Sur la classe de Baire des dérivées de Dini

par

J. Staniszewska (Łódź)

O. Hájek [1] a prouvé que la dérivée $\bar{f}'(x)$ d'une fonction finie appartient à la deuxième classe de Baire. On peut démontrer qu'elle appartient strictement à la deuxième classe de Baire.

THÉORÈME. *Il existe une fonction $\varphi(x)$, remplissant la condition de Lipschitz, telle que $\bar{\varphi}'(x)$ appartient à la deuxieme classe de Baire.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que l'ensemble des points de discontinuité de $\bar{f}'(x)$ est de deuxième catégorie. Dans ce but je profite d'un cas particulier du théorème de Z. Zahorski [2]: *Á tout système fini de noyaux $K_i(s,t)$, $i=1,2,\dots,n$, satisfaisant aux conditions*

$$\int_a^b K_i(s,t)\,dt = 1\,,$$

$$\lim_{s\to\infty} \int_a^{-\delta} + \int_\delta^b |K_i(s,t)|\,dt = 0 \qquad \textit{pour tout} \qquad \delta > 0\,,$$

$$\int_a^b \mathcal{K}_i(s,t)\,dt < C, \quad \text{où} \quad \mathcal{K}_i(s,t) = \begin{cases} \sup\limits_{\theta\in[a,t]} |K_i(s,\theta)| & \textit{pour tout } t\in[a,0)\,, \\ \sup\limits_{\theta\in[t,b]} |K_i(s,\theta)| & \textit{pour tout } t\in[0,b]\,, \end{cases}$$

et à tout ensemble M du type G_δ de mesure nulle correspond une fonction $f(x)$ pour laquelle

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\, g_i(x,s) = \underline{\lim_{s\to\infty}}\, g_i(x,s) = f(x) \qquad \textit{pour tout} \qquad x \notin M\,,$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\, g_i(x,s) - \underline{\lim_{s\to\infty}}\, g_i(x,s) \geqslant \tfrac{1}{2} \qquad \textit{pour tout} \qquad x\in M\,,$$

où

$$g_i(x,s) = \int_a^b f(x+t)\,K_i(s,t)\,dt\,, \qquad a<0<b\,.$$

En choisissant convenablement les noyaux $K_i(s,t)$, $i=1,2,\dots,n$, on peut démontrer que la fonction $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, qui satisfait à la condition de Lipschitz, remplit également la condition $\overline{\varphi}'(x)-\underline{\varphi}'(x)\geqslant\frac{1}{2}$ pour tout $x\in M$. Soit

$$\left.\begin{aligned} K_1(s,t) &= \begin{cases} s & \text{pour tout} \quad t\in(0,1/s), \\ 0 & \text{pour tout} \quad t\notin(0,1/s), \end{cases} \\ K_2(s,t) &= \begin{cases} s & \text{pour tout} \quad t\in(-1/s,0), \\ 0 & \text{pour tout} \quad t\notin(-1/s,0), \end{cases} \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad s\geqslant 1.$$

Les conditions du théorème cité sont remplies et en vertu de ce théorème on a:

$$\begin{aligned} g_1(x,s) &= s\int_0^{1/s} f(x+t)\,dt = s\int_x^{x+1/s} f(T)\,dT \\ &= s\left[\int_a^{x+1/s} f(T)\,dT - \int_a^x f(T)\,dT\right] = \frac{\varphi(x+1/s)-\varphi(x)}{1/s}, \end{aligned}$$

$$\lim_{s\to\infty} g_1(x,s) = \varphi'_+(x) = f(x) \quad \text{pour tout} \quad x\notin M,$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\, g_1(x,s) - \underline{\lim_{s\to\infty}}\, g_1(x,s) = \overline{\varphi}'_+ - \underline{\varphi}'_+ \geqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{pour tout} \quad x\in M.$$

De même j'obtiens

$$\lim_{s\to\infty} g_2(x,s) = \varphi'_-(x) = f(x) \quad \text{pour tout} \quad x\notin M,$$

$$\overline{\lim_{s\to\infty}}\, g_2(x,s) - \underline{\lim_{s\to\infty}}\, g_2(x,s) = \overline{\varphi}'_- - \underline{\varphi}'_- \geqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{pour tout} \quad x\in M,$$

mais

$$\overline{\varphi}'(x)-\underline{\varphi}'(x) = \max(\overline{\varphi}'_+,\overline{\varphi}'_-) - \min(\underline{\varphi}'_+,\underline{\varphi}'_-) \geqslant \overline{\varphi}'_+ - \underline{\varphi}'_+ \geqslant \tfrac{1}{2}.$$

Comme ensemble M je prends un ensemble de la classe G_δ de mesure nulle, dense. On peut remarquer que chaque point de l'ensemble M est un point de discontinuité de $\overline{\varphi}(x)$ et de $\underline{\varphi}(x)$. La fonction $\varphi(x)$ remplit la condition de Lipschitz, elle est donc absolument continue dans $[a,b]$ et, par conséquent, on a la relation

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x \varphi'(x)\,dx, \qquad a\leqslant x\leqslant b.$$

Etant donné que $\varphi'(x)$ n'existe pas aux points de l'ensemble M, les fonctions $\overline{\varphi}'(x)$ et $\underline{\varphi}'(x)$ lui sont équivalentes, c'est-à-dire elles lui sont identiques, à un ensemble de mesure nulle près. Par conséquent il vient de même:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(a) + \int_a^x \overline{\varphi}'(x)\,dx, \\ \varphi(x) &= \varphi(a) + \int_a^x \underline{\varphi}'(x)\,dx, \end{aligned}\right\} \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Soit à présent $x_0\in M$. Supposons que x_0 soit un point de continuité p. ex. de la fonction $\overline{\varphi}'(x)$. Alors la fonction $\varphi(x)$, comme intégrale indéfinie de la fonction $\overline{\varphi}'(x)$, aurait au point x_0 une dérivée, ce qui est impossible, car $\overline{\varphi}'(x_0)\neq\underline{\varphi}'(x_0)$. On peut faire le même raisonnement pour la fonction $\underline{\varphi}'(x)$. Etant donné que chaque point de l'ensemble M est un point de discontinuité de $\overline{\varphi}(x)$ et l'ensemble M est de deuxième catégorie, la démonstration est achevée.

On puet renformer l'énoncé comme il suit: *il existe une fonction $\varphi(x)$ remplissant la condition de Lipschitz, pour laquelle ni $\overline{\varphi}'(x)$ ni $\underline{\varphi}'(x)$ ne sont de première classe de Baire.*

Travaux cités

[1] O. Hájek, *Note sur la mesurabilité B de la dérivée supérieure*, Fund. Math. 44 (1957), p. 238-239.

[2] Z. Zahorski, *Sur les ensembles des points de divergence de certaines intégrales singulières*, Ann. Soc. Pol. Math. 19 (1946), p. 66-105.

Reçu par la Rédaction le 5. 11. 1958