Ensembles σ-connexes et le théorème de Gehman

par

A. Lelek (Wrocław)

Résultats et problèmes. $\mathcal{X}$ désignera dans ce qui suit un ensemble (espace) métrique séparable avec la distance ϱ. Le diamètre d'un ensemble $A \subset \mathcal{X}$ sera désigné par $\delta(A)$.

$\mathcal{X}$ s'appellera *σ-connexe* lorsqu'il n'en existe aucune décomposition

$$\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \tag{1}$$

en ensembles F_i fermés dans $\mathcal{X}$, disjoints et non-vides. $\mathcal{X}$ sera dit *héréditairement* localement connexe lorsque tout ensemble *connexe* $E \subset \mathcal{X}$ est localement connexe (cf. [3], p. 199, 5°). Pour les $\mathcal{X}$ qui sont des continus, cette notion coïncide avec celle de connexité locale héréditaire définie d'une manière moins restrictive (voir [3], p. 195). Les autres termes seront empruntés directement du livre [3]. En particulier, deux ensembles $A \subset \mathcal{X}$ et $B \subset \mathcal{X}$ seront dits *séparés* lorsque chacun d'eux est disjoint de la fermeture de l'autre, c'est-à-dire que $A \cap \bar{B} \cup \bar{A} \cap B = 0$.

On a les théorèmes suivants, dont deux premiers sont évidents:

T1. *Si $\mathcal{X}$ est σ-connexe et f est une fonction continue, l'image $f(X)$ est σ-connexe* (invariance de la σ-connexité par rapport aux transformations continues).

T2. *Toute somme d'un nombre fini d'ensembles σ-connexes l'est également* (en particulier, *les ensembles finis sont σ-connexes*).

T3. *Tout $\mathcal{X}$ σ-connexe est formé d'un nombre fini de composantes et chacune d'elles est σ-connexe* (démontré plus loin, p. 268).

En conséquence,

T4. *Tout $\mathcal{X}$ σ-connexe infini contient un ensemble connexe et σ-connexe infini.*

T5. *Tout continu* (ensemble compact et connexe) *est σ-connexe* (voir [3], p. 113, théorème de Sierpiński).

T6. *Tout $\mathcal{X}$ complet, connexe et localement connexe est σ-connexe* (voir [2], p. 234).

T7. *Si un ensemble plan $\mathcal{X}$ est connexe et fermé sans être σ-connexe, au moins un des sommandes F_i dans* (1) *n'est pas connexe* (théorème de Mazurkiewicz et Moore, voir [4], p. 188 et [5], p. 197).

T8. *Tout sous-ensemble connexe d'un continu plan et héréditairement localement connexe $\mathcal{X}$ est σ-connexe* (démontré plus loin, p. 273).

Ce théorème est une solution partielle du problème posé dans [2], p. 228. J'en dois à Jan Mycielski l'idée de la démonstration, de même que plusieurs suggestions qui m'on incité à composer cet ouvrage. Elle reposera sur quatre lemmes suivants, dont deux premiers sont connus et dont deux autres seront établis dans la suite:

L1. *Si $\mathcal{X}$ est connexe (même non-séparable), il n'existe aucune décomposition* (1) *telle que* $\lim_{i\to\infty}\delta(F_i)=0$ (voir [2], p. 229).

L2. *Aucun continu plan et héréditairement localement connexe ne contient une suite infinie de continus disjoints de diamètre dépassant un* $\varepsilon>0$ (voir [3], p. 366, théorème de Gehman).

L3. *Soient $\varepsilon>0$ et $\{E_j\}$ une suite infinie de sous-ensembles d'un même plan, connexes, séparés deux à deux, dont la somme $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}E_j$ est un ensemble borné et dont les diamètres $\delta(E_j)$ pour $j=1,2,\ldots$ dépassent ε.*

Alors il existe un $\eta>0$ et une suite $\{C_n\}$ de continus disjoints, de diamètre $\delta(C_n)>\eta$ pour tout $n=1,2,\ldots$ et tels que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}\overline{E_j} \tag{2}$$

(voir plus loin, p. 268).

L4. *Aucun continu plan et héréditairement localement connexe ne contient une suite infinie d'ensembles connexes séparés (deux à deux) de diamètre dépassant un* $\varepsilon>0$.

Ce lemme est une conséquence directe de L2 et L3. Il est en même temps une généralisation de L2 (du théorème précité de Gehman). Cependant, il existe une courbe plane et héréditairement localement connexe qui est somme d'une suite infinie d'ensembles connexes *disjoints* de diamètre dépassant 1 (exemple récent, dû à Duda, non publié).

Les exemples suivants sont en rapport étroit avec les théorèmes qui précèdent:

E1. *Ensemble plan connexe et localement connexe, mais n'étant pas σ-connexe, à savoir composé d'une suite infinie de segments rectilignes disjoints* (voir [2], p. 241).

Vu T6, un tel ensemble ne peut pas être fermé. Comme ensemble frontière dans le plan, il est homéomorphe à un sous-ensemble de la courbe plane universelle de Sierpiński (voir [3], p. 202 et 381), qui est un continu localement connexe. Cela prouve que l'hypothèse de la connexité locale *héréditaire* dans T8 est essentielle.

E2. *Ensemble spatial (dans l'espace euclidien à 3 dimensions) connexe, héréditairement localement connexe, mais n'étant pas σ-connexe, à savoir composé d'une suite infinie d'arcs disjoints* (voir [2], p. 235).

E3. *Ensemble spatial (également dans l'espace euclidien à 3 dimensions) connexe, fermé (non-borné) et n'étant pas σ-connexe, à savoir étant de la forme* (1) *où F_i sont connexes* (voir [3], p. 115).

E4. *Ensemble plan connexe, fermé (non-borné) et n'étant pas σ-connexe, à savoir étant de la forme* (1) *où F_1 n'est pas connexe, tous les autres F_i étant homéomorphes à la demi-droite* (exemple dû à Mazurkiewicz, voir [4]).

Vu T6, les ensembles E3 et E4 ne peuvent pas être localement connexes.

E5. *Ensemble S plan connexe, σ-connexe et tel qu'en lui soustrayant un point, le reste n'a que les composantes se réduisant à des points individuels* (voir [1], p. 241 et [3], p. 85, *ensemble biconnexe*).

Vu T4, un tel reste ne peut contenir aucun ensemble infini connexe ni même σ-connexe. La σ-connexité de S tout entier (et même sa bi-σ-connexité) sera établie dans la suite (voir p. 276). La σ-connexité des ensembles biconnexes est un problème ouvert (voir plus loin, P4).

E6. *Ensemble plan connexe, localement connexe et dont aucun sous-ensemble infini n'est σ-connexe* (exemple récent, dû à Jan Mycielski, non publié).

Les problèmes suivants restent ouverts:

P1. *Est-ce que tout ensemble plan connexe et héréditairement localement connexe est σ-connexe?* (cf. [2], p. 228).

P2. *Est-ce que tout ensemble plan connexe et héréditairement localement connexe est homéomorphe à un sous-ensemble d'un continu plan héréditairement localement connexe?* (Knaster).

Vu T1 et T8, la solution affirmative de P2 entraînerait celle de P1.

P3. *Est-ce que tout $\mathcal{X}$ σ-connexe infini contient un vrai sous-ensem bl σ-connexe infini?* (Jan Mycielski).

En vertu de T4, tel est tout $\mathcal{X}$ σ-connexe infini qui n'est pas connexe. La solution affirmative de P3 pour les $\mathcal{X}$ qui sont des F_σ dans les espaces euclidiens en résulte facilement, tout F_σ de dimension positive contenant un continu de même dimension.

P4. *Est-ce que tout ensemble biconnexe est σ-connexe?*

Démonstration de T3. Commençons par établir le lemme suivant sur les quasi-composantes (une *quasi-composante* d'un point dans $\mathcal{X}$ étant par définition l'intersection de tous les ensembles fermés-ouverts dans $\mathcal{X}$ et qui contiennent ce point; voir [3], p. 92):

A1. *Si $\mathcal{X}$ n'est formé que d'un nombre fini de quasi-composantes, elles sont les composantes de $\mathcal{X}$.*

Les quasi-composantes de $\mathcal{X}$ étant des ensembles fermés dans $\mathcal{X}$ et disjoints (voir [3], p. 93), il suffit d'en établir la connexité dans le cas considéré. Soient donc $Q_1, \dots, Q_n$ les quasi-composantes de $\mathcal{X}$. En supposant que l'on ait pour un $i = 1, \dots, n$ une décomposition

$$Q_i = M \cup N\,, \tag{3}$$

ces sommandes étant séparés et non-vides, on aurait la décomposition $\mathcal{X} = M \cup (N \cup \bigcup_{j\neq i} Q_j)$ en deux ensembles fermés dans $\mathcal{X}$, disjoints (donc fermés-ouverts dans $\mathcal{X}$) et non-vides, ce qui est en contradiction avec l'égalité (3) d'après laquelle les points de N sont situés dans la même quasi-composante Q_i de $\mathcal{X}$ que ceux de M, donc dans tout sous-ensemble fermé-ouvert de $\mathcal{X}$ qui contient ces derniers.

Le théorème T3 en résulte comme suit:

La présence dans $\mathcal{X}$ d'une infinité de composantes y entraînerait en vertu de A1 celle d'une infinité de quasi-composantes. $\mathcal{C}$ étant le discontinu de Cantor, il existe pour tout $\mathcal{X}$ (voir [3], p. 93) une fonction continue f transformant $\mathcal{X}$ en sous-ensemble $f(\mathcal{X})$ de $\mathcal{C}$ de façon que les ensembles $f^{-1}(y)$ où $y \in f(\mathcal{X})$ sont des quasi-composantes de $\mathcal{X}$. L'ensemble $f(\mathcal{X})$ serait donc infini et, évidemment, il ne serait pas σ-connexe par suite de la discontinuité de $\mathcal{C}$ en chaque point. Par conséquent, $\mathcal{X}$ n'est pas σ-connexe en vertu de T1.

Démonstration de L3. Soient $\{p_j\}$ et $\{q_j\}$ des suites de points telles que $p_j \in E_j$, $q_j \in E_j$ et $\varrho(p_j, q_j) > \varepsilon$ pour tout $j = 1, 2, \dots$ L'ensemble $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ étant borné par hypothèse, ces suites contiennent des suites partielles convergentes; on peut donc admettre, pour simplifier les notations, qu'elles le sont elles-mêmes. Posons $p = \lim_{j\to\infty} p_j$ et $q = \lim_{j\to\infty} q_j$. On a donc $\varrho(p, q) \geqslant \varepsilon$. Plaçons l'origine du système de coordonnées Oxy au point médian du vecteur $\overrightarrow{pq}$ et assignons à l'axe Oy la direction et l'orientation de ce vecteur. Alors tous les E_j ont des points au-dessous de la droite $y = 0$ et au-dessus de la droite $y = \frac{1}{4}\varepsilon$:

$$E_j \cap \{(x, y)\colon\ y < 0\} \neq 0 \neq E_j \cap \{(x, y)\colon\ \tfrac{1}{4}\varepsilon < y\} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \dots \tag{4}$$

En vertu de l'hypothèse précitée, il existe deux nombres α et β tels que $\alpha < 0 < \beta$ et que

$$\overline{E_j} \subset \{(x, y)\colon\ \alpha < x < \beta\} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \dots \tag{5}$$

Désignons par R le rectangle (frontière et intérieur) ayant pour sommets les points

$$(\alpha, 0)\,, \quad (\alpha, \varepsilon/4)\,, \quad (\beta, 0)\,, \quad (\beta, \varepsilon/4)\,,$$

par V_g et V_d ses côtés verticaux gauche et droit, et par H_i et H_s ses côtés horizontaux inférieur et supérieur respectivement.

Fixons un j. L'ensemble E_j étant connexe par hypothèse, $\overline{E_j}$ est un continu. Par suite de (4) et (5), toute composante de $\overline{E_j} \cap R$ a des points communs avec $H_i \cup H_s$. Si une infinité de ces composantes ont des points communs avec H_i et H_s à la fois, elles constituent une suite infinie $C_1, C_2, \dots$ de continus disjoints tels que $\delta(C_n) \geqslant \varepsilon/4$ pour tout $n = 1, 2, \dots$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \subset \overline{E_j} \cap R \subset \overline{E_j}$; la démonstration est alors achevée. Reste donc le cas dans lequel ces composantes ne sont qu'en nombre fini. Désignons-les par $C_{j1}, \dots, C_{jk_j}$. Désignons en outre par K_j la somme des composantes de $\overline{E_j} \cap R$ qui ont des points communs avec H_i sans en avoir avec H_s et par K^j la somme de celles qui ont des points communs avec H_s sans en avoir avec H_i. On a donc pour tout $j = 1, 2, \dots$

$$C_{j1} \cup \dots \cup C_{jk_j} \subset \overline{E_j}\,, \tag{6}$$

$$K_j \subset R - H_s\,, \quad K^j \subset R - H_i\,, \quad K_j \cap K^j = 0\,, \tag{7}$$

$$\overline{E_j} \cap R = (C_{j1} \cup \dots \cup C_{jk_j}) \cup K_j \cup K^j\,, \tag{8}$$

$$K_j \cap (C_{j1} \cup \dots \cup C_{jk_j}) = 0 = K^j \cap (C_{j1} \cup \dots \cup C_{jk_j})\,. \tag{9}$$

Eliminons le cas où $(\overline{K_j} - K_j) - H_i \neq 0$, car une infinité de composantes de $\overline{E_j} \cap R$ auraient dans ce cas, en vertu de la définition de K_j, des points communs avec le côté H_i et des points limites en dehors de lui; le diamètre de ces composantes dépasserait alors un $\eta > 0$ et leur suite $\{C_n\}$ serait donc une suite de sous-continus de $\overline{E_j}$ satisfaisant à la thèse qu'il s'agissait d'établir. Il en est de même du cas où $(\overline{K^j} - K^j) - H_s \neq 0$. Reste donc le cas dans lequel on a à la fois $\overline{K_j} - K_j \subset H_i$ et $\overline{K^j} - K^j \subset H_s$, d'où en vertu de (7), l'indice j ayant été fixé arbitrairement,

$$\overline{K_j} \cap \overline{K^j} = 0 \quad \text{pour tout} \quad j = 1, 2, \dots \tag{10}$$

Nous allons montrer à présent que

(11) *pour tout $j = 1, 2, \dots$, l'ensemble $E_j \cap (C_{j1} \cup \dots \cup C_{jk_j})$ est une coupure du rectangle R entre les côtés V_g et V_d.*

Supposons en effet qu'il existe un continu $L \subset R$ tel que

(12) $$L \cap E_j \cap (C_{j1} \cup \ldots \cup C_{jk_j}) = 0$$

et que $L \cap V_g \neq 0 \neq L \cap V_d$. Le continu L serait donc un séparateur [1] de la zone illimitée

(13) $$Z = \{(x, y)\colon\ \alpha < x < \beta\}$$

du plan comprise entre les verticales contenant V_g et V_d respectivement. C étant la composante de $Z - L$, qui contient le point $(0, -1)$, on conclut de (12) que

$$E_j \cap (C_{j1} \cup \ldots \cup C_{jk_j}) \subset R - L = R \cap C \cup [R - (L \cup C)]\,,$$

d'où

$$E_j \cap (C_{j1} \cup \ldots \cup C_{jk_j}) = E_j \cap (C_{j1} \cup \ldots \cup C_{jk_j}) \cap R \cap C \cup \cup E_j \cap (C_{j1} \cup \ldots \cup C_{jk_j}) \cap [R - (L \cup C)]\,.$$

Posons

$$M = E_j \cap (C_{j1} \cup \ldots \cup C_{jk_j}) \cap R \cap C\,,$$
$$N = E_j \cap (C_{j1} \cup \ldots \cup C_{jk_j}) \cap [R - (L \cup C)]\,.$$

On a donc $M \cup N = E_j \cap (C_{j1} \cup \ldots \cup C_{jk_j})$. Les ensembles C et $Z - (L \cup C)$ étant ouverts dans Z et disjoints, donc séparés, il en est de même des ensembles $M \subset C$ et $N \subset Z - (L \cup C)$. Considérons les demi-plans ouverts

(14) $$P_- = \{(x, y)\colon\ y < 0\}\,, \qquad P_+ = \{(x, y)\colon\ \tfrac{1}{4}\varepsilon < y\}$$

et posons

(15) $$M^* = M \cup K_j \cup P_-\,, \qquad N^* = N \cup K^j \cup P_+\,.$$

Un calcul facile montre en vertu de (7), (9) et (10) que les ensembles M^* et N^* sont séparés. On a d'autre part, en vertu de (5) et (13), $\overline{E_j} \subset Z$ pour tout $j = 1, 2, \ldots$, d'où en vertu de (8), (13), (14) et (15),

$$\begin{aligned} E_j &= E_j \cap Z \subset (E_j \cap R) \cup P_- \cup P_+ \\ &= (E_j \cap \overline{E_j} \cap R) \cup P_- \cup P_+ \subset [E_j \cap (C_{j1} \cup \ldots \cup C_{jk_j})] \cup K_j \cup K^j \cup P_- \cup P_+ \\ &= M \cup N \cup K_j \cup K^j \cup P_- \cup P_+ = M^* \cup N^*; \end{aligned}$$

[1] Un ensemble $E \subset \mathfrak{X}$ est dit une *coupure* de $\mathfrak{X}$ entre ensembles $A \subset \mathfrak{X}$ et $B \subset \mathfrak{X}$ lorsque $C \cap A \neq 0 \neq C \cap B$ entraîne $C \cap E \neq 0$ pour tout continu $C \subset \mathfrak{X}$ (voir [3], p. 129). L'ensemble $E \subset \mathfrak{X}$ est dit *séparateur* de $\mathfrak{X}$ (entre A et B) lorsque son complément $\mathfrak{X} - E$ n'est pas connexe (entre A et B) (voir [3], p. 96). Les deux notions coïncident en particulier pour E fermés dans les $\mathfrak{X}$ qui sont des continus localement connexes (voir [3], p. 128, 170 et 182).

enfin, $E_j \cap M^* \neq 0 \neq E_j \cap N^*$ en vertu de (4), (14) et (15). L'ensemble E_j ne serait donc pas connexe, contrairement à l'hypothèse.

La proposition (11) étant ainsi établie, nous allons montrer que

(16) *pour tout $j = 1, 2, \ldots$, il existe un indice $h_j \leqslant k_j$ tel que l'ensemble $E_j \cap C_{jh_j}$ est une coupure du rectangle R entre les côtés V_g et V_d.*

En effet, pour tout $j = 1, 2, \ldots$, les continus $C_{j1}, \ldots, C_{jk_j}$ sont par définition disjoints et unissent les côtés H_i et H_s de R. Il existe donc dans R des arcs $A_1, \ldots, A_{k_j-1}$ unissant H_i et H_s, disjoints de tous les continus $C_{j1}, \ldots, C_{jk_j}$ et tels que l'ensemble $R - \bigcup_{i=1}^{k_j-1} A_i$ est formé de k_j composantes $Q_1, \ldots, Q_{k_j}$ où $C_{ji} \subset Q_i$ pour $i = 1, \ldots, k_j$. En supposant donc que, pour aucun de ces i, l'ensemble $E_j \cap C_{ji}$ ne coupe R entre les côtés V_g et V_d, il existerait dans R autant de continus L_i unissant ces côtés et tels que $L_i \cap E_j \cap C_{ji} = 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, k_j$. Le sous-ensemble

$$\bigcup_{i=1}^{k_j} (L_i \cap Q_i) \cup \bigcup_{i=1}^{k_j-1} A_i$$

de R serait alors un continu unissant V_g et V_d et dont l'intersection avec $E_j \cap (C_{j1} \cup \ldots \cup C_{jk_j})$, égale à $\bigcup_{i=1}^{k_j} (L_i \cap E_j \cap C_{ji})$, serait vide, contrairement à (11). La proposition (16) est ainsi établie.

Posons pour $j = 1, 2, \ldots$

(17) $$m_j = \min\{x\colon\ (x, 0) \in C_{jh_j}\}\,, \qquad M_j = \max\{x\colon\ (x, 0) \in C_{jh_j}\}\,.$$

Nous allons montrer que

(18) $$i \neq j \ \textit{ et } \ m_i \leqslant m_j \quad \textit{entraînent} \quad M_i < M_j\,.$$

En effet, (5) et (6) entraînent les inégalités $\alpha < m_i < \beta$ et $\alpha < M_i < \beta$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$ L'ensemble

(19) $$T = \{(x, 0)\colon\ \alpha \leqslant x \leqslant m_i\} \cup C_{ih_i} \cup \{(x, 0)\colon\ M_i \leqslant x \leqslant \beta\}$$

est un continu, le bout droit du premier et le bout gauche du second segment de l'axe Ox, qui figurent dans la somme T, appartenant au continu C_{ih_i} en vertu de (17). Or en supposant que l'on ait simultanément

(20) $$m_i \leqslant m_j \quad \text{et} \quad M_j \leqslant M_i$$

pour un couple d'indices différents i, j, le continu T serait situé dans le rectangle R d'après la définition de R et de $C_{ih_i} \subset R$, et on aurait

(21) $$T \cap V_g \neq 0 \neq T \cap V_d\,.$$

On a en outre $T \cap C_{jh_j} = C_{ih_i} \cap C_{jh_j}$ en vertu de (17), (19) et (20), d'où l'égalité $T \cap E_j \cap C_{jh_j} = C_{ih_i} \cap C_{jh_j} \cap E_j \subset \overline{E_i} \cap E_j = 0$ en vertu de (6) et parce que les ensembles E_i et E_j sont séparés par hypothèse. Le sous-continu T du rectangle R en unirait donc d'après (21) les côtés verticaux sans passer par $E_j \cap C_{jh_j}$, ce qui est cependant impossible en vertu de (16).

L'implication (18) ainsi établie a pour conséquence que ou bien la suite $\{m_j\}$ contient une suite décroissante, ou bien la suite $\{M_j\}$ contient une suite croissante. Par raison de symétrie (l'orientation opposée de l'axe Ox intervertissant le rôle de m_j et M_j), on peut se borner à la première alternative et on peut convenir, pour simplifier les notations, que c'est la suite $\{m_j\}$ elle-même qui est décroissante.

Les côtés H_i et H_s du rectangle R sont unis par le continu C_{jh_j} situé dans $\overline{E_j}$ d'après (6), d'où $C_{jh_j} \cap V_d = 0$ en vertu de (5). U_j étant celle des composantes de $R - C_{jh_j}$ qui contient V_d, on a pour la frontière de U_j relative à R, c'est-à-dire pour l'ensemble $\mathrm{Fr}_R(U_j) = \overline{R - U_j} \cap \overline{U_j}$,

$$\mathrm{Fr}_R(U_j) \subset C_{jh_j} \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

Or $\mathrm{Fr}_R(U_j)$ est un continu par suite de l'unicohérence de R (voir [3], p. 335). S'il n'était pas localement connexe, il contiendrait une suite $\{C_n\}$ de continus disjoints, convergente vers un continu de diamètre positif. Leur diamètre dépasserait alors un $\eta > 0$ à partir d'un n suffisamment élevé et, en tant que sous-continus de C_{jh_j} en vertu de (22), donc de $\overline{E_j}$ en vertu de (6), ils satisferaient à la thèse, ce qui achèverait la démonstration. Ainsi, il ne reste finalement que le cas dans lequel les continus $\mathrm{Fr}_R(U_j)$ sont localement connexes pour tout $j = 1, 2, \ldots$ Mais alors — comme nous allons voir tout à l'heure — *les continus* $C_n = \mathrm{Fr}_R(U_n)$ *satisfont à la thèse.*

En effet, pour tout $n = 1, 2, \ldots$ on a

$$\mathrm{Fr}_R(U_n) \cap H_i \neq 0 \neq \mathrm{Fr}_R(U_n) \cap H_s,$$

car $V_d \subset U_n$ et $V_g \cap U_n = 0$ d'après la définition de U_n. Par conséquent $\delta(C_n) \geqslant \varepsilon/4 > 0$. La condition (2) est satisfaite en vertu de (6) et (22). Pour montrer que les continus C_n sont disjoints, supposons qu'il existe un $p \in C_i \cap C_j$ pour un $i < j$, d'où $p \in \mathrm{Fr}_R(U_i)$. Par suite de la connexité locale de $\mathrm{Fr}_R(U_i)$, le point p est accessible de U_i (voir [7], p. 112), c'est-à-dire qu'il existe un arc A tel que

$$p \in A \subset U_i \cup (p). \tag{23}$$

On peut admettre en outre que $A \cap V_d \neq 0$, puisque U_i est par définition un ensemble ouvert dans le rectangle R et contient V_d. Posons $B = \{(x, 0)\colon a \leqslant x \leqslant m_j\} \cup C_{jh_j} \cup A$. Le bout gauche du segment en { } étant situé sur V_g et le bout droit dans C_{jh_j} en vertu de (17), enfin p appartenant à $C_j = \mathrm{Fr}_R(U_j) \subset C_{jh_j}$ en vertu de (22), B est un continu, $B \subset R$ et $B \cap V_g \neq 0 \neq B \cap V_d$. On a en même temps d'après (17) $C_{ih_i} \cap \{(x, 0)\colon a \leqslant x \leqslant m_j\} = 0$, car $i < j$ entraîne $m_j < m_i$, la suite $\{m_j\}$ étant supposée décroissante. Il en résulte donc, en appliquant (23), que

$$B \cap C_{ih_i} = (C_{jh_j} \cap C_{ih_i}) \cup (A \cap C_{ih_i}) \subset (C_{jh_j} \cap C_{ih_i}) \cup (U_i \cap C_{ih_i}) \cup (p).$$

Or $U_i \cap C_{ih_i} = 0$ par définition et $p \in C_i \cap C_j = \mathrm{Fr}_R(U_i) \cap \mathrm{Fr}_R(U_j) \subset C_{ih_i} \cap C_{jh_j}$ en vertu de (22), d'où $B \cap C_{ih_i} \subset C_{jh_j} \cap C_{ih_i}$ et par conséquent $B \cap E_i \cap C_{ih_i} \subset C_{jh_j} \cap E_i \cap C_{ih_i} \subset \overline{E_j} \cap E_i = 0$ en vertu de (6) et parce que les ensembles E_i et E_j sont séparés par hypothèse. On aurait ainsi $B \cap E_i \cap C_{ih_i} = 0$, ce qui est cependant impossible, l'ensemble $E_i \cap C_{ih_i}$ étant d'après (16) une coupure de R entre les côtés V_g et V_d, que B unit dans R. La supposition que les continus C_n ne sont pas disjoints conduit ainsi à une contradiction.

Démonstration de T8. Désignons par $\mathrm{Dis}(E)$ l'ensemble des points qui sont des composantes de l'ensemble E et commençons par établir le lemme suivant sur les continus héréditairement localement connexes $\mathcal{X}$, pas nécessairement plans:

Λ2. *La connexité locale héréditaire d'un continu* $\mathcal{X}$ *entraîne, pour tout* $\varepsilon > 0$, *l'existence dans tout ensemble* $E \subset \mathcal{X}$ *d'une suite infinie* $\{G_i\}$ *d'ensembles fermés-ouverts* E, *disjoints et tels que* $\delta(G_i) < \varepsilon$ *pour* $i = 1, 2, \ldots$, $\lim\limits_{i\to\infty} \delta(G_i) = 0$ *et* $\mathrm{Dis}(E) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_i$.

On sait en effet (voir [7], p. 93) que, dans un tel $\mathcal{X}$, tout point $p \in \mathrm{Dis}(E)$ a un entourage U_p ouvert dans $\mathcal{X}$, tel que $\delta(U_p) < \varepsilon$ et que $\mathrm{Fr}(U_p) \cap E = 0$. Il en résulte (voir [6], p. 375) l'existence d'une suite d'ensembles $\{V_i\}$ ouverts dans $\mathcal{X}$, disjonts, contenus chacun dans un U_p où $p \in \mathrm{Dis}(E)$, étant tels que $\mathrm{Dis}(E) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i$, $\lim\limits_{i\to\infty} \delta(V_i) = 0$ et ayant pour frontière $\mathrm{Fr}(V_i)$ un sous-ensemble d'une somme finie de celles des U_p, d'où

$$\mathrm{Fr}(V_i) \cap E = 0 \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots \tag{24}$$

Posons $G_i = V_i \cap E$. On a donc $\overline{G_i} \cap E = \overline{V_i \cap E} \cap E \subset \overline{V_i} \cap \overline{E} \cap E = \overline{V_i} \cap E = [V_i \cup \mathrm{Fr}(V_i)] \cap E$, d'où $\overline{G_i} \cap E \subset V_i \cap E = G_i$ en vertu de (24). Les ensembles ouverts G_i sont donc à la fois fermés dans E.

Le théorème T8 résulte de Λ2 comme suit.

$\mathcal{X}$ étant un continu *plan* et héréditairement localement connexe, soit $S \subset X$ un ensemble connexe. Supposons que $S = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, où F_i sont fermés dans S, disjoints et non-vides. Ils sont donc séparés deux à deux. Pour tout $i = 1, 2, \ldots$, il existerait en vertu de A2 (en y posant $E = F_i$) une suite $\{G_{ij}\}$ d'ensembles tels que

$$G_{ij} \subset F_i , \tag{25}$$

$$ij \neq i'j' \quad \text{entraîne} \quad G_{ij} \cap G_{i'j'} = 0 , \tag{26}$$

$$G_{ij} \quad \text{est fermé-ouvert dans} \quad F_i , \tag{27}$$

$$\delta(G_{ij}) < 1/i \quad \text{et} \quad \lim_{j\to\infty} \delta(G_{ij}) = 0 , \tag{28}$$

$$\mathrm{Dis}(F_i) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} G_{ij} . \tag{29}$$

Les composantes de tous les ensembles $F_i - \bigcup_{j=1}^{\infty} G_{ij}$ pour $i = 1, 2, \ldots$ sont séparées deux à deux, les ensembles F_i l'étant par définition. En vertu de (25), (27) et (29) aucune d'elles ne se réduit à un point. En vertu de L4, ces composantes forment donc une suite dénombrable $\{S_k\}$ telle que

$$\lim_{k\to\infty} \delta(S_k) = 0 . \tag{30}$$

Il vient en même temps

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} G_{ij} . \tag{31}$$

Tout S_k étant par définition une composante d'un F_i, qui est fermé dans S par hypothèse, S_k l'est également. En rangeant donc en une suite simple $\{X_n\}$ tous les sommandes du membre droit de l'égalité (31), on aurait donc la décomposition $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ en ensembles fermés dans S. Tout S_k étant par définition disjoint de tout G_{ij}, puisque les F_i sont disjoints, il s'ensuit en vertu de (25) et (26) que les X_n le sont aussi. Il y a parmi eux une infinité de non-vides, tout F_i l'étant par hypothèse. Enfin, on a $\lim_{n\to\infty} \delta(X_n) = 0$ en vertu de (28) et (30). On est parvenu ainsi à une contradiction avec L1.

Démonstration de la σ-connexité de E5. Gardant les notations de [1], p. 241-244, supposons que l'ensemble biconnexe S soit de la forme $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$, les F_i étant fermés dans S, disjoints et non-vides, donc que

$$i \neq j \quad \text{entraîne} \quad F_i \cap \overline{F_j} \cup \overline{F_i} \cap F_j = 0 \tag{32}$$

(la fermeture étant entendue dans le plan). Assignons l'indice 1 à celui des F_i qui contient le point $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Les nombres rationnels du segment $0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}$ de l'axe Oy étant rangés en une suite $\{r_n\}$ posons pour tout $j \neq i$

$$E_{ijn} = \{(x, r_n)\colon (x, r_n) \in \overline{F_i} \cap \overline{F_j}\};$$

tout E_{ijn} est donc un ensemble fermé (dans le plan). Posons en outre

$$Q_{ijn} = \{c\colon c \in \mathcal{C} , L(c) \cap E_{ijn} \neq 0\}$$

($\mathcal{C}$ étant le discontinu de Cantor). On a $Q_{ijn} \subset Q$ et tout Q_{ijn} est non-dense dans $\mathcal{C}$. Ces deux propriétés des ensembles Q_{ijn} se démontrent tout comme les mêmes propriétés des ensembles Q_n ont été démontrées dans [1], p. 242 et 243. L'ensemble P des bouts d'intervalles contigus à $\mathcal{C}$ étant dénombrable, l'ensemble

$$T = P \cup \bigcup_{\substack{i\neq j\\ n=1}}^{\infty} Q_{ijn}$$

est de I^re catégorie dans $\mathcal{C}$. L'ensemble $\mathcal{C} - T$ est donc dense dans $\mathcal{C}$. En vertu des définitions des ensembles Q_{ijn} et T, $c \in \mathcal{C} - T$ entraîne $c \in Q = \mathcal{C} - P$ et

$$L(c) \cap E_{ijn} = 0 \tag{33}$$

pour tous les entiers positifs i, j et n où $i \neq j$. Nous allons en déduire que

$$i \neq j \quad \text{entraîne} \quad L(c) \cap \overline{F_i} \cap \overline{F_j} = 0 \quad \text{pour tout} \quad c \in \mathcal{C} - T . \tag{34}$$

En effet, $p \in L(c) \cap \overline{F_i} \cap \overline{F_j}$ pour un $i \neq j$ entraînerait en vertu de (32) et de la définition de l'ensemble S que le point p est d'ordonnée rationnelle, soit r_n, d'où $p \in L(c) \cap E_{ijn}$ en vertu de la définition des ensembles E_{ijn}, contrairement à (33). L'implication (34) est ainsi établie.

La décomposition supposée de S donne $S \cap L(c) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \cap L(c) \subset \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{F_i} \cap L(c)$. En posant donc

$$V = \bigcap_{i=1}^{\infty} [L(c) - \overline{F_i} \cap L(c)] , \tag{35}$$

on a

$$V \subset L(c) - S \cap L(c) = L(c) - S \quad \text{où} \quad c \in \mathcal{C} - T . \tag{36}$$

Nous allons montrer que

$$S \cap L(c) \subset F_1 \quad \text{pour tout} \quad c \in \mathcal{C} - T . \tag{37}$$

En effet, les ensembles $\overline{F_i} \cap L(c)$ sont disjoints deux à deux en vertu de (34). En supposant donc que $\overline{F_i} \cap L(c) \neq 0$ pour deux valeurs différentes de i, on aurait $V \neq 0$, car en cas contraire le segment $L(c)$ serait, en vertu de la conséquence $L(c) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{F_i} \cap L(c)$ de (35) pour $V = 0$, somme d'une suite d'ensembles fermés et disjoints dont deux au moins ne seraient pas vides — ce qui est impossible en raison de T5. Or V étant d'après (35) un G_δ dans $L(c)$ et dense en soi en raison de (34), l'inégalité $V \neq 0$ est également impossible, car $c \in \mathcal{C} - T$ entraînant $c \in Q$, l'ensemble $L(c) - S$ se composerait pour tout $c \in \mathcal{C} - T$ de points d'ordonnées rationnelles en même temps que $V \subset L(c) - S$ d'après (36). Ainsi, il n'y a qu'une seule valeur de i pour laquelle $\overline{F_i} \cap L(c)$ n'est pas vide. C'est la valeur $i = 1$, car $a \in \overline{F_1}$ et $a \in L(c)$ pour tout $c \in \mathcal{C}$. La propriété (37) de l'ensemble $\mathcal{C} - T$ est donc établie.

Il en résulte, $\mathcal{C} - T$ étant dense dans $\mathcal{C}$, que F_1 l'est dans S. Par conséquent, $F_i = 0$ pour tout $i = 2, 3, \dots$ en vertu de (32), ce qui achève la démonstration de la σ-connexité de S.

Ajoutons pour terminer que l'ensemble biconnexe S est en même temps *bi-σ-connexe*, c'est-à-dire qu'il n'est pas somme de deux ensembles σ-connexes infinis et disjoints. Plus encore, tout comme chacun de sous-ensembles connexes infinis de S, aussi chacun de ses sous-ensembles σ-connexes infinis Σ contient le point a. En effet, $\Sigma \subset S - (a)$ entraîne en vertu de T4 l'existence dans $S - (a)$ d'un sous-ensemble connexe infini, ce qui est cependant impossible (voir [1], p. 244).

Travaux cités

[1] B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fund. Math. 2 (1921), p. 206-255.

[2] B. Knaster, A. Lelek et Jan Mycielski, *Sur les décompositions d'ensembles connexes*, Colloquium Math. 6 (1958), p. 227-246.

[3] C. Kuratowski, *Topologie II*, Warszawa 1952.

[4] S. Mazurkiewicz, *Sur les continus plans non bornés*, Fund. Math. 5 (1924), p. 188-205.

[5] R. L. Moore, *Concerning the sum of a countable number of mutually exclusive continua in the plane*, Fund. Math. 6 (1924), p. 189-202.

[6] G. T. Whyburn, *Concerning hereditarily locally connected continua*, Amer. Jour. Math. 53 (1931), p. 374-384.

[7] — *Analytic topology*, New York 1942.

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU WROCŁAWSKIEGO
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WROCŁAW

Reçu par la Rédaction le 31. 10. 1958

Некоторые обобщения теорем вложения

С. Л. Соболев (Москва-Новосибирск)

Введение

Функции многих переменных, встречающиеся в анализе, обычно трактуются как функции n-мерного вектора в Евклидовом пространстве. Однако, часто такая точка зрения не соответствует сути дела. Бывают случаи, когда роли разных независимых переменных совершенно различны и рассмотрение их всех объединенных в одном пространстве нецелесообразно. Простейшим примером именно такого рода являются, например, коэффициенты квази-линейных уравнений в частных производных 2-го порядка

$$\sum A_{ij}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, x_1, x_2, \dots, x_n\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F .$$

Ясно, что пространственные переменные x_k играют здесь одну роль, а переменные $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$ совершенно другую. Соответственно этому и характер зависимости A_{ij} от этих переменных обычно всегда предполагают различным.

Пусть функция

$$\Phi(u_1, u_2, \dots, u_m \mid x_1, x_2, \dots, x_n)$$

есть функция двух таких групп переменных.

При фиксированных $x_1, x_2, \dots, x_n$ она обращается в функцию m переменных и следовательно каждому вектору x из Евклидова пространства R_n отвечает некоторый элемент соответствующего функционального пространства X функций m переменных $u_1, u_2, \dots, u_m$. Таким образом совершенно естественно рассматривать эту функцию $m+n$ переменных как функцию m переменных со значениями в функциональном пространстве X.

Основные операции анализа, дифференцирование, интегрирование и т. п. для абстрактных функций являются естественным обобщением обычных операций для функций числовых. Однако, как выяснили исследования различных авторов ([4], [5]), такое обобщение часто происходит нетривиальным образом.