы для Ψ.

Наконец, некоторые последоватдльности сходящиеся в себе в смысле $\| \|_M$ и принадлежащие Ψ могут и не быть сходящимися в смысле $\| \|_\Phi$.

Пополняя Ψ, мы не будем вводить при этом никакого предельного элемента для них и значит их предел существующий в смысле $\| \|_M$, может не принадлежать Ψ, откуда вытекает последнее из наших утверждений о том, что множество с нормой $\| \|_\Phi$ может не быть замкнутым в $\| \|_M$. Впоследствии мы введем несколько таких норм $\| \|_\Phi$, подчиненных норме $\| \|_M$ и изучим некоторые их свойства.

Множество всех множеств E, измеримых по Лебегу, лежащих в Ω, можно рассматривать как метрическое пространство, введя в него соответствующую метрику.

Положим $\varrho(E_1, E_2) = m(E_1\leftrightarrow E_2) \equiv m(E_1\cup E_2 \setminus E_1\cap E_2)$.

Функцию $\varrho(E_1, E_2)$ — меру т. н. симметрической разности двух множеств будем считать расстоянием между этими двумя множествами. Нетрудно проверить, что все аксиомы расстояния будут при этом выполнены. Среди функций $\varphi(E)$ из Φ можно выделить таким образом множество непрерывных функций.

Замыкание линейного многообразия непрерывных функций по норме $\| \|_M$ очевидно снова приводит к непрерывным функциям. Это следует из теоремы 1, так как сходимость по норме $\| \|_M$ есть равномерная сходимость. Очевидно, что замыкание по любой норме подчиненной M также приводит к непрерывным функциям.

3. Рассмотрим некоторое нормированное пространство функций множеств $\varphi(E)$. Условимся опять каждую такую функцию, рассматриваемую как элемент Φ^*, обозначать символом φ сохраняя знак $\varphi(E)$ для обозначения того элемента из X который отвечает данному конкретному или переменному E_0.

В соответствие каждой функции φ определим новую абстрактную функцию $\varphi(E, E_1)$ двух переменных множеств формулой

$$\varphi(E, E_1) = \varphi(E\cap E_1). \tag{1.11}$$

Значения этой функции для фиксированного E_1 будут функциями от E, т. е. элементами Φ^*. Обозначим эту новую функцию множества E_1 со значениями из Φ^* через $\psi_\varphi(E_1)$ и будем говорить, что $\varphi(E)$ *порождает* $\psi_\varphi(E_1)$ *при помощи пересечения*.

Как мы уже условились ранее, $\psi_\varphi(E_1)$ будет обозначать элемент пространства Φ^*, получаемый при заданном или переменном E_1 при помощи функции φ из формулы (1.11). В том случае, когда нас будет интересовать не индивидуальная зависимость от E_1, некоторого элемента Φ^*, а целое множество таких зависимостей или отображений множества измеримых множеств на Φ^*, мы будем употреблять просто символ ψ_φ.

Теорема 7. *Множество Φ^* порождает при помощи пересечения множество абстрактных функций $\psi_\varphi(E_1)$, определенных для любых измеримых E_1 из Ω и удовлетворяющих двум условиям:*

(а) *$\psi_\varphi(E_1)$ конечно аддитивны по переменной E_1;*

(б) *$\psi_\varphi(E, E_1) = \theta$, где θ нулевой элемент X_1 на всех E, для которых $E \cap E_1$ пусто.*

Обратно, всякая функция $\psi(E_1)$, со значением из Φ^*, удовлетворяющая (а) *и* (б) *сама порождается функцией множеств $\varphi(E)$ из Φ^*, равной значению $\psi_\varphi(E_1)$ при $E_1 = \Omega$*

$$\varphi = \psi_\varphi(\Omega) \tag{1.12}$$

при помощи пересечения.

Докажем эту теорему. Доказательство прямого утверждения очевидно. Аддитивность по E_1 следует из соотношения

$$E \cap (E_2 \cup E_3) = (E \cap E_2) \cup (E \cap E_3)$$

и аддитивности функции $\varphi(E)$.

Из замечания о том, что $\varphi(E) = \theta$ при пустом $E \cap E_1$, следует утверждение (б).

Докажем обратное утверждение теоремы. Пусть дано $\psi(E_1)$. Рассмотрим функцию $\varphi(E)$, определенную (1.12) и построим ей в соответствие функцию $\psi_\varphi(E_1)$ по формуле (1.11).

Для удобства значение функции $\psi_\varphi(E_1)$ для данного E обозначим как и ранее через $\varphi(E, E_1)$. Это будет элемент Φ^*, если E рассматривать как переменное.

Покажем, что $\psi_\varphi(E_1)$ совпадает с $\psi(E_1)$.

В самом деле, для всякого E

$$\begin{aligned}\psi(E, E_1) &= \psi(E, E_1 \cap E) + \psi(E, E_1 \setminus E_1 \cap E) = \\ &= \psi(E_1 \cap E, E_1 \cap E) + \psi(E \setminus E_1 \cap E, E_1 \cup E) + \psi(E, E_1 \setminus E_1 \cap E),\end{aligned}$$

но $\psi(E, E_1 \setminus E_1 \cap E) = \theta$ и $\psi(E_1 \cap E, E \setminus E_1 \cap E) = \theta$, ибо $E \cap (E_1 \setminus E_1 \cap E)$ и $(E / E_1 \cap E) \cap (E_1 \cap E)$ пустые множества.

Следовательно

$$\psi(E, E_1) = \psi(E_1 \cap E, E_1 \cap E). \tag{1.13}$$

Далее

$$\psi(E_1 \cap E, \Omega) = \psi(E_1 \cap E), \Omega \setminus E_1 \cap E) + \psi(E_1 \cap E, E_1 \cap E) = \psi(E_1 \cap E, E_1 \cap E)$$

и значит

$$\psi(E_1, E) = \psi(\Omega, E_1 \cap E); \tag{1.14}$$

вместе с (1.13) это и доказывает теорему.

Функция $\psi_\varphi(E_1)$ является абстрактной функцией со значением из некоторого нормированного линейного многообразия Φ^*, заданной в метрическом пространстве Y.

Мы будем говорить, что $\varphi(E)$ *абсолютно непрерывна в норме* $\| \|_\Phi$, если $\|\psi_\varphi(E_1)\|_\Phi$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малой mE_1. *Модулем* абсолютной непрерывности $\varphi(E_1)$ будем называть функцию $\delta(\varepsilon)$ удовлетворяющую условию:

Из $mE_1 < \delta(\varepsilon)$ следует

$$\|\psi_\varphi(E_1)\|_\Phi < \varepsilon. \tag{1.15}$$

Теорема 8. *Для того, чтобы функция $\psi_\varphi(E_1)$ была непрерывной на Y, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(E)$, порождающая ее при помощи пересечения, была абсолютно непрерывной.*

Докажем сначала достаточность условия теоремы.

Пусть оно выполнено. Для любых двух множеств E_1 и E_2 таких, что $\varrho(E_1, E_2) < \delta(\frac{1}{2}\varepsilon)$, получим в силу (1.15)

$$\begin{aligned}\|\psi_\varphi(E_1) - \psi_\varphi(E_2)\|_\Phi &= \|\psi_\varphi(E_1 \setminus E_1 \cap E_2) - \psi_\varphi(E_2 \setminus E_1 \cap E_2)\|_\Phi \leqslant \\ &\leqslant \|\psi_\varphi(E_1 \setminus E_1 \cap E_2)\|_\Phi + \|\psi_\varphi(E_2 \setminus E_1 \cap E_2\|_\Phi \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon;\end{aligned}$$

непрерывность $\psi_\varphi(E_1)$ доказана.

Обратно, если $\psi_\varphi(E_1)$ непрерывна, то $\|\psi_\varphi(E_1) - \psi_\varphi(0)\| \leqslant \varepsilon$ для любого E_1 такого, что $mE_1 < \delta(\varepsilon)$ и любого ε. Как доказано в предыдущей теореме, $\psi_\varphi(0) = 0$; это значит, что $\|\psi_\varphi(E_1)\|_\Phi < \varepsilon$ как только $m(E_1) < \delta(\varepsilon)$. Это и устанавливает абсолютную непрерывность φ. Теорема доказана.

Допустим еще, что рассматриваемая норма $\| \|_\Phi$ функций $\varphi(E)$ будет обладать следующим свойством. Каковы бы ни были E_1 и E_2, измеримые множества без общих точек, справедливо равенство:

$$\|\psi_\varphi(E_1) + \psi_\varphi(E_2)\|_\Phi = \|\psi_\varphi(E_1) - \psi_\varphi(E_2)\|_\Phi. \tag{1.16}$$

Такую норму мы будем называть *симметричной*.

Очевидно, например, что для неопределенных интегралов от числовых функций, интегрируемых в смысле Лебега $\varphi(E) = \int\limits_E \varphi(x)\,dx$ норма

$$\|\varphi\|_\Phi = \int\limits_\Omega |\varphi(x)|\,dx$$

будет симметричной, ибо для таких функций

$$\|\psi_\varphi(E_1) \pm \psi_\varphi(E_2)\|_\Phi = \int\limits_{E_1} |\varphi(x)|\,dx + \int\limits_{E_2} |\varphi(x)|\,dx.$$

Назовем далее некоторую норму в Φ *монотонной*, если из $E_2 \supset E_1$ следует

$$\|\psi_\varphi(E_2)\|_\Phi \geqslant \|\psi_\varphi(E_1)\|_\Phi . \tag{1.17}$$

Симметричная норма будет монотонной.

В самом деле, в соответствие E_2 и E_1, где $E_2 \supset E_1$ рассмотрим функции φ_1 и φ_2, определенные формулами

$$\varphi_1 = \psi_\varphi(E_1) - \psi_\varphi(E_2 \setminus E_2 \cap E_1) ,$$
$$\varphi_2 = \psi_\varphi(E_2) = \psi_\varphi(E_1) + \psi_\varphi(E_2 \setminus E_2 \cap E_1) .$$

По свойству симметричности, $\|\varphi_1\|_\Phi = \|\varphi_2\|_\Phi = \|\psi_\varphi(E_2)\|_\Phi$.

С другой стороны: $\psi_\varphi(E_1) = \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_2$ и следовательно

$$\|\psi_\varphi(E_1)\|_\Phi \leqslant \tfrac{1}{2}\|\varphi_1\|_\Phi + \tfrac{1}{2}\|\varphi_2\|_\Phi = \psi_\varphi(E_2)\|_\Phi ,$$

что и требовалось доказать.

Полезно отметить, что в норме $\| \ \|_M$ абсолютная непрерывность совпадает с непрерывностью $\varphi(E)$ как абстрактной функции в метрическом пространстве Y.

В самом деле, условие, что из $m(E) < \delta(E)$ вытекает $\|\varphi(E)\|_M < \varepsilon$ равносильно как легко видеть непрерывности в Y функции $\varphi(E)$. Оно в свою очередь в силу монотонности нормы $\| \ \|_M$ может быть заменено на условие $\|\varphi(E \cap E_1)\|_M < \varepsilon$ при $mE_1 < \delta(\varepsilon)$, а это последнее условие и выражает абсолютную непрерывность в метрике M.

Для монотонных норм $\| \ \|_\Phi$ справедлива теорема

Теорема 9. *Любая последовательность функций $\psi_{\varphi_k}(E_1)$, сходящаяся в себе всюду в Y, сходится равномерно.*

Доказательство этой теоремы следует из того, что

$$\|\psi_{\varphi_k}(E_1) - \psi_{\varphi_l}(E_1)\|_\Phi \leqslant \|\psi_{\varphi_k}(\Omega) - \psi_{\varphi_l}(\Omega)\|_\Phi$$

и значит при достаточно больших k и l равномерная малость левой части при любых E_1 следует из сходимости в себе последовательности $\psi_{\varphi_k}(\Omega)$.

Мы можем теперь доказать несколько теорем применяя теорию абстрактных функций в метрических пространствах к функциям $\psi_\varphi(E_1)$ порожденным функциями $\varphi(E)$ при помощи пересечения. Любое многообразие Φ^* функций φ можно замкнуть, присоединив к нему пределы любых сходящихся в себе последовательностей. Предельный переход в каждой такой последовательности, снова дает нам некоторую функцию множеств, так как из сходимости φ по норме следует сходимость в норме X последовательности $\varphi_k(E)$ для каждого E.

Теорема 10. *Замыкание по норме линейного многообразия абсолютно непрерывных (по норме Φ) функций множества также состоит из абсолютно непрерывных функций.*

В самом деле сходящаяся в себе последовательность φ_k порождает при помощи пересечения последовательность $\psi_{\varphi_k}(E_1)$, сходящуюся равномерно.

По теореме 1 предельная функция $\psi_0(E_1)$, которая будет очевидно существовать, будет равномерно непрерывной. Кроме того, для нее очевидно выполняются условия (а) и (б) теоремы 8. Следовательно, она порождается некоторой функцией $\varphi_0(E)$ абсолютно непрерывной, которая и является очевидно пределом сходящейся в себя последовательности.

Теорема доказана.

Будем говорить, что последовательность $\varphi_k(E)$ *равностепенно абсолютно непрерывна*, если у функций $\varphi_k(E)$ существует общий модуль непрерывности.

Теорема 11. *Сходящаяся по норме Φ к функции φ_0 последовательность элементов φ_k из Φ^* равностепенно абсолютно непрерывна.*

Действительно, сходимость φ_k к φ_0 по норме влечет за собою равномерную сходимость $\psi_{\varphi_k}(E_1)$ к $\psi_{\varphi_0}(E_1)$ и по теореме 2 равностепенную непрерывность φ_k. Это и обозначает равностепенную абсолютную непрерывность.

Теорема доказана.

4. Дополним область Ω до всего пространства R_n и доопределим функцию $\varphi(E)$ на любых измеримых множествах E из R_n при помощи формулы

$$\varphi(E) = \varphi(E \cap \Omega) . \tag{1.18}$$

Правая часть (1.18) определена для любых E и служит определением левой части. Вместо многообразия Y множеств из Ω мы определим φ на более широком многообразии всех измеримых множеств $\tilde{Y}$. К множеству E, рассматриваемому как множество векторов, прибавим постоянный вектор y. Мы получим новое множество $E+y$. Функцию $\varphi(E)$ мы будем называть *непрерывной по сдвигу* в норме Φ, если справедливо следующее: существует такая функция $\delta(\varepsilon)$ положительная для всех положительных ε и называемая *модулем непрерывности*, что из $|y| < \delta(\varepsilon)$ следует

$$\|\varphi(E+y) - \varphi(E)\|_\Phi < \varepsilon . \tag{1.19}$$

В соответствии данной функции множеств $\varphi(E) \in \Phi$ построим абстрактную функцию точки $Z_\varphi(y)$ со значениями из Φ следующим образом.

Пусть

$$Z_\varphi(E|y) = \varphi(E+y) \tag{1.20}$$

абстрактная функция измеримого множества E и переменной точки y. При фиксированном y она представляет собою элемент Φ. Изменяя y, мы будем получать различные элементы Φ. Эту функцию точек y со значениями из Φ мы будем называть $Z_\varphi(y)$. Мы будем говорить, что функция $\varphi(E)$ *порождает функцию $Z_\varphi(y)$ при помощи сдвига.*

Имея абстрактную функцию $Z_\varphi(y)$ мы всегда можем восстановить функцию двух переменных $Z_\varphi(E|y)$ как значения принимаемые $Z_\varphi(y)$ при заданном E. Справедлива теорема

Теорема 12. *Для абстрактной функции $Z_\varphi(y)$ порожденной функцией $\varphi(E)$ при помощи сдвига, справедливы равенства*

$$(1.21)\qquad Z_\varphi(E-y|y) = Z_\varphi(E|0)\,, \qquad Z_\varphi(E|0) = Z_\varphi(\Omega \frown E|0)\,.$$

Обратно, всякая функция $Z(y)$, удовлетворяющая условиям (1.21) *порождается при помощи сдвига функцией*

$$(1.22)\qquad \varphi(E) = Z(E|0)\,.$$

Доказательство этой теоремы очевидно. Действительно, вычисляя $Z_\varphi(E-y|y)$, получим по определению из (1.20)

$$Z_\varphi(E-y|y) = Z_\varphi(E|0)\,.$$

Первая формула (1.21) доказана. При этом вторая формула (1.21) очевидна. Обратно, пусть $Z(E|y)$ удовлетворяет (1.21); определим $\varphi(E)$ формулой (1.21) и построим $Z_\varphi(y)$.

По определению, пользуясь (1.21), получим

$$(1.23)\qquad Z_\varphi(E|y) = Z(E+y|0)\,.$$

Но, в силу (1.21)

$$(1.24)\qquad Z(E+y|0) = Z(E|y)\,.$$

Из (1.23) и (1.24) следует

$$(1.25)\qquad Z_\varphi(E|y) = Z(E|y).$$

Свойство (1.21) говорит о том, что $\varphi(E)$ удовлетворяет (1.18). Формулы (1.22) и (1.25) доказывают нашу теорему.

Может случиться опять, что в пространстве $\varphi(E)$ была определена некоторая норма $\|\varphi\|_\Phi$.

Мы будем называть эту норму *инвариантной*, если она может быть распространена на функции множеств, заданные на $\widehat{Y}$ и при том так, что выполняются два условия:

Условие 1.

$$(1.26)\qquad \|\varphi(E)\|_{\tilde\Phi} = \|\varphi(E)\|_\Phi$$

для всех E таких, что $\varphi(E) = \varphi(\Omega \frown E)$, где $\tilde\Phi$ новая расширенная норма.

Условие 2.

$$(1.27)\qquad \|\varphi(E+y)\|_{\tilde\Phi} = \|\varphi(E)\|_\Phi\,.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать именно инвариантную норму.

Пусть $\|\varphi(E)\|_\Phi$ обозначает именно $\|\varphi(E)\|_{\tilde\Phi}$.

Введенная нами норма выделяет сразу множество непрерывных в Φ функций $Z_\Phi(y)$ в смысле этой нормы. Как всегда функция $Z_\varphi(y)$ будет непрерывной в точке y_0, если существует функция $\delta(\varepsilon)$ называемая *модулем непрерывности* такая, что

$$(1.28)\qquad \|Z_\varphi(y_0+\Delta y_0) - Z_\varphi(y)\|_\Phi < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\Delta y| < \delta(\varepsilon)\,.$$

Теорема 13. *Функция $Z_\varphi(y)$, порожденная функцией $\varphi(E)$ при помощи сдвига, непрерывная в одной точке, равномерно непрерывна.*

В самом деле по свойству инвариантности нормы имеем

$$\|Z_\varphi(y+\Delta y) - Z_\varphi(y)\| = \|Z_\varphi(\Delta y) - Z_\varphi(0)\|$$

и значит при $|\Delta y| < \delta(\varepsilon)$ норма приращения функции будет одна и та же для всех y. Теорема доказана.

Функцию $\varphi(E)$, порождающую при помощи сдвига непрерывную функцию $Z_\varphi(y)$, мы будем называть *непрерывной по сдвигу*. Из теоремы 13 вытекает следствие.

Следствие. *Для непрерывности функции $Z_\varphi(y)$ в целом, необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(E)$ порождающая ее, была непрерывна по сдвигу.*

Доказательство мы опускаем, как очевидное.

Теоремы о непрерывных абстрактных функциях дают возможность получить некоторые результаты по теории функций множеств непрерывных по сдвигу.

Теорема 14. *Если последовательность $\varphi_k(E)$ сходится к $\varphi_0(E)$ по норме, то последовательность абстрактных функций $Z_{\varphi_k}(y)$, порожденных $\varphi_k(E)$ при помощи сдвига, равномерно сходятся к $Z_{\varphi_0}(y)$.*

Доказательство этой теоремы следует из того, что

$$\|Z_{\varphi_k}(y) - Z_{\varphi_0}(y)\| = \|\varphi_k(E) - \varphi_0(E)\| \quad \text{для любого} \quad y.$$

Теорема 15. *Сходимость последовательности $Z_k(y)$ функций удовлетворяющих* (1.21) *хотя бы в одной точке влечет за собой равномерную сходимость при всех y.*

Доказательство следует из (1.21) и инвариантности нормы.

Теорема 16. *Замыкание по норме Φ многообразия Φ^* функций $\varphi(E)$ непрерывных по сдвигу состоит из функций непрерывных по сдвигу.*

Доказывается эта теорема простым применением теоремы 15 и теоремы 2.

5. Можно, разумеется, вводить норму в пространстве функций $\varphi(E)$ различным образом. Мы упоминали уже, что можно, например, следуя Бохнеру, определить в начале многообразие Φ^*, как многообразие интегралов $\int\limits_E \varphi(x)\,dx$

от ступенчатых функций точки $\varphi(x)$ с суммируемой нормой. При этом можно взять

$$\|\varphi(E)\|_B = \int \|\varphi(x)\|_X dx \tag{1.29}$$

и замкнуть это многообразие.

Мы однако используем другие способы нормировки.

Под нормой $\|\varphi(E)\|_{\Phi_1}$ мы будем понимать

$$\|\varphi(E)\|_{\Phi_1} = \sup\{\|\varphi(E_1) - \varphi(E_2)\|\} \tag{1.30}$$

таких, что $E_1 \cup E_2 = E$, $E_1 \cap E_2$ пусто.

Очевидно, что норма $\|\ \|_{\Phi_1}$ подчинена равномерной норме $\|\ \|_M$ и даже эквивалентна ей, ибо

$$\|\varphi\|_M \leqslant \|\varphi\|_{\Phi_1} \leqslant 2\|\varphi\|_M . \tag{1.31}$$

Докажем теорему:

Теорема 17. *Для нормы $\|\varphi(E)\|_{\Phi_1}$ выполняются все аксиомы норм.*

Равенство

$$\|a\varphi\| = |a|\cdot\|\varphi\|$$

очевидно. Далее,

$$\begin{aligned}\|\varphi_1+\varphi_2\| &= \sup\|\varphi_1(E_1)+\varphi_2(E_2)-\varphi_1(E_2)-\varphi_2(E_2)\| \leqslant \\ &\leqslant \sup\left[\|\varphi_1(E_1)-\varphi_1(E_2)\|+\|\varphi_2(E_1)-\varphi_2(E_2)\|\right] \leqslant \\ &\leqslant \sup\|\varphi_1(E_1)-\varphi_1(E_2)\|+\sup\|\varphi_2(E_1)-\varphi_2(E_1)\| = \|\varphi_1\|+\|\varphi_2\| .\end{aligned}$$

Не менее очевидно и третье свойство.

Из $\|\varphi\|_{\Phi_1} = 0$ очевидно следует $\varphi = 0$. Теорема доказана.

Очевидно, что такая норма будет однородной в смысле определенном выше. Укажем еще один способ введения нормы в функции множеств.

Пусть опять $\varphi(E)$ элемент, а ω — ступенчатая числовая функция: $\omega(x) = a_i$ при $x \in E_i$. Введем функцию

$$\omega\varphi(E) = \sum a_i\varphi(E \cap E_i) . \tag{1.32}$$

Рассмотрим $\|\omega(x)\|_{L_{p'}}$, где $p' = p/(p-1)$, $p > 1$ и значит $p' > 1$. Может случиться, что

$$\frac{\|\omega\varphi(\Omega)\|_X}{\|\omega\|_{L_{p'}}} < A$$

для любых ступенчатым функций ω, где A — некоторое положительное число, не зависящее от ω.

В этом случае мы будем говорить, что функция $\varphi(E)$ *принадлежит абстрактному пространству Φ_p*. Рассмотрим

$$\sup\frac{\|\omega\varphi(\Omega)\|_X}{\|\omega\|_{L_{p'}}} = \sigma(\varphi) .$$

Число σ — представляет собою положительный функционал от φ. Проверим выполнение для этого функционала основных аксиом нормы.

Теорема 18. *Имеют место свойства*

$$\sigma(a\varphi) = |a|\sigma(\varphi); \tag{1.34}$$

$$\sigma(\varphi_1+\varphi_2) \leqslant \sigma(\varphi_1)+\sigma(\varphi_2) . \tag{1.35}$$

Свойство (1.34) очевидно. Докажем свойство (1.35).

Пусть

$$\sigma(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{\|\omega_3[\varphi_1(\Omega)+\varphi_2(\Omega)]\|_X}{\|\omega_3\|_{L_{p'}}} + \varepsilon .$$

При этом

$$\begin{aligned}\sigma(\varphi_1+\varphi_2)-\varepsilon &= \frac{\|\omega_3[\varphi_1(\Omega)+\varphi_2(\Omega)]\|_X}{\|\omega_3\|_{L_{p'}}} \leqslant \frac{\|\omega_3\varphi_1(\Omega)\|_X}{\|\omega_3\|_{L_{p'}}} + \frac{\|\omega_3\varphi_2(\Omega)\|_X}{\|\omega_3\|_{L_{p'}}} \leqslant \\ &\leqslant \sup\frac{\|\omega\varphi_1(\Omega)\|_X}{\|\omega\|_{L_{p'}}} + \sup\frac{\|\omega\varphi_2(\Omega)\|_X}{\|\omega\|_{L_{p'}}} = \sigma(\varphi_1)+\sigma(\varphi_2) .\end{aligned}$$

Из справедливости этого соотношения при любых ε выводим наше неравенство. Теорема доказана.

Пользуясь $\sigma(\varphi)$ — введем новое пространство с нормой

$$\|\varphi(E)\|_{\Phi_p} = \sigma(\varphi) . \tag{1.36}$$

Замечание. Полезно заметить, что формула (1.33) может быть применена и для определения $\|\ \|_{\Phi_1}$. Для этого нужно положить

$$\|\omega\|_{L_\infty} = \sup|\omega(x)| , \tag{1.37}$$

где в вычислении sup участвуют лишь значения, принимаемые ступенчатой функцией $\omega(x)$ на множествах с положительной мерой. Доказательство основано на следующей лемме

Лемма 1. *Пусть $\omega(x) = a_i$ при $x \in E_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ или*

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i\xi_i(x) ,$$

где $\xi_i(x)$ — характеристическая функция множества E_i.

Пусть $|a_i| \leqslant 1$. В положительной функции

$$\lambda(a_1, a_2, \ldots, a_N) = \left\|\sum a_i\varphi(E_i)\right\|_X$$

переменных $a_1, a_2, \ldots, a_N$ можно заменять каждый из a_i на ± 1 так, чтобы она от этого не уменьшалась.

Для доказательства леммы достаточно заметить, что по каждому a_i функция $\| \sum a_i\varphi(E_i)\|_X$ является выпуклой и поэтому принимает свое наибольшее значение на конце промежутка изменения этой величины.

Пользуясь леммой 1, мы видим, что выражение $\| \sum a_i\varphi(E_i)\|_X$ стоящее в числителе формулы (1.33) при $|a_i| \leqslant 1$, а значит для всех ступенчатых функций таких, что $\|\omega(x)\|_{L_\infty} = 1$, может только увеличиться от замены функции некоторой другой, принимающей лишь два значения ± 1. Отсюда видно, что sup достаточно вычислять лишь для таких $\omega(x)$, а это и доказывает, что формула (1.33) равносильна (1.30).

Установим связь между $\|\varphi\|_{\Phi_1}$ и $\|\varphi\|_{\Phi_p}$.

Справедливо неравенство

$$\|\varphi\|_{\Phi_p} \geqslant \|\varphi\|_{\Phi_1} |\Omega|^{-1/p'}, \tag{1.38}$$

где $|\Omega|$ — объем области Ω. В самом деле, пусть

$$\|\varphi\|_{\Phi_1} = \|\omega\varphi(\Omega)\|_X + \varepsilon,$$

где ω — некоторая ступенчатая функция, равная $+1$ или -1, а ε — произвольно малая положительная постоянная.

Но для такой ω имеем $\|\omega\|_{L_{p'}} = |\Omega|^{1/p'}$, где $|\Omega|$ — объем области Ω, а значит

$$\|\omega\varphi\|_X = \frac{\|\omega\varphi\|_X}{\|\omega\|_{L_{p'}}} |\Omega|^{1/p'},$$

т. е.

$$\|\omega\varphi\|_X \leqslant |\Omega|^{1/p'} \sup \frac{\|\omega\varphi\|_X}{\|\omega\|_{L_{p'}}};$$

отсюда и из (1.36) следует наша теорема.

Из неравенства (1.38) в частности следует, что при $\sigma(\varphi) = 0$ функция φ равна нулю. В силу этого же неравенства $\|\varphi\|_{\Phi_p}$ подчинена $\|\varphi\|_{\Phi_1}$.

§ 2. Интегралы от абстрактных функций

1. Среди функций множеств $\varphi(E)$ особую роль в нашем исследовании будут играть такие, которые являются неопределенными интегралами от абстрактных функций. Остановимся несколько подробнее на этом вопросе.

Рассмотрим множество $\mathfrak{M}$ ступенчатых абстрактных функций, т. е. таких функций $\varphi(x)$, которые принимают лишь конечное число значений

$$\varphi(x) = a_k, \quad x \in E_k, \quad \text{где} \quad a_k \in X \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Отображение $\mathfrak{M}$ на аддитивные функции множеств называемое *оператором неопределенного интегрирования*, выражается формулой

$$\varphi(E) = \int_E \varphi(x)\,dx = \sum a_k m(E \frown E_k). \tag{2.1}$$

Множество $\mathfrak{M}^*$ полученных таким образом функций $\varphi(E)$ будет разумеется незамкнутым в данной норме B_p, $p \geqslant 1$, или Φ_p, $p \geqslant 1$. Замыкание $\mathfrak{M}^*$ содержит ряд элементов не входящих в $\mathfrak{M}^*$.

Построим замыкание оператора неопределенного интегрирования. Для этого нужно сначала выбрать каким либо образом сходимость в векторном пространстве абстрактных функций точки. Пусть такая сходимость дана. Назовем её *R-сходимостью.* Оператор интегрирования может быть распространен на те элементы $\overline{\mathfrak{M}}$ замыкания $\mathfrak{M}$, для которых имеет место R-сходимость последовательности $\varphi_k(x)$ элементов $\mathfrak{M}$ и одновременно сходимость $\varphi_k(E)$ соответственных функций множеств в норме Φ в Банаховом пространстве абстрактных функций множеств.

Замыкание такого оператора возможно лишь в том случае, если при таком определении единственным пределом для $\varphi_k(E)$ образа последовательности $\varphi_k(x)$ — сходящейся к нулю может быть нуль. При разных R-сходимостях и разных нормах Φ это свойство необходимо проверять.

Простейшей R-сходимостью является сходимость равномерная. Очевидно, что если последовательность $\varphi_k(x)$ сходится к нулю равномерно, то и последовательность $\varphi_k(E)$ сходится к нулю в любой из норм Φ_p или B_p.

Поэтому для ограниченных измеримых функций оператор интегрирования как замыкание оператора (1.36) всегда имеет смысл. Рассмотрим теперь в качестве R-сходимости сходимость почти всюду. Функции, полученные замыканием $\mathfrak{M}$ в этой сходимости называются измеримыми. Проверим, что из сходимости почти всюду к нулю последовательности $\varphi_k(x)$ из $\mathfrak{M}$ и сходимости $\varphi_k(E)$ по норме Φ_p или B_p вытекает, что пределом $\varphi_k(E)$ может быть только 0.

Лемма. *Почти везде сходящаяся последовательность измеримых функций точки $\varphi_k(x)$ будет сходиться равномерно на системе замкнутых множеств с мерой сколь угодно близкой к мере Ω.*

Приведем доказательство, слово в слово повторяющее известное для числовых функций (см. [3]). Допустим, что предельная функция для $\varphi_k(x)$ будет $\varphi_0(x)$. Рассмотрим систему множеств $E_\nu(\varepsilon)$ таких что при $x \in E_\nu(\varepsilon)$

$$\|\varphi_\nu(x) - \varphi_0(x)\| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad \nu > N.$$

Система $E_\nu(\varepsilon)$ образует очевидно при заданном ε расширяющуюся систему

$$E_{\nu+1}(\varepsilon) \supset E_\nu(\varepsilon). \tag{2.2}$$

Очевидно далее, что

$$\lim_{\nu\to\infty} mE_\nu(\varepsilon) = m\Omega.$$

Если бы это было не так для какого-нибудь ε, то нашлось бы множество $\Omega - E_\nu$ с мерой большей нуля, на котором сходимость $\varphi_k(x)$ к $\varphi_0(x)$ не имела бы места.

Каждая из последовательностей $E_\nu(1/2^k)$ $(\nu=1,2,\ldots)$ является внутренней по отношению к предыдущим, т. е. для всякого $E_\nu(1/2^k)$ при любом $s>0$ найдется такое множество $E_m(1/2^{k-s})$, что $E_\nu(1/2^k)\subset E_m(1/2^{k-s})$.

При этом существует последовательность внутренняя по отношению ко всем $E_m(1/2^s)$ с мерой стремящейся к мере Ω (см. ([3], лемма 7, лекция VI) Это значит, что, взяв достаточно большой член E_0 этой последовательности, с мерой больше $m\Omega-\delta$, мы найдем на ней достаточно большое N, так, что на E_0: $\|\varphi_k-\varphi_0\|<1/2^s$ при $k>N(s)$, что и требовалось доказать.

Теперь заметим, что если $\varphi_k(E)$ сходится к $\varphi(E)$ по норме Φ_1 (а Φ_1 — наиболее широкая из сходимостей по норме Φ_p или B_p), то в силу теорем 10 и 11 имеет место равностепенная непрерывность как $\varphi_k(E)$, так и предельной функции. Выбрав δ так, чтобы иметь $\|\varphi(E)\|_X<\varepsilon$ при $mE<\delta$, видим, что

$$\|\varphi_k(E)-\varphi(E)\|_X\leqslant\|\varphi_k(E_0)-\varphi(E_0)\|_X+\|\varphi_k(\Omega-E_0)-\varphi(\Omega-E_0)\|_X\leqslant 2\varepsilon\,,$$

что и доказывает нашу теорему.

Класс функций $\varphi(x)$, на которых определены оператор интегрирования полученный замыканием оператора (2.1) и будет классом соответственно Φ_1, Φ_p, B_1 или B_p суммируемых абстрактных функций.

Полезно доказать, что к числу суммируемых в любом смысле относятся функции непрерывные в замкнутой ограниченной области. Такие функции образуют Банахово пространство K с нормой $\|\varphi(x)\|_K=\max\|\varphi(x)\|_X$.

Для доказательства достаточно построить разбиения области на подобласти Δ_i, в которых колебание функций $\varphi(x)$ стремится к нулю и взять в качестве приближенных функций такие, которые сохраняют постоянные значения в каждой клетке некоторого разбиения. Такие функции сходятся к $\varphi(x)$ равномерно. В силу сказанного выше на них определено замыкание оператора интегрирования. Отметим, что определение Бохнера в нашем понимании есть замыкание оператора интегрирования в норме B_1 для почти всюду сходящихся функций.

Мы использовали в качестве исходного элемента ступенчатые функции. Возможен и другой путь построения неопределенных интегралов исходя из абстрактных непрерывных функций точек. Полезно наметить его основные черты.

Пусть x точка евклидова пространства R_n. Будем рассматривать непрерывные абстрактные функции заданные в области Ω и принимающие значения из Банахова пространства X.

Свойство непрерывности означает, что

$$\|\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)\|_X<\varepsilon\quad\text{при}\quad|\Delta x|<\delta(\varepsilon)\,. \tag{2.3}$$

Определим понятие об интеграле от непрерывной функции.

Рассмотрим в начале множества E_1, состоящие из конечного числа клеток некоторой кубической сетки. Такие множества мы будем называть *сеточными*.

Для каждого куба, лежащего в Ω, мы будем рассматривать какое-либо его подразделение Ξ на более мелкие кубики с помощью деления каждой стороны на 2^s частей.

Пусть Q_i^Ξ суть клетки такого подразделения $(i=1,2,\ldots)$.

Рассмотрим все значения $\varphi(x)$ в кубе Q_i^Ξ. В пространстве X эти значения образуют некоторое множество M_{i_Ξ} с наименьшей выпуклой оболочкой N_i^Ξ. Умножим по Минковскому каждое такое выпуклое множество на объем куба Q_i^Ξ, т. е. умножим каждый вектор на этот объем и сложим все выпуклые множества, соответствующие каждому Q_i^Ξ (составим множество состоящее из всех сумм по одному вектору из каждого). Сумма этих множеств образует новое выпуклое множество Λ_Ξ в пространстве X.

Допустим теперь, что некоторое новое подразделение H является дочерним подразделением для Ξ, т. е. состоит из ячеек, лежащих каждая только в одной из ячеек Ξ.

Докажем, что при этом выпуклое множество Λ_H будет частью множества Λ_Ξ.

Множество Λ_Ξ есть замыкание множества элементов вида

$$\xi^\Xi=\sum_{i=1}^{N}Q_i^\Xi(\alpha_1^{(i)}\xi_1^{(i)}+\alpha_2^{(i)}\xi_2^{(i)}+\ldots+\alpha_N^{(i)}\xi_N^{(i)})\,, \tag{2.4}$$

получаемых при всевозможных положительных $\alpha_s^{(i)}$ таких, что

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_s^{(i)}=1\,.$$

Сгруппируем в круглой скобке в (2.4) те слагаемые, которые отвечают разным ячейкам Q_j^Ξ, на которые распадается Q_i^Ξ. Мы получим:

$$\xi=\sum Q_i^\Xi[(\alpha_1^{(i)}\xi_1^{(i)}+\alpha_2^{(i)}\xi_2^{(i)}+\ldots+\alpha_{k_1}^{(i)}\xi_{k_1}^{(i)})+(\alpha_{k_1+1}^{(i)}\xi_{k_1+1}^{(i)}+\ldots+\alpha_{k_2}^{(i)}\xi_{k_2}^{(i)})+$$
$$+(\alpha_{k_2+1}^{(i)}\xi_{k_2+1}^{(i)}+\ldots+\alpha_{k_3}^{(i)}\xi_{k_3}^{(i)})+\ldots+(\alpha_{k_2+1}^{(i)}\xi_{k_2+1}^{(i)}+\ldots+\alpha_N^{(i)}\xi_N^{(i)})]\,.$$

Введя в рассмотрение $\alpha_{k_j+1}^{(i)}+\ldots+\alpha_{k_{j+1}}^{(i)}=\beta_j$ мы сможем вынести из каждой круглой скобки множитель β_s, после чего сумма получит вид:

$$\xi^\Xi=\sum_i[\beta_1Q_i^\Xi(\beta_1^{(i)}\xi_1^{(i)}+\ldots+\beta_{k_1}^{(i)}\xi_{k_1}^{(i)})+\beta_2Q_i^\Xi(\beta_{k_1+1}^{(i)}\xi_{k_1+1}^{(i)}+\ldots+\beta_{k_2}^{(i)}\xi_{k_2}^{(i)})+$$
$$+\beta_3Q_i^\Xi(\beta_{k_2+1}^{(i)}\xi_{k_2+1}^{(i)}+\ldots+\beta_{k_3}^{(i)}\xi_{k_3}^{(i)})+\ldots+\beta_rQ_i^\Xi(\beta_{k_r+1}^{(i)}\xi_{k_r+1}^{(i)}+\ldots+\beta_{k_{r+1}}^{(i)}\xi_{k_{r+1}}^{(i)})]\,.$$

Сравнивая этот вектор с вектором

$$\xi^H=\sum_j Q_j^H(\beta_1^{(j)}\xi_1^{(j)}+\beta_2^{(j)}\xi_2^{(j)}+\ldots+\beta_r^{(j)}\xi_r^{(j)})\,,$$

мы видим, что любой вектор ξ^H находится среди векторов ξ^Ξ и получается из этой формулы при $\beta_i Q_i^\Xi = Q_j^H$.

Обратное вообще говоря неверно, ибо не всякий вектор ξ^Ξ содержится среди ξ^H.

Следовательно, множество ξ^H есть часть ξ^Ξ и значит его замыкание Λ_H также является частью Λ_Ξ замыкания ξ^Ξ, что и требовалось доказать.

Для любой непрерывной функции $\varphi(x)$ с неограниченным уменьшением диаметра наибольшей ячейки Q_i подразделения Ξ, диаметр тела Λ_Ξ уменьшается неограниченно. В самом деле, этот диаметр не превосходит

$$\sum mQ_i \max_{x_1, x_2 \in Q_i} \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| < \varepsilon .$$

Следовательно при неограниченном стремлении диаметра к нулю мы получим систему вложенных одно в другое замкнутых выпуклых множеств Λ_Ξ. Очевидно, что имеется одна и только одна точка общая всем Λ_Ξ. Эту точку мы будем называть *интегралом* от $\varphi(x)$ по Ω.

Таким образом, мы можем определить еще интеграл по любому сеточному множеству, который дает нам функцию

$$\varphi(E) = \int_E \varphi(x)\, dx , \tag{2.5}$$

где E — любое множество, состоящее из суммы кубиков.

Докажем важное свойство функции $\varphi(E)$, определенной таким образом:

Функция $\varphi(E)$, определенная на сеточных множествах, абсолютно непрерывна по норме Φ_p $(p \geqslant 1)$.

Это доказывается элементарно, так как норме $\|\varphi\|_{\Phi_p}$ подчинена норма $\|\varphi\|_{B_p}$ а $\|\varphi\|_{\Phi_p}$ монотонна. Значит

$$\|\Psi_\varphi(E_1)\|_{\Psi_p}^p \leqslant \int_{E_1} \|\varphi(x)\|_X^p dx \leqslant m\|\varphi(x)\|_X^p mE_1 .$$

Каково бы ни было лебегово множество E_0, можно указать такое сеточное множество E_1, что

$$m(E_0 \setminus E_0 \cap E_1) < \varepsilon , \quad m(E_1 \setminus E_0 \cap E_1) < \varepsilon;$$

откуда следует, что система сеточных множеств плотна в метрическом пространстве Y лебеговых множеств из Ω, введенной нами выше.

Функция $\varphi(E)$ равномерно непрерывная, на всюду плотном множестве в Y может быть единственным образом дополнена до непрерывной функции на всем Y в силу теоремы 6.

Полученные $\varphi(E)$ и будут неопределенным интегралом от φ по любому измеримому множеству.

Все остальное построение проводится также, как и для ступенчатых функций. Мы получим опять тот же класс измеримых функций замыкание непрерывных при сходимости почти всюду.

Интеграл Бохнера является замыканием в смысле метрики: $\|\varphi\| = \int \|\varphi\|_X dx$ интегралов от ступенчатых функций. Метрика Бохнера подчинена рассмотренной нами, т. е. из сходимости в смысле Бохнера следует сходимость в нашем смысле.

Отсюда следует, что область значений оператора интегрования по Бохнеру есть часть области значений интегрирования в смысле Φ_1. Покажем, что это правильная часть, т. е. что абстрактная функция может не иметь интеграла в смысле Бохнера и тем не менее быть интегрируемой в нашем смысле. С целью доказать это рассмотрим небольшой пример.

Пример 1. За область Ω возьмем промежуток $0 \leqslant x \leqslant 1$ и пусть пространство X представляет собою l_2-пространство числовых последовательностей со сходящейся суммой квадратов.

Элементы l_2 суть $a(a_1, a_2, \ldots)$, причем

$$\|a\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2} . \tag{2.6}$$

Пусть i_k-элемент l_2, в котором k-ая компонента равна 1, а все остальные нули. Тогда

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k i_k . \tag{2.7}$$

Определим функцию $\varphi(x)$ со значениями из l_2 формулами

$$\begin{gathered} \varphi(x) = c_k i_k \quad \text{при} \quad 2^{-k} < x \leqslant 2^{-k+1} , \\ \varphi(0) = 0 , \quad \text{причем} \quad c_k > 0 . \end{gathered} \tag{2.8}$$

Изучим, каковы должны быть c_k для того чтобы функция $\varphi(x)$ могла быть элементом различных пространств.

a. Для того, чтобы иметь $\varphi(x) \in B_1$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int \|\varphi(x)\|\, dx < \infty;$$

это дает

$$\text{при} \quad \sum \frac{c_k}{2^k} < +\infty \quad \varphi(x) \in B_1 , \tag{2.9}$$

$$\text{при} \quad \sum \frac{c_k}{2^k} \to +\infty \quad \varphi(x) \notin B_1 . \tag{2.10}$$

б. Аналогично для принадлежности к B_2 получим:

$$\text{при} \quad \sum \frac{c_k^2}{2^k} < +\infty \qquad \varphi(x) \in B_2, \tag{2.11}$$

$$\text{при} \quad \sum \frac{c_k^2}{2^k} \to +\infty \qquad \varphi(x) \notin B_2. \tag{2.12}$$

в. Для принадлежности к Φ_1 функции $\varphi(x)$ нужно очевидно, чтобы были ограниченными нормы:

$$\left\| \int\limits_{2^{-s}}^{1} \varphi(x)\,dx \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{s} \frac{c_k^2}{2^{2k}}}, \tag{2.13}$$

откуда,

$$\varphi(x) \notin \Phi_1 \quad \text{при} \quad \sum \frac{c_k^2}{2^{2k}} \to +\infty. \tag{2.14}$$

Можно убедиться в том, что ограниченность указанных норм будет и достаточным условием принадлежности $\varphi(x)$ к Φ_1;

$$\text{при} \quad \sum \frac{c_k^2}{2^{2k}} < +\infty \qquad \varphi(x) \in \Phi_1. \tag{2.15}$$

Нам нужно доказать, что при соблюдении (2.15) оператор неопределенного интегрирования может быть распространен на $\varphi(x)$ по непрерывности с множества ступенчатых функций. Заменив $\varphi(x)$ функцией $\varphi^{(s)}(x)$ — проекцией $\varphi(x)$ на s-мерное пространство с ортами $(i_1, i_2, \ldots, i_s)$, видим, что

$$\|\varphi^{(m+p)}(x) - \varphi^{(m)}(x)\|_{\Phi_1} \leqslant \sqrt{\sum_{k=m}^{m+p} (c_k^2/2^{2k})}, \tag{2.16}$$

откуда видна сходимость $\varphi^{(m)}(x)$ к $\varphi(x)$, ч. и т. д.

г. Рассмотрим теперь условия принадлежности $\varphi(x)$ к Φ_2. Пусть $\omega(x)$ ступенчатая числовая функция заданная уравнениями

$$\omega(x) = g_k, \quad 2^{-k} < x \leqslant 2^{-k+1},$$
$$\omega(0) = 0, \quad \text{причем} \quad g_k > 0,$$

и пусть

$$\|\omega(x)\|_{L_{p'}} = \|\omega(x)\|_{L_2} = 1,$$

т. е.

$$\sum \frac{g_k^2}{2^k} = 1.$$

Введем функцию множеств:

$$\varphi(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E \cap [2^{-k} < x \leqslant 2^{-k+1}])\, c_k i_k. \tag{2.17}$$

Эта функция множеств будет служить неопределенным интегралом от $\varphi(x)$ в смысле B_1 в случае, если $\sum (c_k/2^k) < +\infty$.

Посмотрим каково условие ограниченности нормы этой функции в Φ_2. Пользуясь тем, что

$$\left\| \int \omega(x)\varphi^{(m)}(x)\,dx \right\|^2 = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^2 c_k^2}{2^{2k}} \right], \tag{2.19}$$

дадим этому условию вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^2 c_k^2}{2^{2k}} < +\infty. \tag{2.20}$$

Легко убедиться в том, что условие (2.20) равносильно ограниченности отношения

$$c_k^2/2^k < M. \tag{2.21}$$

Действительно, какова бы ни была последовательность

$$c_{k_j}^2/2^{k_j}, \tag{2.22}$$

стремящаяся к ∞, всегда можно подыскать такой сходящийся ряд

$$\sum \frac{g_{k_j}^2}{2^{k_j}} = 1,$$

что почленное умножение его членов на последовательность (2.22) сделает его расходящимся. Следовательно (2.21) необходимо для справедливости (2.20). Достаточность его очевидна.

Однако условие (2.21) в данном случае недостаточно для того, чтобы непрерывно продолжить на $\varphi(x)$ оператор неопределенного интегрирования в метрике Φ_2. Иными словами $\varphi(x)$ не будет вообще говоря пределом ступенчатых функций в этой метрике. Назовём Ψ_2 область задания оператора неопределенного интегрирования в норме Φ_2. По доказанному выше каждая функция

$$\varphi(E) = \int\limits_E \varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in \Psi_2,$$

должна быть абсолютно непрерывной в метрике Φ_2.

Докажем, что такая абсолютная непрерывность будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{k\to\infty} \frac{c_k^2}{2^k} = 0. \tag{2.23}$$

В самом деле, если $c_{k_j}^2/2^{k_j} > \varepsilon_0$, то для бесконечного множества значений k_j найдутся промежутки $\Delta_k(2^{-k_j} < x \leqslant 2^{-k_j+1})$ такие, что $m\Delta_k = 2^{-k_j}$ и

$$\|\psi_\varphi(\Delta_{k_j})\|_\Phi > \varepsilon_0 . \tag{2.24}$$

Неравенство (2.24) можно получить из (2.19), положив:

$$g_k = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad k \neq k_j , \\ 2^{k_j} & \text{для} \quad k = k_j . \end{cases}$$

Следовательно (2.23) необходимо.

Оценивая теперь норму $\varphi^{(m+p)}(E) - \varphi^{(m)}(E)$ при помощи формулы (2.19) будем иметь после нетрудных выкладок

$$\|\varphi^{(m+p)}(E) - \varphi^{(m)}(E)\| \leqslant \sup \frac{c_k^2}{2^k}.$$

Отсюда следует достаточность условия (2.23) для принадлежности $\varphi(x)$ к Ψ_2.

Условия выведенные нами доказывают, что:

а. *Пространство B_1 есть правильная часть Φ_1.*

Достаточно положить $c_k = 2^k/k$. Тогда будем иметь

$$\varphi(x) \in \Phi_1 , \quad \varphi(x) \notin B_1 .$$

б. *Пространство B_2 есть правильная часть Φ_2.*

Достаточно положить $c_k = 2^{k/2}/\sqrt{k}$. При этом очевидно будем иметь

$$\varphi(x) \in \Phi_2 , \quad \varphi(x) \notin B_2 .$$

в. *Пространство Ψ_2 есть правильная часть Φ_2. Среди Φ_2 имеются не абсолютно непрерывные в смысле Φ_2.*

Достаточно положить $c_k = 2^{k/2}$. Мы получим

$$\varphi(E) \in \Phi_2 , \quad \varphi(E) \notin \Psi_2 .$$

г. *Существуют функции B_1, не принадлежащие Φ_2.*

Пусть $c_k = 2^k/k^2$. Тогда

$$\varphi(x) \in B_1 , \quad \varphi(x) \notin \Phi_2 .$$

Следующий пример показывает, что среди элементов Φ_2 содержатся не входящие в B_1.

Пример 2. Пусть опять Ω есть $[0, 1]$, X есть l_2. Построим функцию $\varphi(x)$ по формулам

$$\varphi(x) = c_k i_k , \quad \frac{1}{\sqrt{k+1}} < x \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} ,$$
$$\varphi(0) = 0 \quad \text{причем} \quad c_k > 0 .$$

Подобно примеру 1 можно получить условия:

$$\text{при} \quad \sum \frac{c}{k^{3/2}} < \infty \qquad \varphi(x) \in B_1 , \tag{2.25}$$

$$\text{при} \quad \sum \frac{c_k}{k^{3/2}} \to +\infty \qquad \varphi(x) \notin B_1 , \tag{2.26}$$

$$\text{при} \quad \sum \frac{c_k^2}{k^{3/2}} < +\infty \qquad \varphi(x) \in B_2 , \tag{2.27}$$

$$\text{при} \quad \sum \frac{c_k^2}{k^{3/2}} \to +\infty \qquad \varphi(x) \notin B_2 , \tag{2.28}$$

$$\text{при} \quad \sum \frac{c_k^2}{k^3} < \infty \qquad \varphi(x) \in \Phi_1 , \quad \varphi(x) \in \Psi_1 , \tag{2.29}$$

$$\text{при} \quad \sum \frac{c_k^2}{k^3} \to +\infty \qquad \varphi(x) \notin \Phi_1 , \quad \varphi(x) \notin \Psi_1 ; \tag{2.30}$$

и далее

$$\text{при} \quad \frac{c_k^2}{k^{3/2}} < M < \infty \qquad \varphi(E) \in \Phi_2 , \tag{2.31}$$

$$\text{при} \quad \frac{c_{k_j}^2}{k_j^{3/2}} \to +\infty \qquad \varphi(E) \notin \Phi_2 , \tag{2.32}$$

$$\text{при} \quad \frac{c_k^2}{k^{3/2}} \to 0 \qquad \varphi(E) \in \Psi_2 , \tag{2.33}$$

$$\text{при} \quad \frac{c_{k_j}^2}{k_j^{3/2}} > \varepsilon_0 \qquad \varphi(E) \notin \Psi_2 . \tag{2.34}$$

Положим

$$c_k = k^{5/8} . \tag{2.35}$$

Тогда

$$\sum \frac{c_k}{k^{3/2}} = \sum k^{-1/6} \to +\infty$$

и значит

$$\varphi(x) \notin B_1 . \tag{2.36}$$

С другой стороны $c_k^2/k^{3/2} = k^{-1/4} \to 0$ и значит

$$\varphi(x) \in \Phi_2 . \tag{2.37}$$

Замыкание в метрике Φ_p многообразия непрерывных функций представляет собою некоторое подпространство Ψ_p, которое может быть собственным или несобственным (т. е. совпадать с Φ_p).

Мы убедимся сейчас в том, что это многообразие Ψ_p может быть шире чем множество интегралов от всех суммируемых функций. Это показывают следующие примеры.

Пример 3. Пусть опять Ω есть $[0, 1]$, а X совпадает с l_2. Функции $\chi_s(x)$ определены формулами:

$$\chi_0(x) = i_1\,, \qquad \chi_1(x) = \begin{cases} i_2 & \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\,, \\ i_3 & \text{для} \quad \frac{1}{2} < x \leqslant 1\,, \end{cases}$$

$$(2.38) \qquad \chi_2(x) = \begin{cases} i_4 & \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}\,, \\ i_5 & \text{для} \quad \frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2}\,, \\ i_6 & \text{для} \quad \frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{4}\,, \\ i_7 & \text{для} \quad \frac{3}{4} < x \leqslant 1; \end{cases}$$

и пусть

$$\chi_s(E) = \int_E \chi_s(x)\,dx\,.$$

Построим ряд

$$(2.39) \qquad \varphi(E) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2^{s/2}}{s}\,\chi_s(E)\,.$$

Проверим, что ряд этот сходится в смысле нормы $\|\varphi\|_{\Phi_2}$.

В самом деле

$$(2.40) \qquad \chi_s(\Omega) = \int_\Omega \chi_s(x)\,dx = \sum_{k=1}^{2^s} \frac{i_{j_k}}{2^s}.$$

Подсчитывая норму $\chi_s(\Omega)$, будем иметь

$$\|\chi_s(\Omega)\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{2^s} (1/2^{2s})} = 2^{-s/2}\,.$$

Очевидно, что все $\chi_s(\Omega)$ ортогональны, поэтому для сходимости ряда для φ достаточна сходимость ряда $\|\chi_s\|^2 2^s/s^2$. Легко видеть, что этот ряд сходится. Пределом его будет $\|\varphi(E)\|^2$. С другой стороны, очевидно, что ряд функций точки $\sum \chi_s(x)$ не сходится.

Покажем, что не существует никакой функции $\varphi(x)$, для которой $\varphi(E)$ являлась бы неопределенным интегралом. Предварительно полезно сделать одно общее замечание.

Пусть абстрактная функция $\varphi(x)$ со значениями из l_2, заданная на промежутке $[0, 1]$ интегрируема, т. е. существует интеграл

$$\varphi(E) = \int_E \varphi(x)\,dx$$

по любому измеримому множеству. Это означает, в силу нашего определения, что существует последовательность ступенчатых функций $\varphi_k(x)$, сходящихся к $\varphi(x)$ почти всюду и притом таких, что последовательность $\varphi_k(x)$ сходится в себе.

Иными словами, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N(\varepsilon)$, что

$$\|\varphi_m - \varphi_p\|_{\Phi_1} < \varepsilon \qquad \text{при} \qquad m, p > N(\varepsilon)\,.$$

Покажем, что в этом случае можно вместо указанной последовательности $\varphi_k(x)$, входящей в определение интеграла, рассмотреть последовательность

$$\varphi^{(r)}(x) = \sum_{s=1}^{r} i_s \widetilde{\varphi}^{(s)}(x)$$

частичных сумм ортогонального разложения функции $\varphi(x)$. Через $\widetilde{\varphi}^{(s)}(x)$ обозначим компоненты этого разложения функции $\varphi(x)$. Эта последовательность $\varphi^{(r)}(x)$ будет очевидно сходиться к $\varphi(x)$ почти всюду (всюду, где $\varphi(x)$ имеет смысл).

Отметим, что каждая функция $\varphi^{(r)}(x)$ будет интегрируемой, ибо значения её конечномерны, а каждый компонент будет измеримой суммируемой функцией.

Остается показать, что в интеграле

$$\int_E \varphi^{(r)}(x)\,dx$$

можно перейти к пределу при $r \to \infty$, т. е.

$$(2.41) \qquad \int_E \varphi(x)\,dx = \lim \int_E \varphi^{(r)}(x)\,dx = \sum_{s=i}^{\infty} i_s \int_E \widetilde{\varphi}^{(s)}(x)\,dx\,.$$

Классическим рассуждением можно установить, что последовательность $\varphi^{(r)}(x)$ сходится к $\varphi(x)$ равномерно на множествах F_h с мерой сколь угодно близкой к единице.

Из абсолютной непрерывности $\varphi(x)$ (см. теорема 9) следует, что каково бы ни было ε, существует такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$\left\|\int_E \varphi(x)\,dx\right\|_X < \varepsilon \qquad \text{если} \qquad mE < \delta(\varepsilon)\,.$$

Но

$$\left\|\int_E \varphi^{(r)}(x)\,dx\right\|_X \leqslant \left\|\int_E \varphi(x)\,dx\right\|_X$$

и значит при достаточно малом δ интегралы от $\varphi^{(r)}(x)$ взяты по множеству $[0,1] \setminus F_h$ будут сколь угодно малы.

Но на F_h все $\varphi^{(r)}(x)$ сходятся к $\varphi(x)$ равномерно. Отсюда вытекает формула (2.41).

Но это значит, что для нашей функции $\varphi_0(x)$, интеграл от которой совпадал бы с $\varphi(E)$, все компоненты в пространстве l_2 должны были бы совпадать с $\chi_s(E)2^{s/2}/s$ и ряд (50) должен был бы сходиться к $\varphi(E)$ почти всюду, что невозможно.

Еще один пример такого же рода как только что рассмотренный имеет важное значение для дальнейшего.

Пример 4. Пусть x и y два вектора в n-мерном Евклидовом пространстве R_n, а r модуль их разности $r = |x - y|$. Будем считать принадлежащим некоторой ограниченной области Ω. При фиксированном x функция $1/r_\lambda$ как функция y представляет из себя элемент пространства $L_{p'}$ $(p' > 1)$ для любого λ, подчиненного неравенству

$$\lambda < n/p' . \tag{2.42}$$

Следовательно $1/r^\lambda$ есть при этом функция точки принимающая значения из $L_{p'}$. Функция эта непрерывна, т. н.

$$\left|\frac{1}{r^\lambda(x_1, y)} - \frac{1}{r^\lambda(x, y)}\right| < |x_1 - x|(r + r_1)^{\lambda-1} \tag{2.43}$$

и норма этой последней дроби в $L_{p'}$ по переменной y сколь угодно мала. Модуль непрерывности $1/r^\lambda$ равен ε^β, где $\beta > 0$.

Рассмотрим теперь ту же функцию $1/r^\lambda$ при $n/p' < \lambda < n$.

Ни для кокого $x = \Omega$ эта функция не будет элементом $L_{p'}$ в области Ω изменения точки y, т. к. $1/r^{\lambda p'}$ будет не суммируемой. Однако, если мы откажемся от рассмотрения $1/r^\lambda$ как функция точки x, а перейдем к функциям множеств, положение изменится. Пусть S_s некоторое линейное многообразие в Ω, переменный вектор которого x' определен уравнениями $x'_{s+r} = \text{const}$, $x'_{s+2} = \text{const}, \ldots, x'_n = \text{const}$.

На этом многообразии рассмотрим множества J'_s измеримые по Лебегу (в переменных $x'_1, x'_2, \ldots, x'_s$). Вместо функций от точки x^* будем рассматривать $1/r^\lambda(x^*, y)$ как функцию от множества J'_s и вектора $x_2(x_{s+11}, \ldots, x_n)$ по формуле

$$\frac{1}{r^\lambda}(J'_s, x_2|y) = \int\limits_{J'_s} \frac{1}{r^\lambda(x^*, y)}\, dx'_1 \ldots dx'_n ,$$

где компоненты x^* суть: $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_s, x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n)$.

При таком понимании, как мы докажем выше, функция $1/r^\lambda$ будет абстрактной функцией J'_s и x_2 со значениями из $L_{p'}$ непрерывной в метрике Φ_{q^*} на S_s, где $q^* \leqslant q$; $s/q = n/p - (n - \lambda)$.

Введем еще вектор x_1, лежащий в подпространстве $x_1, x_2, \ldots, x_s$. $x = x_1 + x_2$ представляет собою произвольный n-мерный вектор. Функция

$$\frac{1}{r^\lambda}(J'_s + x_1, x_2|y)$$

будет абстрактной функцией точки x и множества J'_s, со значениями из $L_{p'}$ по точке y, непрерывной по x при $q^* < q$ и абсолютно непрерывной по J'_s в метрике Φ_{q^*} на S_s.

Доказательство этого утверждения вытекает из теоремы вложения приведенного например в книге автора [1] (см. [2], [6]).

В самом деле, в указанной книге установлено, что

$$\left[\int\limits_{S_s}\left|\int \frac{\varphi(y)}{r^\lambda}\, dy\right|^{q^*} dS_s\right]^{1/q^*} \leqslant A\|\varphi(y)\|_{L_p} \tag{2.44}$$

для любого $\varphi(y) \in L_p$. Следовательно форма

$$A_\lambda(\omega, \varphi) = \int\limits_{S_s} \omega(x')\left(\int\limits_{\Omega} \frac{\varphi(y)}{r^\lambda}\, dy\right) dx' \tag{2.45}$$

удовлетворяет неравенству $|A_\lambda(\omega, \varphi)| \leqslant A\|\varphi(y)\|_{L_p}\|\omega(x)\|_{L_{q^{*\prime}}}$.

Но отсюда следует, что эта форма есть линейный функционал над $\varphi(y)$ в L_p, а интеграл

$$\int \frac{\omega(x'_1)}{r^\lambda}\, dx'_1$$

есть елемент $L_{p'}$ при любом $\omega(x')$ подчиненный неравенству

$$\left\|\int \frac{\omega(x'_1)}{r^\lambda}\, dx'_1\right\| \leqslant A\|\omega(x'_1)\|_{L_{q^{*\prime}}} .$$

Из (57) вытекает наше утверждение, если вспомнить определения нормы Φ_{q^*} на S_s. Также точно, пользуясь теоремой Кондрашова (см. [1]) доказывается непрерывность по x функции $1/r^\lambda$.

Согласно теории, развитой в § 1, замыканием множества интегралов от непрерывных функций будут служить функции множества $\varphi(E)$ абсолютно непрерывные и непрерывные по сдвигу. Возникает вопрос о том, являются ли оба эти свойства независимыми одно от другого. Для функции числовых оба эти свойства суть следствия из факта существования интегралов, но для абстрактных функций множеств обе непрерывности оказываются не совпадающими между собой и не вытекающими из существования $\varphi(E)$. Мы приведем сейчас пример функции множеств абсолютно непрерывной по метрике Φ_1, но не непрерывной по сдвигу в этой же метрике.

Пример 5. Пусть X есть пространство ограниченных последовательностей $(a_1, a_2, \ldots)$.

Обозначим, как и прежде, через i_k элемент этого пространства, имеющий все координаты нули кроме k-ой, которая равна единице. Любой элемент φ из m можно записать условно в виде ряда

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k i_k \tag{2.46}$$

(ряд этот не будет сходится в метрике m), где все a_k ограничены. За норму в m возмем как обычно $\max|a_k|$. Разделим отрезок $0 \leqslant x \leqslant 1$ на 2^s частей равной длины и рассмотрим на этом отрезке абстрактную функцию $\chi_s(x)$, принимающую значения i_s во всех отрезках с четным номером, $-i_s$ во всех отрезках с нечетным номером:

$$\tag{2.47} \begin{gathered} \chi_1(x) = \begin{cases} i_1 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ -i_1 & \text{при} \quad \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases} \\ \chi_2(x) = \begin{cases} i_2 & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{4}, \\ -i_2 & \text{при} \quad \frac{1}{4} < x \leqslant \frac{1}{2}, \\ i_2 & \text{при} \quad \frac{1}{2} < x \leqslant \frac{3}{4}, \\ -i_2 & \text{при} \quad \frac{3}{4} < x \leqslant 1; \end{cases} \end{gathered}$$

составим далее:

$$\psi_N(x) = \sum_{s=1}^{N} \chi_s(x) . \tag{2.48}$$

В соответствие каждой $\psi_N(x)$ построим интеграл

$$\psi_N(E) = \int_E \psi_N(x)\,dx .$$

Мы докажем, что функции $\psi_N(E)$ сходятся для каждого E по норме X, т.е. m (не по $\|\ \|_{\Phi_p}$), к некоторой предельной функции $\varphi_0(E)$, абсолютно непрерывной.

Отметим сначала, что ряд, представляющий эти функции на всех клеточных множествах с концами клеток выражаемых конечными двоичными дробями, обрывается на конечном числе членов, ибо интегралы от функций, определенных на клетках более мелкого подразделения по клеткам более крупного подразделения суть нули. Значит $\varphi_0(E)$ определяется на всех клеточных множествах. Функции $\varphi_N(E)$ равностепенно абсолютно непрерывны, являясь интегралами от ограниченных по норме функций.

Клеточные множества такого типа всюду плотны в пространстве Y. Поэтому в соответствие любому измеримому множеству можно привести такое клеточное множество E_δ, что

$$m(E \leftrightarrow E_\delta) < \delta .$$

В силу равностепенной абсолютной непрерывности φ_N имеем

$$\tag{2.49} \begin{gathered} \|\varphi_m(E) - \varphi_p(E)\| \leqslant \\ \leqslant \|\varphi_m(E) - \varphi_m(E_\delta)\| + \|\varphi_m(E_\delta) - \varphi_p(E_\delta)\| + \|\varphi_p(E_\delta) - \varphi_p(E)\| < \\ < \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon + \tfrac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon \end{gathered}$$

при достаточно малом δ и достаточно больших m и p выбраных в соответствии E_δ. Отсюда следует сходимость $\varphi_N(E)$ на всех множествах E и, в силу теоремы 2, непрерывность $\varphi_0(E)$, т.е. непрерывность абсолютная в норме Φ_1.

С другой стороны, функция $Z_\varphi(y)$, порожденная при помощи сдвига из $\varphi_0(E)$, не является непрерывной, ибо при сдвиге на 2^{-k} по оси x:

$$\varphi_0(E + 2^{-k}) - \varphi_0(E) = 2\int_E (\pm i_k)\,dx , \tag{2.50}$$

$$\|\varphi_0(E + 2^{-k}) - \varphi_0(E)\| = 2 . \tag{2.51}$$

Это и доказывает наше утверждение.

§ 3. Основная теорема о Ψ_1 и Ψ_p

1. Мы рассмотрели в § 2 интегрирование абстрактных функций с помощью замыкания оператора неопределенного интегрирования. Ниже мы займемся еще одним оператором, действующим в пространстве абстрактных функций множеств: оператором умножения на числовую функцию.

Для ступенчатых числовых функций $\omega(x) = a_i$, $x \in E_i$, и произвольной абстрактной аддитивной функции множеств определим интеграл

$$\psi(E) = \int_E \omega(x)\,d\varphi(E) \tag{3.1}$$

формулой

$$\psi(E) = \sum a_i \varphi(E \cap E_i) . \tag{3.2}$$

Если $\varphi(E)$ есть в свою очередь интеграл от ступенчатой функции:

$$\varphi(E) = \int_E \varphi(x)\,dx , \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \beta_j , \quad x \in \hat{E}_j , \tag{3.3}$$

при этом, как нетрудно видеть, интеграл (3.1) может быть выражен формулой

$$\psi(E) = \int_E \omega(x)\varphi(x)\,dx . \tag{3.4}$$

Таким образом (3.1) является естественным обобщением умножения абстрактной функции на функцию числовую. Функция $\psi(E)$ будет представлять собою билинейный оператор над числовой функцией ω и абстрактной функцей множеств $\varphi(E)$ со значениями в пространстве абстрактных функций множеств.

Лемма 1. *Пусть*

$$\varphi(E) = \Phi_p\,, \qquad \omega(x) \in L_q\,, \tag{3.5}$$

где

$$p > 1\,, \quad q \geqslant 1\,, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s} \leqslant 1\,. \tag{3.6}$$

(Значения $p = \infty$ и $q = \infty$, а также $s = \infty$ не исключаются). Оператор (3.1) представляет собою ограниченный и следовательно непрерывный оператор в указанных пространствах (3.6) со значениями в Φ_s.

Справедливо неравенство

$$\|\psi\|_{\Phi_s} \leqslant \|\omega\|_{L_q} \|\varphi\|_{\Phi_p}\,. \tag{3.7}$$

Доказав неравенство (3.7) мы докажем и всю лемму.

По определению

$$\|\psi\|_{\Phi_s} = \sup \frac{\|\int \omega'\, d\psi(E)\|_X}{\|\omega'\|_{L_{s'}}}\,, \qquad \text{где} \qquad \omega'(x) = \beta_j\,, \qquad x \in \hat{E}_j\,.$$

Преобразуя это выражение, дадим ему вид:

$$\|\psi\|_{\Phi_s} = \sup \frac{\|\sum a_i\beta_j\varphi(E_i \cap \hat{E}_j)\|_X}{\|\omega\omega'\|_{L_{p'}}} \cdot \frac{\|\omega\omega'\|_{L_{p'}}}{\|\omega'\|_{L_{s'}}}\,. \tag{3.8}$$

Но $\omega\omega'$ есть опять ступенчатая функция, определяемая формулой

$$\omega\omega' = a_i\beta_j\,, \qquad x \in E_i \cap \hat{E}_j\,.$$

Откуда

$$\frac{\|\sum a_i\beta_j\varphi(E_i \cap \hat{E}_j)\|_X}{\|\omega\omega'\|_{L_{p'}}} \leqslant \|\varphi(E)\|_{L_p}\,. \tag{3.9}$$

Далее

$$\frac{1}{s'} = 1 - \frac{1}{s} = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{q}$$

и значит

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{q}\,.$$

Заметим еще, что из последнего неравенства следует

$$\|\omega\omega'\|_{L_{p'}} \leqslant \|\omega\|_{L_q} \|\omega'\|_{L_{s'}}\,, \tag{3.10}$$

откуда и из (3.8) следует наша лемма. При $q = p'$, т. е. для $s = 1$ неравенство (3.10) дает

$$\frac{\|\omega\varphi\|_{\Phi_1}}{\|\omega\|_{L_{p'}}} \leqslant \|\varphi\|_{\Phi_p}\,,$$

откуда следует, что при определении $\| \|_{\Phi_1}$ формулой (1.36) мы можем считать, что функция ω в этой формуле пробегает не только ступенчатые, но и любые ограниченные измеримые функции.

Из доказанной леммы и результатов предыдущего параграфа вытекает, что если $\varphi(E)$ принадлежит Ψ_p, т. е. является пределом для последовательности ступенчатых функций, то и функция $\psi(E)$ будет принадлежать Ψ_s. Это следует из предельного перехода в формуле (3.1) и из того, что произведение двух ступенчатых функций будет в свою очередь ступенчатой функцией.

2. Нам нужно сейчас изучать более подробно понятие о свертке функций в применении к абстрактным функциям множеств.

Пусть $\omega(x)$ некоторая финитная числовая измеримая функция, т. е. функция, равная нулю вне некоторой конечной области. Мы ограничимся здесь для простоты случаем, когда $\omega(x)$ ограничено, ибо для наших целей этого будет достаточно.

Пусть еще $\varphi(E)$ абстрактная аддитивная функция множеств, для простоты также финитная, т. е. равная нулю для всех E не содержащих точек некоторого конечного множества. Рассмотрим интегралы

$$\psi(y) = \int \omega(y-x)\, d_x\varphi(E) \tag{3.11}$$

по всему пространству, где под интегралом y считается фиксированным, а функция $\omega(y-x)$ рассматривается как функция точки x.

Этот интеграл (3.11) мы будем рассматривать как новую абстрактную функцию точки y со значениями из X и будем называть $\psi(y)$ *сверткой* функции множеств $\varphi(E)$ с числовой функцией точки ω. Укажем еще другую формулу для свертки уже не для функции множеств, а для абстрактных функций. При $\varphi(E) = \int\limits_E \varphi(x)\,dx$ формула (3.11) переписывается

$$\psi(y) = \int \omega(y-z)\varphi(x)\,dx\,; \tag{3.12}$$

мы имеем право произвести в ней замену переменных введя $y - x = z$. Тогда $x = y - z$ и (3.12) перепишется так

$$\psi(y) = \int \omega(z)\varphi(y-z)\,dz\,. \tag{3.13}$$

Докажем еще одну лемму

Лемма II. *В тройной свертке*

$$\psi(y) = \int \omega_1(z) \Big[\int \omega_2(y-z-x)\, d_x\varphi(E)\Big] dz\,, \tag{3.14}$$

где ω_2 и ω_1 ограниченные измеримые функции, а $\varphi(E) \in \Phi_p$, $p > 1$, непрерывная по сдвигу, справедлив закон ассоциативности, т. е. можно изменить в ней порядок выполнения действий.

Имеет место формула

$$\psi(y) = \int \Big[\int \omega_1(z)\,\omega_2(y-x-z)\,dz\Big]\, d_x\varphi(E)\,. \tag{3.15}$$

Докажем эту лемму. Функция $\chi(y-z)=\int\omega_2(y-x-z)\,d_x\varphi(E)$ для любого фиксированного y является непрерывной функцией переменного z.

В самом деле, оценим норму разности

$$\int[\omega_2(y-x-z-\Delta z)-\omega_2(y-x-z)]\,d_x\varphi(E)= \tag{3.16}$$
$$=\int\omega_2(y-x-z)\{d_x[\varphi(E+\Delta z)-\varphi(E)]\}\,.$$

Но $\varphi(E)$ по предположению непрерывна по сдвигу и следовательно норма функции $\varphi(E+\Delta z)-\varphi(E)$ сколь угодно мала. По неравенству (3.16) получим $\|\Delta\chi\|<\varepsilon$. Откуда следует непрерывность $\chi(y-z)$.

Определим теперь новую ступенчатую функцию $\chi^{(N)}(y,z)$ следующим образом:

Разобьем область изменения z на подобласти Δ_i $(i=1,2,\ldots,N)$ так, чтобы диаметр каждой такой подобласти стремился к нулю при $N\to\infty$.

Положим
$$\chi^{(N)}(y,z)=\chi(y-z_i)\,,\qquad z\in\Delta_i\,,$$

где z_i некоторое значение z из области Δ_i.

В силу непрерывности $\chi(y-z)$ функция $\chi^{(N)}(y,z)$ будет стремится к $\chi(y-z)$ равномерно. Поэтому в интеграле

$$\int\omega_1(z)\,\chi^{(N)}(y,z)\,dz$$

по лемме 1 возможен предельный переход и мы можем написать вместо (3.14) другую формулу

$$\psi(y)=\lim_{\substack{N\to\infty\\ d\Delta_i\to0}}\int\omega_1(z)\,\chi^{(N)}(y,z)\,dz\,. \tag{3.17}$$

Раскрывая выражения в правой части и пользуясь представлением $\chi^{(N)}$ в каждом Δ_i преобразуем его к виду

$$\psi(y)=\lim_{\substack{N\to\infty\\ d\Delta_i\to0}}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Delta_i}\omega_1(z)\,dz\,\chi(y-z_i)= \tag{3.18}$$
$$=\lim_{\substack{N\to\infty\\ d\Delta_i\to0}}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Delta_i}\omega_1(z)\,dz\Big[\int\omega_2(y-x-z_i)\,d_x\varphi(E)\Big]=$$
$$=\lim_{\substack{N\to\infty\\ d\Delta_i\to0}}\int\Big[\sum_{i=1}^{N}\int_{\Delta_i}\omega_1(z)\,dz\,\omega_2(y-x-z_i)\Big]\,d_x\varphi(E)\,.$$

Рассмотрим теперь внутреннюю сумму под знаком последнего интеграла. Функция $\omega_2(y-x-z)$ есть абстрактная функция точки z со значениями в пространстве интегруемых в степени $p'<\infty$ функций f от разности $y-x$. Функция эта непрерывна по z, так как норма разности

$$\|\omega_2(y-x-z-\Delta z)-\omega_2(y-x-z)\|_{L_{p'}}$$

будет сколь угодно мала при достаточно малом Δz.

Построим теперь ступенчатую функцию $\omega_2^{(N)}(y-x,z)=\omega_2(y-x-z)$, $z\in\Delta_i$. Эта функция будет стремиться к $\omega_2(y-x-z)$ равномерно. Сумма в правой части (3.18) переписывается при помощи $\omega_2^{(N)}$ в виде интеграла и мы получим

$$\psi(y)=\int\Big[\int\omega_1(z)\,\omega_2^{(N)}(y-x,z)\,dz\Big]\,d_x\varphi(E)\,. \tag{3.19}$$

В силу равномерности стремления $\omega_2^{(N)}(y-x,z)$ к пределу мы видим, что и функция

$$\zeta^{(N)}=\int\omega_1(z)\,\omega_2^{(N)}(y-x,z)\,dz$$

со значениями в $L_{p'}$ от аргумента $y-x$ также стремится к пределу в норме $\|\;\|_{L_{p'}}$ и

$$\lim_{L_\infty}\zeta^{(N)}=\zeta=\int\omega_1(z)\,\omega_2(y-x-z)\,dz\,.$$

Поэтому из (3.19) следует

$$\psi(y)=\lim\int\zeta^{(N)}(y-x)\,d_x\varphi(E)=\int\zeta(x-y)\,d_x\varphi(E)\,,$$

что и требовалось доказать.

3. Главной целью настоящего параграфа является следующая теорема:

Теорема 20. *Всякая функция $\varphi(E)$, порождающая сдвигом непрерывную функцию $Z_\varphi(y)$, является пределом последовательности $\varphi_m(E)$ интегралов непрерывных функций.*

В силу следствия из теоремы 13 можно считать в формулировке этой теоремы функцию φ непрерывной по сдвигу.

Из этой теоремы и из теоремы 16 следует, что Ψ_p не только состоит из функций, порождающих непрерывные $Z_\varphi(y)$ сдвигом но содержит все такие функции. Прежде чем доказать эту теорему, мы должны будем дать несколько предварительных определений.

Пусть $\varphi(E)$ элемент Φ_p. Рассмотрим свертку $\varphi(E)$ с ядром

$$\omega_h(\xi)=\frac{1}{h^n}\,\omega\Big(\frac{\xi}{h}\Big)\,,$$

где $\omega(\xi)$ отлична от нуля лишь в шаре $(\xi) \leqslant 1$ и такими, для которого

$$\int \omega(\xi)\,d\xi = 1\,. \tag{3.20}$$

Такую свертку $\varphi_h(y) = \int \omega_h(y-x)\,d_x\varphi(E)$ мы будем называть *средней функцией* для $\varphi(E)$. В случае, когда ядро $\omega(\xi)$ неограничено дифференцируемо, средняя функция будет также неограниченно дифференцируемой.

Действительно функция

$$\Delta\omega_h = \frac{\omega_h(y+\Delta y-x)-\omega_h(y-x)}{\Delta y}$$

при $\Delta y \to 0$ и сохраняющем постоянное направление стремится равномерно к $\partial\omega_h/\partial y$.

Отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial\varphi_h}{\partial y} = \lim \int \Delta\omega_h(y-x)\,d_x\varphi(E) = \int \frac{\partial\omega_h}{\partial y}\,d_x\varphi(E)\,, \tag{3.21}$$

что и требовалось доказать.

Лемма III. *Если $\varphi(E)$ есть интеграл от непрерывной абстрактной функции $\varphi(x)$, то средняя функция $\varphi_h(y)$ будет сколь угодно близка к $\varphi(x)$ по норме $\|\varphi\| = \sup\|\varphi(x)\|$.*

Доказательство. Заметим, что в этом случае $\varphi_h(y)$ может быть написана в виде

$$\varphi_h(y) = \int \omega_h(y-x)\varphi(x)\,dx \tag{3.22}$$

и далее

$$\varphi_h(y)-\varphi(y) = \int \omega_h(y-x)[\varphi(x)-\varphi(y)]\,dx\,. \tag{3.23}$$

Но, ядро $\omega_h(y-x)$ отлично от нуля лишь в шаре $|y-x| \leqslant h$. Выбрав h столь малым, чтобы иметь в этом шаре $\|\varphi(x)-\varphi(y)\| < \varepsilon$ получим

$$\|\varphi_h(y)-\varphi(y)\| \leqslant \varepsilon \int \omega_h(y-x)\,dx < \varepsilon\,,$$

что и требовалось доказать.

В соответствие средней функции, которая определена нами, как обстрактная функция точки $\varphi_h(y)$ построим функцию множеств, являющуюся ее неопределенным интегралом

$$\varphi_h(E) = \int_E \varphi_h(y)\,dy\,. \tag{3.24}$$

Теорема 20 будет доказана, если мы установим, что в случае когда $\varphi(E)$ непрерывно по сдвигу, функция $\varphi_h(E)$ будет стремиться в норме Φ_p к $\varphi(E)$. Докажем предварительно еще одну лемму.

Лемма IV. *Функция $Z_{\varphi_h}(y)$, порожденная при помощи сдвига средней функции $\varphi_h(E)$, равна средней функции от функции $Z_\varphi(y)$ порожденной при помощи сдвига самой функцией $\varphi(E)$. Иными словами оператор усреднения*

$$\int_{E_0}\Big[\int \omega_h(y-x)\,d_x\varphi(E)\Big]\,dy$$

можно переставить с оператором порождения при помощи сдвига.

Докажем эту лемму. Рассмотрим значение функции $Z_{\varphi_h}(z)$ на некотором множестве E_0. Это значение будет:

$$Z_{\varphi_h}(E_0|z) = \int_{E_0+z}\Big[\int \omega_h(y-x)\,d_x\varphi(E)\Big]\,dy\,.$$

При помощи введения $\chi_{E_0}(z)$ — характеристической функции множества E_0 это значение запишется:

$$Z_{\varphi_h}(E_0|z) = \int \chi_{E_0+z}(y)\Big[\int \omega_h(y-x)\,d_x\varphi(E)\Big]\,dy\,.$$

Известно однако, что

$$\chi_{E_0+z}(y) = \chi_{E_0}(y-z)$$

и значит

$$Z_{\varphi_h}(E_0|z) = \int \chi_{E_0}(y-z)\Big[\int \omega_h(y-x)\,d_x\varphi(E)\Big]\,dy\,.$$

В последний интеграл полезно ввести новое переменное интегрирования $y-z=u$, после чего он перепишется в виде:

$$Z_{\varphi_h}(E_0|z) = \int \chi_{E_0}(u)\Big[\int \omega_h(u+z-x)\,d_x\varphi(E)\Big]\,d\varphi\,.$$

Как χ_{E_0}, так и ω_h — суть ограниченные измеримые функции. Благодаря этому мы можем применить лемму III об ассоциативности свертки.

Эта лемма дает

$$Z_{\varphi_h}(E_0|z) = \int\Big[\int \chi_{E_0}(u)\,\omega_h(u+z-x)\,du\Big]\,d_x\varphi(E)\,.$$

Во внутреннем интеграле мы можем теперь заменить еще раз переменные интегрирования, полагая $u = v+x-z$. Получим

$$Z_{\varphi_h}(E_0|z) = \int\Big[\int \chi_{E_0}(v+x-z)\,\omega_h(v)\,dv\Big]\,d_x\varphi(E)\,.$$

Но к последнему интегралу мы можем вторично применить лемму III, после чего будем иметь:

$$Z_{\varphi_h}(E_0|z) = \int \omega_h(v)\Big[\int \chi_{E_0}(v+x-z)\,d_x\varphi(E)\Big]\,dv\,.$$

Заменим еще раз в интеграле внутри переменное v на $y = z - v$:

$$(3.25)\qquad Z_{\varphi_h}(E_0|z) = \int \omega_h(z-y)\left[\int \chi_{E_0}(x-y)\, d_x\varphi(E)\right] dy = \\ = \int \omega_h(z-y)\varphi(E_0+y)\, dy\,.$$

Эта последняя формула представляет собою не что иное, как значение средней функции от $Z_\varphi(z)$ на множестве E_0.

Формула (3.25) доказывает утверждение леммы.

Из установленных лемм наша теорема вытекает уже без труда. В самом деле, по лемме III средняя функция $Z_\varphi|_h(y)$ от функции $Z_\varphi(y)$ будет стремится к $Z_\varphi(y)$ равномерно по норме Φ_p. Но это значит, что для каждой точки y функция являющаяся одновременно по лемме IV функцией порождаемой $\varphi_h(y)$ при помощи сдвига, будет стремиться к $Z_\varphi(y)$.

Это значит, что для всех y, в том числе и для $y = 0$, $\varphi_h(E+y)$ будет стремиться к $\varphi(E+y)$, т. е. $\varphi_h(E) \to \varphi(E)$.

Теорема доказана.

Теоремы 16 и 20 дают нам таким образом характерный признак подпространства Ψ_p в пространстве Φ_p функций множеств, получаемого замыкания многообровия неопределенных интегралов от непрерывных абстрактных функций по норме Φ_p.

Это будет абсолютно непрерывные абстрактные функции множества порождающие сдвигом непрерывные абстрактные функции. Попутно мы получили еще одно свойство абстрактных функций множеств.

Теорема 21. *Каждая функция непрерывная по сдвигу в норме Φ_p является абсолютно непрерывной в этой же метрике.*

В самом деле, мы установили, что функция непрерывная по сдвигу есть предел последовательности неопределенных интегралов от непрерывных функций. Но в силу теоремы 11 этот предел абсолютно непрерывен, ч. и т. д.

§ 4. Интегралы типа потенциала и теоремы вложения

1. Для абстрактных функций множеств также как и для числовых функций точки можно доказать ряд теорем об интегралах типа потенциала.

Теорема 22. *Интеграл*

$$(4.1)\qquad U(x) = \int_\Omega \omega(x, y)\, d_y\varphi(E)\,,$$

где $\varphi(E)$ функция из Φ_p, абсолютно непрерывная, а $\omega(x, y)$ функция точки x со значениями из $L_{p'}$ как функция от y, непрерывная в метрике $L_{p'}$, сам является непрерывной функцией точки x со значениями из x.

Если $\omega(x, y)$ равномерно непрерывна, то и функция $U(x)$ будет равномерно непрерывна.

В самом деле, по лемме I (случай $s = 1$)

$$(4.2)\qquad \left\|\int_\Omega \omega(x+\Delta x, y)\, d_y\varphi(E) - \int_\Omega \omega(x_0, y)\, d_y\varphi(E)\right\|_X = \\ = \left\|\int_\Omega [\omega(x+\Delta x, y) - \omega(x, y)]\, d_y\varphi(E)\right\|_X \leqslant \\ \leqslant \|\omega(x+\Delta x, y) - \omega(x, y)\|_{L_{p'(y)}} \cdot \|\varphi(E)\|_{\Phi_p} \leqslant \varepsilon \|\varphi(E)\|_{\Phi_p}\,.$$

Неравенство (4.2) и доказывает нашу теорему.

Полезно заметить, что в качестве $\omega(x, y)$ мы можем взять, например, функцию $\omega(x, y) = r^{-\lambda}K(x, y)$, где $K(x, y)$ всюду ограниченная измеримая функция обоих переменных, а $\lambda < n/p'$. Непрерывность в целом такой функции вытекает из примера 4, § 2 (стр. 307).

Теорема 23. *Пусть $\omega(x, y)$ удовлетворяет условию*

$$(4.3)\qquad |\omega(x+\Delta x, y) - \omega(x, y)| \leqslant \frac{|\Delta x|(r+r_1)^{\lambda-1}}{r^\lambda r_1^\lambda}\,.$$

Тогда при $q \leqslant p' < n/\lambda$

$$(4.4)\qquad \|\omega(x+\Delta x, y) - \omega(x, y)\|_{L_q(y)} \leqslant |\Delta x|^\beta, \quad \|\omega(x, y)\|_{L_q(y)} < A\,, \quad \textit{где}\ \beta > 0.$$

Вывод формулы (4.4) по существу содержится в книге автора [1].

Применяя (4.4) к (4.1), получим явное выражение для модуля непрерывности функции $V(x)$.

2. Рассмотрим теперь некоторое s-мерное евклидово многообразие S_s и пусть на нем дана числовая аддитивная функция множеств J, зависящая еще от точки y в n-мерном пространстве: $\omega(J, y)$, $J \subset S_s$, точки множества J обозначим через x.

Допустим, что эта функция множеств для любого y принадлежит Φ_q: $\omega(J, y) \in \Phi_q$.

Пусть $\tau(x) \in L_{q'}$ $(x \in S)$. Обозначим

$$\sigma(y) = \int \tau(x)\, d_x\omega(J, y)$$

и пусть для некоторого p'

$$\|\sigma(y)\|_{L_{p'}} \leqslant A\, \|\tau(x)\|_{L_{q'}}\,,$$

причем A не зависит от выбора τ.

Каждой аддитивной функции множеств $\varphi(E)$ от измеримых множеств E в n-мерном пространстве можно привести в соответствие функцию $\chi(J)$ от измеримых множеств J на S-мерном многобразии по формуле

$$\chi(J)=\int \omega(J, y)\, d_y\varphi(E), \tag{4.5}$$

где y — вектор в пространстве, где меняются множества E.

Теорема 24. *$\chi(J)$ будет аддитивной абстрактной функцией со значением из X.*

Оценим норму этой функции в Φ_q на S_1.

По определению нормы будем иметь

$$\|\chi(J)\|_{\Phi_q}=\sup \frac{\left\|\int \tau(x)\, d_x\left[\int \omega(J, y)\, d_y\varphi(E)\right]\right\|_X}{\|\tau(x)\|_{L_{q'}}}, \tag{4.6}$$

где $\tau(x)$ — ступечатая функция.

Оценим числитель формулы (4.6). Мы получим пользуясь аддитивностью интеграла и тем, что $\tau(x)$ ступенчатая функция: $\tau(x)=\beta_j$, $x\in J_j$,

$$\left\|\tau(x)\, d_x\left[\int \omega(J, y)\, d_y\varphi(E)\right]\right\|_X=\left\|\sum \beta_j\left[\int \omega(J_j, y)\, d_y\varphi(E)\right]\right\|_X,$$

$$\left\|\int \sum \beta_j\omega(J_j, y)\, d_y\varphi(E)\right\|_X=\left\|\int\left[\int \tau(x)\, d_x\omega(J, y)\right] d_y\varphi(E)\right\|_X$$

и, следовательно,

$$\left\|\int \tau(x)\, d_x\left[\int \omega(J, y)\, d_y\varphi(E)\right]\right\|_X\leqslant\left\|\int \tau(x)\, d_x\omega(J, y)\right\|_{L_{p'}}\cdot\|\varphi(E)\|_{\Phi_p}. \tag{4.7}$$

Но первый множитель правой части (4.7) не превосходит $A\|\tau(x)\|_{L_{q'}}$ и, следовательно:

$$\|\chi(J)\|_{\Phi_q}\leqslant A\,\|\varphi(E)\|_{\Phi_p}. \tag{4.8}$$

Если в качестве функции $\omega(J, y)$, как доказано в примере 4 (§ 2), взять $\frac{1}{r^\lambda}(J+x_1, x_2, y)$, мы получим теорему, которую естественно назвать теоремой об интегралах типа потенциала.

В некоторых случаях, как например в рассматриваемом примере, функция $\omega(J, y)$ зависит еще от n-мерного вектора x, на который можно сместить множество J вместе с несущей его поверхностью.

Справедлива теорема

Теорема 25. *Если для любой $\tau(x)$*

$$\left\|\int \tau(x)\, d_x[\omega(J+\Delta x, y)-\omega(J, y)]\right\|_{L_{p'}}< A\eta(|\Delta x|)\cdot\|\tau(x)\|_{L_{q'}}, \tag{4.9}$$

то $\chi(J+x)$ будет непрерывной в метрике Φ_q по сдвигу. Модуль непрерывности $\chi(J+x)$ будет равен $B\eta(|\Delta x|)$.

Доказательство этого утверждения очевидно. Для этого достаточно повторить рассуждение, приведшее нас к формуле (4.8), заменив всюду $\omega(J, y)$ на разность $\omega(J+x, y)-\omega(J, y)$.

Мы получим

$$\|\chi(J+x)-\chi(J)\|_{\Phi_{q'}}\leqslant A\,\|\varphi(E)\|_{\Phi_p}\eta(|\Delta x|),$$

что и доказывает теорему.

Легко доказывается (см. [1]), что условию (4.9) будет удовлетворять такая функция $\omega(J, y)$, которая помимо (4.7) удовлетворяет еще условию

$$|\omega(J+x, y)-\omega(J, y)|\leqslant\int_j K(x, y)\frac{(r+r_1)^{\lambda-1}|x|}{r^\lambda r_1^\lambda}\, dx.$$

Условия теорем 23 и 24 по существу дают нам обобщение теорем о полной непрерывности интегрального оператора устанавливая модуль непрерывности функций $U(x)$ и $\chi(J)$.

3. Рассмотрим некоторую финкцию множеств $\varphi(E)\in\Psi_p$.

По вышеизложенному мы можем составить для нее интеграл:

$$\int \omega(x)\, d\varphi(E),$$

где $\omega(x)$ произвольная гладкая финитная функция. Пусть L некоторый дифференциальный оператор с достаточно гладкими, например, постоянными коэффициентами. Составим выражение $M\omega(x)$, где M оператор, сопряженный с L в смысле обычной сопряженности дифференциальных операторов.

Допустим, что существует функция множеств $\psi(E)\in\Psi_p$, удовлетворяющая тождеству

$$\int \omega(x)\, d\psi(E)=\int M\omega\, d\varphi(E)$$

при всех достаточно гладких финитных ω.

Тогда мы будем говорить, что функция $\psi(E)$ является значением оператора L над $\varphi(E)$:

$$\psi(E)=L\varphi(E).$$

Оператор $L\varphi$ однозначно определен, так как если бы для некоторого φ существовали две функции ψ_1, ψ_2, их разность ψ удовлетворяла бы условию

$$\int \omega(x)\, d\psi(E)=0$$

для всех достаточно гладких финитных ω. Отсюда следовало бы, что $\psi_h=0$, а так как, по доказанному, $\|\psi_h-\psi\|_{\Phi_p}\to 0$, должно быть $\psi=0$, т. е. $\psi_1=\psi_2$.

Простейшими дифференциальными операторами являются операторы дифференцирования.

Рассмотрим совокупность функций множеств $\varphi(E)$ из Φ_1 допускающих все производные порядка

$$\frac{\partial^l \varphi(E)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \psi_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}(E),$$

причем все $\psi_\alpha(E)$ принадлежат некоторому Ψ_p.

Эту совокупность введением соответствующей нормы можно превратить в банахово пространство $\Psi_p^{(l)}$, аналогичное пространству $W_p^{(l)}$ для числовых функций рассмотренному в [1]. Удобно вначале ввести пространство $\tilde{\Psi}_p^{(l)}$, состоящее из классов функций $\{\varphi(E)\}$, имеющих одинаковые все производные порядка l для любых двух функций из одного класса.

Норму в этом пространстве можно определить, например, формулой

$$\|\varphi(E)\|^p_{\tilde{\Psi}_p^l} = \sum \left\| \frac{\partial^l \varphi(E)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{\Phi_p}, \tag{4.10}$$

где $\sum$ берется по всем производным порядка l.

Справедлива теорема:

Теорема 26. *Множество функций из $\Psi_p^{(l)}$ эквивалентных нулю в метрике $\tilde{\Psi}_p^{(l)}$, т. е. таких функций, у которых все производные порядка l — суть нули, представляет собою множество неопределенных интегралов от многочленов от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ степени ниже l с коэффициентами из X.*

Доказательство этой теоремы мы проведем позднее вместе в несколькими другими.

Как и для числовых функций введем пространство Σ_l всех таких многочленов с нормой, например, в виде суммы квадратов норм всех коэффициентов. Каждому проектору Π_l из $\Psi_p^{(l)}$ в Σ_l отвечает дополнительный проектор $E - \Pi_1$, выделяющий из $\Psi_p^{(l)}$ дополнительное пространство изоморфное пространству классов $\tilde{\Psi}_p^{(l)}$.

Пользуясь двумя проекторами Π_1 и $\Pi_1^* = I - \Pi_1$, мы можем ввести норму в $\Psi_p^{(l)}$ как любую выпуклую функцию от $\|\Pi_1 \varphi(E)\|_{\Sigma_l}$ и $\|\varphi(E)\|_{\tilde{\Psi}_p^{(l)}}$.

Множество проекторов Π_1 распадается на классы, приводящие к эквивалентым нормам, среди которых легко выделить один регулярный класс (см. [1]). С введенными нормами справедливы теоремы:

4. Теорема 27. *При $lp > n$ функция $\varphi(E)$ является интегралом от некоторой непрерывной функции точки $\varphi(x)$. Модуль непрерывности $\varphi(x)$ равен $A|\Delta x|^\beta$, где $\beta > 1$,*

$$\|\varphi(x)\|_X \leqslant A\, \|\varphi(E)\|_{\Psi_p^{(l)}},$$

A — некоторая постоянная, не зависящая от φ.

Теорема эта является обобщением на абстрактные функции теорем вложения для функций гладких.

Теорема 28. *При $lp < n$ функция $\varphi(E)$ определена на всех гладких множествах измерения s, где $s > n - lp$ и представляет собою функцию множеств $\varphi(J)$, принадлежащую L_q, где*

$$\frac{s}{q} = \frac{n}{p} - l.$$

При этом

$$\|\varphi(J)\|_{\Psi_q} \leqslant A \|\varphi(E)\|_{\Psi_p^{(l)}}.$$

Для Ψ_{q^*} при $q^* < q$ имеет место непрерывность в смысле примера 4 (§ 2).

Доказательство всех этих теорем будет основано на нескольких простых леммах, которые мы здесь и приведем:

Лемма I. *Оператор дифференцирования $\partial^k / \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$ перестановочен с оператором усреднения. Если*

$$\varphi_h(x) = \frac{1}{h^n} \int \omega\left(\frac{r}{h}\right) d_y \varphi(E) \tag{4.11}$$

и существует обобщенная производная

$$\frac{\partial^k \varphi(E)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \psi(E),$$

то

$$\frac{1}{h^n} \int \omega\left(\frac{r}{h}\right) d\psi(E) = \frac{\partial^k \varphi_h}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \tag{4.12}$$

где производная вычисляется в обычном смысле.

Доказательство леммы I полностью совпадает с тем, которое употребляется обычно для числовых функций. Дифференцируя (4.11) будем иметь

$$\frac{\partial^k \varphi_h(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \int \frac{\partial^k \omega(r/h)}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} d_y \varphi(E),$$

где $x_1, \ldots, x_n$ координаты точки x.

Пользуясь определением обобщенной производной и замечая, что производные по $x_1, x_2, \ldots, x_n$ от $\omega(r/h)$ отличаются множителем $(-1)^k$ от производных по $y_1, \ldots, y_n$, получим доказательство нашей леммы.

Лемма II. *Для непрерывно дифференцируемых абстрактных функций точки $\varphi_h(x)$ справедливо тождество*

$$\varphi_h(x) = \int_\Omega K(x, y) \varphi_h(y)\, dy + \int_\Omega \sum \frac{K_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{r^{n-l-1}} \frac{\partial^l \varphi_h}{\partial y_1^{\alpha_1} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}}\, dy, \tag{4.13}$$

где K и $K_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ те же ядра, через которые получается аналогичное тождество с числовыми функциями.

Доказательство леммы II слово в слово совпадает с доказательством того же тождества для числовых функций.

Напомним, что ядро $K(x, y)$ есть многочлен от переменных $x_1, \ldots, x_n$ — координат с коэффициентами неограниченно дифференцируемыми по $y_1, \ldots, y_n$ — координатами y.

Ядра $K_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x, y)$ ограничены и

$$\left| \frac{K_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x+\Delta x, y)}{r_1^{n-l-1}} - \frac{K_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x, y)}{r^{n-l-1}} \right| \leqslant \frac{A|\Delta x|(r+r_1)^{n-l-2}}{r_1^{n-l-1} r^{n-l-1}} . \tag{4.14}$$

Формулу (4.13) запишем в виде

$$\varphi_h(x) = \Pi_1 \varphi_h(x) + \Pi_1^* \varphi_h(x) . \tag{4.15}$$

Оператор Π_1 представляет собою очевидно проектор $\varphi_h(x)$ в Σ_l, так как подставляя элемент φ_0 из Σ_l в (4.15) получим:

$$\varphi_0(x) = \Pi_1 \varphi_0(x); \tag{4.16}$$

отсюда следует, что и $\Pi_1^* = I - \Pi_1$ также будет проектором.

Из формул (4.13) и (4.15) можно получить доказательство наших теорем. Займемся вначале теоремой 27.

Оператор Π_1^* определен на множестве гладких l-раз непрерывно дифференцируемых функций, причем по теореме 22 его значения будут непрерывными абстрактными функциями точки.

Введем в рассмотрение опять пространство K непрерывных абстрактных функций точки, с метрикой, определенной формулой (2.2).

Область значений оператора Π_1^* будет лежать в этом пространстве и сам он в силу той же теоремы будет ограниченным как оператор действующий из $\tilde{\Psi}_p^{(l)}$ в K.

Но, в силу этого он может быть непрерывно продолжен со всюду плотного множества дифференцируемых функций на все пространство $\tilde{\Psi}_p^{(l)}$.

Условимся поэтому считать его сразу определенным на всем пространстве $\tilde{\Psi}_p^{(l)}$ ограниченным оператором со значениями в K.

Таким же образом оператор Π_1 можно считать определенным на всем пространстве Φ_1 ограниченным оператором со значениями из K.

Мы можем теперь определить метрику в пространстве $\Psi_p^{(l)}$ при помощи нашего проектора Π_1, так как мы это указывали в части 3 этого параграфа.

При таком определении оба оператора Π_1 и Π_1^* будут непрерывными $\Psi_p^{(l)}$.

Рассмотрим теперь операторы

$$I_1 = \int_E \Pi_1 \varphi(x)\,dx , \quad I_2 = \int_E \Pi_1^* \varphi(x)\,dx \tag{4.17}$$

со значениями в $\Psi_p^{(l)}$. Сумма

$$I = I_1 + I_2 \tag{4.18}$$

является тождественным оператором на всюду плотном множестве в $\Psi_p^{(l)}$. Его непрерывное продолжение есть просто тождественный оператор на $\Psi_p^{(l)}$.

Как мы видим он сопоставляет любой функции $\varphi(E)$ из $\Psi_p^{(l)}$ неопределенный интеграл от непрерывной функции точки.

Теорема 27 доказана.

Аналогично доказывается и теорема 28.

Рассмотрим s-мерное многообразие S_s и пусть J множество на S_s измеримое по Лебегу.

Проинтегрируем обе части (4.13) по множеству J. Мы будем иметь:

$$\varphi_h(J) = \int_\Omega \tilde{K}(J, y) \varphi_h(y)\,dy + \int_\Omega \sum \tilde{K}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(J, y) \frac{\partial^l \varphi_h}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}\,dy , \tag{4.19}$$

где

$$\begin{gathered} \tilde{K}(J, y) = \int_J K(x, y)\,dx , \\ \tilde{K}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(J, y) = \int_J \frac{K_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x, y)}{r^{n-\lambda-1}}\,dx . \end{gathered} \tag{4.20}$$

Применяя те же рассуждения как и для доказательства теоремы (27) и пользуясь тем, что ядра $\tilde{K}_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(J, y)$ ведут себя также как функция $\frac{1}{r^\lambda}(J, y)$ в примере 5 (§ 2), докажем, что тожденственный оператор в $\Psi_p^{(l)}$ преобразует любой элемент из $\Psi_p^{(l)}$ в такую функцию множества $\varphi(E)$ которыя представима в виде

$$\varphi(E) = \int_{x_2} \varphi(J_{x_2}, x_2)\,dx_2 , \tag{4.21}$$

где J_{x_2} суть сечения множества плоскостями s-измерений $x_2 = \text{const}$.

При этом норма функции множеств $\varphi(J_{x_2}, x_2)$ в Φ_q оценивается через норму $\varphi(E)$ в $\Psi_p^{(l)}$ формулой

$$\|\varphi(J_s)\|_{\Phi_q} \leqslant A \|\varphi\|_{\Psi_p^{(l)}} .$$

Теорема 28 доказана.

5. Как нам кажется, существенный интерес могут представить еще и другие теоремы аналогичные доказанным. Сюда относятся, например, теоремы ложения Гальярдо-Ниренберга, доложенные на Международном математичес- и конгрессе в Эдинбурге в августе 1958 г. Эти теоремы уточняют свойства производных от φ порядка $1, 2, \ldots, l-1$ для функций из $W_p^{(l)}$, если известно, что сама φ суммируема с некоторой степенью более высокой, чем вытекающая из теорем вложения.

Мы не пытались здесь провести полное доказательство для показателя q, ограничившись любым $q^* < q$. Думается, что теорема будет верна и в самой широкой формулировке.

Наконец, в приложениях очень интересно было бы установить теорему аналогичную теореме о сложных функциях используемую для построения теории квазилинейных гиперболических уравнений. Эта теорема легко устанавливается для метрик B_p, но можно ли перенести её на норму Φ_p и при каких условиях, остается неясным.

Автор выражает свою признательность к проф. Витольду Бортаневичу, сделавшему ряд весьма полезных замечаний по настоящей статье.

Цитированная литература

[1] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Ленинград 1950.

[2] — *Об одной теореме функционального анализа*, Матем. сб., Новая серия, том 4, вып. 3 (1938), стр. 471-497.

[3] — *Уравнения математической физики*, изд. III, Москва 1954.

[4] S. Bochner, *Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind*, Fund. Math. 20 (1933), стр. 262-280.

[5] И. М. Гельфанд, *Abstrakte Funktionen und lineare Operatoren*, Матем. сб., Новая серия, 4 (46): 2 (1938), стр. 235-286.

[6] В. П. Ильин, *О теореме вложения для предельного показателя*, ДАН СССР 96 (1954), стр. 906-908.

[7] С. Л. Соболев, *К теории нелинейных гиперболических уравнений с частными производными*, Мат. сб. 5 (47) (1939).

[8] Я. С. Бугров, *К теоремам вложения*, ДАН СССР 116 (1957), стр. 531-534.

[9] А. А. Вашарин, *Граничные свойства функций, имеющих конечный интеграл Дирихле с весом*, ДАН СССР 117 (1957), стр. 742-744.

[10] Л. Д. Кудрявцев, *О продолжении функций и вложении классов функций*, ДАН СССР 107 (1956), стр. 501-504.

[11] С. М. Никольский, *Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных*, Труды Математического института им. В. А. Стеклова 38 (1951), стр. 244-278.

[12] — *Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях*, Матем. сб., 33 (75): 2 (1953), стр. 261-326.

[13] — *Теорема вложения для функций с частными производными, рассматриваемыми в различных метриках*, Изв. АН СССР, сер. матем., 22 (1958), стр. 321-336.

Reçu par la Rédaction le 23. 12. 1958

On a metrization of polytopes

by

K. Borsuk (Warszawa)

1. Convex spaces. Let X be a metric space and let $\varrho(x, y)$ denote the distance between two points $x, y \in X$. The point $z \in X$ is said to lie *between* x *and* y provided that

$$\varrho(x, y) = \varrho(x, z) + \varrho(z, y)\,. \tag{1}$$

The point $z \in X$ is said to be a *centre* of the pair x, y provided that

$$\varrho(x, z) = \varrho(y, z) = \tfrac{1}{2}\cdot\varrho(x, y)\,. \tag{2}$$

Evidently every centre of the pair x, y lies between x and y.

A space X is said to be *convex* (Megner [3], p. 81) provided that for each two distinct points x, y of it there exist a point $z \in X$ different from x and y which lies between x and y. It was proved by Menger ([3], p. 89, see also Aronszajn [1]) that in complete convex spaces X each two points $x, y \in X$ are joined by a *metric segment*, i. e. by a subset of X isometric with the real interval of length $\varrho(x, y)$. We shall denote metric segments by the letter L with a convenient index. The existence of metric segments with given endpoints is also ensured if X is complete and for every pair of points $x, y \in X$ there exists in X at least one centre.

2. Strongly convex spaces. By a *strongly convex space* we understand a space X in which for every two distinct points $x, y \in X$ the set of all points $z \in X$ lying between x and y is a metric segment. We shall denote this segment by $X(x, y)$. For complete spaces (in particular for compacta), strong convexity is equivalent to the condition that every pair of points $x, y \in X$ has exactly one centre.

We easily see that for a strongly convex space X there exists, for each pair of points $x, y \in X$ and every $0 \leqslant t \leqslant 1$, exactly one point $z \in X$ such that

$$\varrho(x, z) = t\cdot\varrho(x, y) \quad \text{and} \quad \varrho(z, y) = (1-t)\cdot\varrho(x, y)\,.$$

Setting $z = \varphi_{x,y}(t)$ we obtain a function of three arguments x, y, t, its values being points of X. One easily sees that if X is a compactum,