Kennzeichnung von Bogen

von

H.-J. Kowalsky (Erlangen)

Als *Bogen* bezeichnet man bekanntlich jeden topologischen Raum der zu dem abgeschlossenen reellen Intervall $\langle 0, 1\rangle$ homöomorph ist. Eine Kennzeichnung der Bogen liefert der folgende Satz von J. Lennes:

Es sei E ein Hausdorffscher Raum mit abzählbarer Basis, und B sei eine Teilmenge von E, die die Punkte a und b enthält. B ist genau dann ein Bogen, wenn B ein Kontinuum ist und wenn es in B eine Relation $\leqslant$ mit folgenden Eigenschaften gibt: (1) *Die Relation $\leqslant$ ist eine lineare Ordnung von B.* (2) *Für jeden Punkt $p \in B$ gilt $a \leqslant p \leqslant b$.* (3) *Gilt $p < q$, so ist die Menge $\{x: p \leqslant x \leqslant q\}$ abgeschlossen.*

Diese Charakterisierung ist deswegen wenig befriedigend, weil in den Voraussetzungen die Existenz einer Ordnungsrelation gefordert wird. Nachstehend soll daher ein anderes Kriterium angegeben werden, das eine Kennzeichnung der Bogen durch innere, rein topologische Eigenschaften gestattet. Interessant ist dabei, daß die wesentlichen Voraussetzungen aus reinen Zusammenhangseigenschaften bestehen.

Satz 1. *Ein topologischer Raum E ist dann und nur dann homöomorph zu $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 0, 1)$ oder $(0, 1)$, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:*

(1) *E ist ein separabler T_1-Raum mit mindestens zwei Punkten.*

(2) *E ist zusammenhängend und lokal zusammenhängend.*

(3) *Unter je drei nicht-leeren, zusammenhängenden, echten Teilmengen von E gibt es stets zwei, die E nicht überdecken.*

Beweis. Die Bedingungen (1) und (2) sind offenbar notwendig. Im Falle des Intervalls $\langle 0, 1\rangle$ kann man die Notwendigkeit der Eigenschaft (3) folgendermaßen erkennen: Eine zusammenhängende echte Teilmenge von $\langle 0, 1\rangle$ kann die Punkte 0 und 1 nicht gleichzeitig enthalten. Unter je drei nicht-leeren, zusammenhängenden, echten Teilmengen von $\langle 0, 1\rangle$ gibt es daher zwei, die den einen Endpunkt nicht enthalten. In den anderen beiden Fällen schließt man analog, wobei an Stelle des Enthaltenseins eine Häufungseigenschaft zu treten hat. Da die Bedingungen (1)-(3) topologisch invariant sind, ist damit ihre Notwendigkeit allgemein nachgewiesen.

Der Beweis, daß die Eigenschaften (1)-(3) umgekehrt auch hinreichend sind, wird in mehrere Hilfssätze zerlegt. Dabei wird in den Hilfssätzen 1-6 die Voraussetzung der Separabilität nicht benutzt.

LEMMA 1. *Es sei p ein beliebiger Punkt von E. Ist dann K eine Komponente des Komplements Cp, so gilt $\overline{K} = K \cup \{p\}$.*

Beweis. Wegen (T_1) ist Cp eine offene Menge. Und da E lokal zusammenhängend ist, ist auch K eine offene Teilmenge von E. Als Komponente ist K abgeschlossen in Cp. Daher gilt $\overline{K} \subseteq K \cup \{p\}$. Aus $p \notin \overline{K}$ würde aber sogar die Abgeschlossenheit von K in E folgen. K wäre dann eine gleichzeitig offene und abgeschlossene (nicht leere) echte Teilmenge von E, was dem Zusammenhang von E widerspricht.

LEMMA 2. *Für einen beliebigen Punkt $p \in E$ gilt: Cp besitzt höchstens zwei Komponenten.*

Beweis. Da nach Lemma 1 die abgeschlossene Hülle jeder Komponente von Cp den Punkt p enthält, ist die Vereinigung der Hüllen beliebig vieler Komponenten von Cp eine zusammenhängende Menge. Es werde angenommen, daß Cp mehr als zwei Komponenten besitzt. Dann seien K_1 und K_2 zwei dieser Komponenten, und V sei die Vereinigung der Hüllen aller übrigen Komponenten von Cp. Setzt man

$$M_1 = \overline{K}_1 \cup V, \quad M_2 = \overline{K}_2 \cup V, \quad M_3 = \overline{K}_1 \cup \overline{K}_2,$$

so sind diese Mengen nicht leer, zusammenhängend und echt in E enthalten. Im Widerspruch zu (3) überdecken jedoch bereits je zwei von ihnen ganz E.

LEMMA 3. *Es gibt höchstens zwei Punkte in E, deren Komplement zusammenhängend ist.*

Beweis. Wären die Komplemente dreier Punkte zusammenhängend, so hätte man in ihnen drei nicht-leere, zusammenhängende, echte Teilmengen von E, von denen je zwei bereits E überdecken. Widerspruch zu (3)!

Ist p ein Punkt, dessen Komplement in zwei Komponenten zerfällt, so sollen diese Komponenten mit K_p und K'_p bezeichnet werden. Ist jedoch Cp zusammenhängend, so sollen K_p und K'_p (unabhängig von der Reihenfolge) die Mengen Cp und $\emptyset$ bedeuten. ($\emptyset$ = leere Menge.)

LEMMA 4. *Für zwei verschiedene Punkte $p, q \in E$ gilt: Genau eine der Mengen K_p, K'_p ist in K_q oder in K'_q enthalten.* (Nicht-ausschließendes „oder".)

Beweis. Ist Cp zusammenhängend, so ist Cp wegen $q \in Cp$ weder in K_q noch in K'_q, $\emptyset$ aber in beiden Mengen enthalten. Zweitens sei Cp unzusammenhängend. Die Bezeichnungen seien so gewählt, daß $p \in K_q$ und $q \in K_p$ gilt. Wegen $q \in K_p$ ist K_p weder in K_q noch in K'_q enthalten.

Wegen $q \notin K'_p$ gilt $K'_p = (K'_p \cap K_q) \cup (K'_p \cap K'_q)$. Die rechts stehenden Durchschnitte sind punktfremde offene Mengen. Da aber K'_p zusammenhängend ist, muß einer dieser Durchschnitte leer sein. Aus $K'_p \cap K_q = \emptyset$ folgt dann $K'_p \subseteq K'_q$ und aus $K'_p \cap K'_q = \emptyset$ entsprechend $K'_p \subseteq K_q$.

Da ein endlicher T_1-Raum notwendig diskret topologisiert ist und daher nur zusammenhängend sein kann, wenn er aus genau einem Punkt besteht, enthält E unendlich viele Punkte. Wegen Lemma 3 kann man daher einen festen Punkt $e \in E$ so auswählen, daß Ce nicht zusammenhängend ist. Die Bezeichnung der Mengen K_p, K'_p soll jetzt in folgender Weise normiert werden: Nach Lemma 4 ist höchstens eine der Mengen K_p, K'_p in K_e enthalten. Wenn nun eine dieser beiden Mengen in K_e enthalten ist, so soll gerade sie mit K_p bezeichnet werden. Im anderen Fall ist K_p oder K'_p in K'_e enthalten. Dann aber kann K'_e weder in K_p noch in K'_p enthalten sein. (Hierbei wird benutzt, daß K'_e nicht leer ist.) Wiederum nach Lemma 4 muß daher $K_e \subseteq K_p$ oder $K_e \subseteq K'_p$ gelten. In diesem zweiten Fall soll die Bezeichnung so gewählt werden, daß $K_e \subseteq K_p$ gilt. Nach dieser Bezeichnungsfestsetzung tritt also genau einer der beiden Fälle $K_p \subseteq K_e$ bzw. $K_e \subseteq K_p$ auf.

LEMMA 5. *Definiert man für Punkte $p, q \in E$ die Relation $p \leqslant q$ durch $K_p \subseteq K_q$, so ist $\leqslant$ eine lineare Ordnung von E.*

Beweis. Aus $p \leqslant q$ und $q \leqslant p$ folgt $K_p = K_q$ und also auch $\overline{K}_p = \overline{K}_q$. Nach Lemma 1 gilt $\overline{K}_p = K_p \cup \{p\}$ und $\overline{K}_q = K_q \cup \{q\}$. Man erhält $K_p \cup \{p\} = K_p \cup \{q\}$, wegen $p \notin K_p$ also $p = q$. Die Reflexivität und Transitivität der Relation ergibt sich unmittelbar aus ihrer Definition. Schließlich werde angenommen, daß weder $p \leqslant q$ noch $q \leqslant p$ gilt. Dann sind die Mengen

$$M_1 = K_p \cup \overline{K}'_q \quad \text{und} \quad M_2 = \overline{K}'_p \cup K_q$$

jedenfalls nicht leer. Da K_p nicht in K_q enshalten ist, gilt $K_p \cap \overline{K'_q} \neq \emptyset$. Daher ist M_1 auch zusammenhängend. Entsprechend ergibt sich der Zusammenhang von M_2. Schließlich sind M_1 und M_2 auch echte Teilmengen von E, weil z. B. aus $M_1 = E$ im Widerspruch zur Annahme $K_q = C\overline{K'_q} \subseteq K_p$ folgen würde. Es sind nun zwei Fälle möglich: (a) $K_p \subseteq K_e$. Dann gilt auch $K_q \subseteq K_e$, weil andernfalls $K_e \subseteq K_q$ gelten müßte, woraus im Widerspruch zur Annahme $K_p \subseteq K_q$ folgen würde. Es ergibt sich $\overline{K'_e} \subseteq \overline{K'_p} \cap \overline{K'_q}$, und die Mengen M_1, M_2 und K_e widersprechen der vorausgesetzten Eigenschaft (3). Gilt Fall (a) nicht, so muß (b) $K_e \subseteq K_p$ erfüllt sein. Ebenso wie vorher schließt man dann auf $K_e \subseteq K_q$, und jetzt widersprechen die Mengen M_1, M_2 und K'_e der Eigenschaft (3). Daher gilt stets $p \leqslant q$ oder $q \leqslant p$.

Ist Cp zusammenhängend, so ist p offenbar Anfangs- oder Endpunkt der so geordneten Menge E. – Jede Ordnungsrelation definiert in bekannter Weise eine Ordnungstopologie in der betreffenden Menge.

LEMMA 6. *Die gegebene Topologie τ von E stimmt mit der Ordnungstopologie der nach Lemma 5 geordneten Menge E überein.*

Beweis. Zunächst sei p weder Anfangs- noch Endpunkt; d. h. Cp sei unzusammenhängend. Sind dann a und b zwei Punkte aus E mit $a<p<b$, so ist das „Intervall“ $(a, b) = \{q\colon a<q<b\}$ eine offene Umgebung von p bei der Ordnungstopologie. Es gilt $(a, b) = K'_a \cap K_b$. Da aber die Mengen K'_a und K_b wegen des lokalen Zusammenhangs von E als Komponenten offener Mengen selbst offen sind, ist (a, b) auch eine offene Umgebung von p hinsichtlich τ. Umgekehrt sei U eine offene Umgebung von p hinsichtlich τ. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann U als zusammenhängend vorausgesetzt werden. Nach Lemma 1 gilt $p \in \overline{K}_p$ und $p \in \overline{K'_p}$. Daher gibt es Punkte $a, b \in U$ mit $a<p<b$. Kann man $(a, b) \subseteq U$ nachweisen, so ist U auch eine Umgebung von p bei der Ordnungstopologie, und die Behauptung ist bewiesen. Es werde angenommen, daß $(a, b) \subseteq U$ nicht gilt. Dann gibt es ein $q \in (a, b)$ mit $q \notin U$. Es gilt $U = (U \cap K_q) \cup (U \cap K'_q)$. Die rechts stehenden Durchschnitte sind offene Mengen und wegen $a \in U \cap K_q$ bzw. $b \in U \cap K'_q$ auch nicht leer. Dies ist ein Widerspruch dazu, daß U als zusammenhängend vorausgesetzt wurde.

Ist p Anfangs- oder Endpunkt, so kann in analoger Weise geschlossen werden.

LEMMA 7. *Es sei A eine linear geordnete unendliche Menge. Ist dann A hinsichtlich der Ordnungstopologie ein separabler und zusammenhängender T_1-Raum, so ist A homöomorph zu $(0,1)$, $\langle 0,1)$ oder $\langle 0,1\rangle$.*

Da der Beweis dieses Lemmas völlig analog zu dem Beweis des Satzes von J. Lennes verläuft, soll er hier nur angedeutet werden (vgl. etwa: G. Nöbeling, *Grundlagen der analytischen Topologie*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954, S. 122):

B sei eine abzählbare dichte Teilmenge von A, die den Anfangs- und Endpunkt von A (falls vorhanden) nicht enthält. Weiter sei $b_1, b_2, \ldots$ eine feste Abzählung von B und $r_1, r_2, \ldots$ eine feste Abzählung der Menge R der rationalen Zahlen aus $(0,1)$. Durch Induktion kann man dann eine streng monotone Abbildung φ von B auf R konstruieren. Diese Abbildung läßt sich in einfacher Weise zu einer ebenfalls streng monotonen Abbildung ψ von ganz A auf $(0,1)$, $\langle 0,1)$ bzw. $(0,1\rangle$ oder $\langle 0,1\rangle$ fortsetzen. Welcher dieser Fälle eintritt, hängt davon ab, ob A einen Anfangs- oder Endpunkt besitzt. Wegen der strengen Monotonie ist ψ dann eine topologische Abbildung.

Der Beweis des Hauptsatzes folgt nun unmittelbar aus Lemma 1-7.

Die Ausschaltung der Fälle $\langle 0,1)$ und $(0,1)$ kann durch eine Abänderung der Eigenschaft (3) erreicht werden.

SATZ 2. *Der topologische Raum E ist genau dann ein Bogen, wenn er außer (1) und (2) noch die folgende Eigenschaft besitzt:*

(3′) *Es gibt zwei Punkte a und b in E, so daß E die einzige zusammenhängende Teilmenge von sich ist, die a und b enthält.*

Beweis. Aus (3′) folgt, daß eine zusammenhängende echte Teilmenge von E niemals die Punkte a und b gleichzeitig enthalten kann. Ebenso wie oben kann man daher auf die Gültigkeit von (3) schließen. Außerdem müssen die Punkte a und b bei der dann resultierenden linearen Ordnung von E als Anfangs- bzw. Endpunkt auftreten, weil andernfalls $\{p\colon a \leqslant p \leqslant b\}$ eine zusammenhängende echte Teilmenge von E wäre, die a und b enthält.

Die Eigenschaft (3′) kennzeichnet E in einem gewissen Sinn als eine minimale zusammenhängende Menge. Auch (3) besitzt diese Bedeutung. Nur ist dort wegen des eventuellen Fehlens von Endpunkten keine entsprechend anschauliche Formulierung möglich.

Reçu par la Rédaction le 27. 11. 1957