Sur la vitesse de la croissance des suites infinies d'entiers positifs I

(Echelle des vitesses)

par

J. Popruženko (Łódź)

1. Soit $\mathfrak{M}$ l'espace composé de toutes les suites infinies d'entiers positifs convergentes au sens large, c'est-à-dire des suites qui soit tendent vers l'infini, soit deviennent stationnaires à partir d'un certain terme.

$s = (n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots)$ et $t = (m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots)$ étant deux éléments de $\mathfrak{M}$, nous écrirons

$$s \gg t \tag{1.1}$$

lorsque

$$\lim_{i\to\infty} \frac{n_i}{m_i} = \infty\,, \tag{1.2}$$

et dans ce cas seulement. Nous dirons alors que la vitesse de la croissance de la suite s dépasse celle de t.

Deux suites s et $s' = (n'_1, n'_2, \ldots, n'_i, \ldots)$ seront dites équivalentes lorsque

$$0 < \varliminf_{i\to\infty} \frac{n_i}{n'_i} \leqslant \varlimsup_{i\to\infty} \frac{n_i}{n'_i} < \infty\,.$$

On voit que la relation (1.1) subsiste lorsqu'on y remplace s ou t, ou s et t simultanément, par des suites équivalentes (¹); de même, on aperçoit que toutes les suites stationnaires sont équivalentes et que la formule (1.2), donc aussi (1.1), est remplie par toute suite s tendant vers l'infini, lorsque t est stationnaire. (Comparer [2], p. 309—310.)

La relation (1.1), transitive et non-refléxive, établit dans $\mathfrak{M}$ un ordre partiel; démontrons qu'elle jouit de la propriété suivante:

(a) *M étant un ensemble au plus dénombrable $\subset \mathfrak{M}$, soit t un élément de $\mathfrak{M}$ tel que $M \gg t$ (²). Alors il existe un $s^* \in \mathfrak{M}$ satisfaisant à la condition*

$$M \gg s^* \gg t\,. \tag{1.3}$$

(¹) E. Marczewski a aperçu que l'implication inverse est aussi vraie: lorsque $y \gg s$ entraîne $y \gg s'$ et réciproquement, les suites s et s' remplissent l'inégalité du texte.

(²) C'est-à-dire que $p \gg t$ pour tout $p \in M$.

Etablissons d'abord deux cas particuliers de cette proposition, notés ci-dessous comme (α_i) $(i=1,2)$.

(α_1) *L'ensemble M est fini.*

Soient $s_k=(n_1^k, n_2^k, \ldots, n_i^k, \ldots)$, $k=1,2,\ldots,l$, tous les éléments de M.

Un s^* satisfaisant à (1.3) existe sûrement lorsque M se compose d'un seul élément $s_1=s$; on a alors

$$s \gg s^* \gg t. \tag{1.4}$$

Si $l>1$, on pose $n_i=\min\{n_i^1, n_i^2, \ldots, n_i^l\}$ et $s=(n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots)$; on a $s\gg t$, et une suite s^* satisfaisant à (1.4) satisfait à plus forte raison à (1.3).

(α_2) *L'ensemble M étant infini, ses éléments, que nous supposons rangés en une suite infinie $\{s_k\}$, satisfont à la condition supplémentaire que voici:*

$$s_1 \gg s_2 \gg \ldots \gg s_k \gg \ldots \gg t. \tag{1.5}$$

Soient

$$s_k=(n_1^k, n_2^k, \ldots, n_i^k, \ldots) \quad (k=1,2,\ldots) \tag{1.6}$$

et

$$t=(m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots).$$

En conséquence de (1.5) (on s'appuit constamment sur (1.2)), on peut déterminer une suite d'indices $\{i_k\}$ de façon à satisfaire aux conditions:

1° $1<i_k<i_{k+1}$,
2° $n_i^k>2n_i^{k+1}$,
3° $n_i^{k+1}>(k+1)m_i$,

pour $i\geqslant i_k$, $k=1,2,\ldots$

Cela étant, on définit la suite $s^*=(n_1^*, n_2^*, \ldots, n_i^*, \ldots)$ en posant $n_i^*=n_i^1$ pour $1\leqslant i<i_1$ et $n_i^*=n_i^{k+1}$ pour $i_k\leqslant i<i_{k+1}$ $(k=1,2,\ldots)$.

On vérifie sans peine que, la relation (1.5) admise, cette suite satisfait à (1.3). (Comparer [2], p. 333—334.)

On démontre le cas général en raisonnant comme il suit.

Les éléments de M étant toujours supposés rangés en suite,

$$s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots,$$

soit $\bar{s}_1$ un élément de $\mathfrak{M}$ tel que $s_1\gg\bar{s}_1\gg t$; d'après (α_1), un tel $\bar{s}_1$ existe. Soit $\bar{s}_2$ un élément satisfaisant aux conditions $s_i\gg\bar{s}_2\gg t$ pour $i=1,2$ et $\bar{s}_1\gg\bar{s}_2$; un $\bar{s}_2$ existe pour les mêmes raisons que $\bar{s}_1$. En répétant le raisonnement, on obtient une suite infinie $\{\bar{s}_k\}$ d'éléments de $\mathfrak{M}$ satisfaisant aux conditions

$$\bar{s}_1\gg\bar{s}_2\gg\ldots\gg\bar{s}_k\gg\ldots\gg t \tag{1.7}$$

et

$$s_i\gg\bar{s}_k \quad \text{pour} \quad i\leqslant k \quad (k=1,2,\ldots). \tag{1.8}$$

En vertu de (1.7) et (α_2), il existe un s^* tel que

$$\bar{s}_k\gg s^*\gg t \quad (k=1,2,\ldots).$$

D'après (1.8), ceci démontre (1.3).

La propriété (α) est ainsi établie (comparer [1], p. 244).

Remarquons qu'elle s'est montrée équivalente aux propriétés (α_1)-(α_2) dans leur ensemble.

L'élément t dans (1.3) puisse être stationnaire; de là on déduit (vu une remarque faite au début) la propriété:

(A) *N étant un ensemble au plus dénombrable formé d'éléments non stationnaires de $\mathfrak{M}$, il existe un élément non stationnaire q tel que $N\gg q$.*

Pour le cas où $M\ll t$ on obtient des inégalités analogues; pour le moment, nous n'en aurons besoin que de celle-ci:

(B) *N étant un ensemble au plus dénombrable formé d'éléments de $\mathfrak{M}$, il existe un élément p de $\mathfrak{M}$ tel que $N\ll p$.*

En effet, les éléments s_k $(k=1,2,\ldots)$ de N supposés représentés par (1.6), il suffit, pour justifier (B), de poser $p_i=n_i^1n_i^2\ldots n_i^i\cdot i$ et $p=(p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots)$.

Cela posé, soit $\{a_\xi\}_{\xi<\varphi}$ une suite transfinie d'éléments de $\mathfrak{M}$.

Nous dirons qu'une telle suite est bien ordonnée en type φ selon la relation (1.1) lorsque $a_\xi\gg a_{\xi'}$ pour $\xi<\xi'$.

Elle sera dite bien ordonnée en type φ selon la relation d'ordre inverse de (1.1) lorsque $\xi<\xi'$ entraîne $a_\xi\ll a_{\xi'}$ (comp. [3], p. 319).

D'après ces dénominations, on conclut des propriétés (A) et (B) que chaque ensemble ordonné par la relation $\gg$ en type d'ordre $\omega_0^*+\omega_0$, savoir chaque ensemble de la forme

$$\ldots\gg a_n\gg a_{n-1}\gg\ldots\gg a_1\gg b_0\gg\ldots\gg b_n\gg\ldots \quad (n<\omega_0),$$

est prolongeable dans les deux sens de façon que voici:

$$a_{\omega_0}\gg\ldots\gg a_n\gg a_{n-1}\gg\ldots\gg a_1\gg b_0\gg\ldots\gg b_n\gg\ldots\gg b_{\omega_0}.$$

Par contre, en admettant l'hypothèse du continu, on peut démontrer qu'il existe d'ensembles non prolongeables en ce sens du mot de type $\omega_1^*+\omega_1$. Plus précisément:

Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble E de $\mathfrak{M}$ qui est ordonné selon la relation (1.1) en type d'ordre $\omega_1^*+\omega_1$ et qui jouit de la propriété suivante:

(π) *Quel que soit l'élément p de $\mathfrak{M}$, pourvu qu'il ne soit pas stationnaire, on peut trouver deux éléments de E, s et t, dépendant de p, de sorte qu'ils satisfassent à la condition*

$$t\gg p\gg s \text{ [3]}. \tag{1.9}$$

[3] A paraître dans le Colloquium Mathematicum.

Un tel ensemble nous permettrait d'évaluer, en sens de la formule (1.9), la vitesse de la croissance de tout élément non stationnaire de $\mathcal{M}$, qu'il appartienne à E ou non; à ce point de vue on pourrait dire que l'ensemble E représente une échelle complète des vitesses de croissance des suites non stationnaires appartenant à $\mathcal{M}$.

Dans la Note présente, je m'occupe des conditions intrinsèques de l'existence, dans l'espace $\mathcal{M}$, d'une telle échelle.

Le problème peut être mis sous la forme un peu plus générale que voici:

Convenons que le symbole $\mathcal{M}$ désigne *un certain* espace se composant de suites convergentes au sens large et assujetti aux conditions (A) et (B); il existe de tels espaces, car celui de toutes les suites convergentes au sens large en présente un exemple, comme nous l'avons démontré plus haut.

Il est à caractériser les espaces $\mathcal{M}$ dans lesquels une échelle complète des vitesses existe.

2. Dans ce but, nous devons étudier certaines propriétés des relations d'ordre partiel.

Soit $\mathcal{N}$ un espace abstrait de puissance $\aleph_\nu$, ϱ — une relation d'ordre partiel existant dans $\mathcal{N}$. Cette relation, qui est par définition transitive et non-refléxive, est supposée assujettie à la condition suivante:

(α^*) *Quelle que soit la suite $a_0, a_1, a_2, \ldots$ d'éléments de $\mathcal{N}$, finie ou dénombrable, bien ordonnée selon ϱ en type d'ordre δ, $1 \leqslant \delta \leqslant \omega_0$, il existe un élément b de $\mathcal{N}$ tel que $a_n \varrho b$ pour $n < \delta$.*

Pour de telles relations on a le théorème suivant:

Théorème I. *Il existe une suite transfinie*

$$\{a_\xi\}_{\xi<\omega_\alpha} \quad (1 \leqslant \alpha \leqslant \nu) \tag{2.1}$$

formée d'éléments de $\mathcal{N}$, bien ordonnée en type d'ordre ω_α selon la relation ϱ et non-bornée selon la même relation [4].

Quant à la démonstration, voir [3], p. 320-322 (construction de la suite (5)).

Supposons maintenant que la relation ϱ satisfasse à la condition que voici:

(A*) *P étant un ensemble au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{N}$, il existe un élément q, $q \in \mathcal{N}$, tel que $P \varrho q$.*

Ceci implique (α^*); par conséquent, le Théorème I est vrai pour les relations assujetties à (A*). Pour ces relations démontrons le

[4] C'est-à-dire qu'il n'existe aucun élément b de $\mathcal{N}$ tel que $a_\xi \varrho b$ pour $\xi < \omega_\alpha$.

Théorème II. *Pour qu'il existe une suite transfinie*

$$\{d_\xi\}_{\xi<\omega_\nu} \tag{2.2}$$

formée d'éléments de $\mathcal{N}$, bien ordonnée selon la relation ϱ en type d'ordre ω_ν et satisfaisant à la condition:

(*) *Quel que soit $a \in \mathcal{N}$, il existe un terme $d_{\xi'}$ de (2.2) tel que $a \varrho d_{\xi'}$, il suffit et — lorsque $\aleph_\nu = \overline{\overline{\mathcal{N}}}$ est un aleph régulier — il faut que l'on ait $\alpha = \nu$ pour chaque suite (2.1) satisfaisant aux conditions du Théorème I.*

Démonstration. I. *La condition est suffisante.* Supposons qu'il n'y ait pas, dans $\mathcal{N}$, d'autres suites satisfaisant aux conditions du Théorème I que celles de la forme $\{a_\xi\}_{\xi<\omega_\nu}$.

Dans ce cas, il n'existe qu'un seul nombre initial, ω_ν, qui puisse figurer dans (2.1); il est donc nécessairement régulier.

Démontrons en premier lieu que, dans ces conditions, on a la propriété suivante:

(i) *M étant un sous-ensemble de $\mathcal{N}$ de puissance $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathcal{N}}}$, il existe un élément q de $\mathcal{N}$ tel que $M \varrho q$.*

En effet, supposons que, pour un certain M, un tel q n'existe pas. Dans cette hypothèse il existe, comme on le vérifie sans peine, un nombre cardinal $\mathfrak{m}_0$ et un ensemble $M_0 \subset \mathcal{N}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1. $\overline{\overline{M}}_0 = \mathfrak{m}_0 \leqslant \overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathcal{N}}}$.
2. Il n'existe aucun q pour lequel on aurait $M_0 \varrho q$.
3. Quel que soit N satisfaisant aux conditions $N \subset \mathcal{N}$ et $\overline{\overline{N}} < \mathfrak{m}_0$, on a pour un q convenablement choisi $N \varrho q$.

D'après la condition 2. rapprochée de (A*), l'ensemble M_0 est indénombrable; soit

$$p_0, p_1, \ldots, p_\xi, \ldots \quad (\xi < \omega_\lambda;\ 1 \leqslant \lambda < \nu)$$

une suite transfinie composée de tous ses éléments distincts.

En procédant par induction, on détermine une suite

$$q_0, q_1, \ldots, q_\xi, \ldots \quad (\xi < \omega_\lambda)$$

d'éléments de $\mathcal{N}$ satisfaisant aux conditions:

$$p_{\xi'} \varrho q_\xi \quad \text{pour} \quad \xi' \leqslant \xi, \quad 0 \leqslant \xi < \omega_\lambda,$$
$$q_0 \varrho q_1 \varrho \ldots \varrho q_\xi \varrho \ldots \quad (\xi < \omega_\lambda);$$

cela est possible en vertu de la condition 3.

Il en résulte d'après 2. qu'il n'existe aucun $b \in \mathcal{N}$ tel que

$$q_\xi \varrho b \quad \text{pour} \quad \xi < \omega_\lambda.$$

La suite $\{q_\xi\}_{\xi<\omega_\lambda}$ satisferait alors aux conditions du Théorème I sans être de puissance $\overline{\omega}_\nu = \aleph_\nu$, contrairement à l'hypothèse faite au début.

La propriété (i) est ainsi établie.

Cela étant, soit

$$b_0, b_1, \ldots, b_\eta, \ldots \quad (\eta < \omega_\nu) \tag{2.3}$$

une suite transfinie formée de tous les éléments distincts de $\mathcal{N}$.

Définissons une suite de type ω_ν formée d'indices croissants η^ξ $(\xi < \omega_\nu)$ en procédant comme il suit.

Posons $\eta_0 = 0$ et soit ξ un nombre ordinal satisfaisant à l'inégalité $0 < \xi < \omega_\nu$. Supposons que l'on ait déjà défini les indices η_ζ pour tout $\zeta < \xi$ de façon à satisfaire aux conditions $\eta_\zeta < \eta_{\zeta'}$ et $b_{\eta_\zeta} \varrho\, b_{\eta_{\zeta'}}$ pour $\zeta < \zeta'$. Comme $\overline{\overline{\xi}} < \aleph_\nu$, la puissance de l'ensemble des termes de la suite $\{\eta_\zeta\}_{\zeta<\xi}$ satisfait à la même inégalité. Soit η' le premier nombre ordinal satisfaisant à l'inégalité $\eta_\zeta < \eta'$ pour $0 \leqslant \zeta < \xi$. Les η_ζ étant $< \omega_\nu$, on a nécessairement, en vertu de la régularité établie du nombre ω_ν, l'inégalité $\eta' < \omega_\nu$. La puissance de l'ensemble des termes de la suite $\{b_\eta\}_{0\leqslant\eta<\eta'}$ est donc $< \aleph_\nu = \overline{\overline{\mathcal{N}}}$, d'où il résulte d'après la propriété (i) qu'il existe un élément b^* de $\mathcal{N}$ tel que $b_\eta\, \varrho\, b^*$ pour $0 \leqslant \eta < \eta'$.

Posons $\eta_\xi =$ *indice du premier élément de la suite* (2.3) *ayant cette propriété*. Il vient alors $\eta_\xi \geqslant \eta' > \eta_\zeta$ et $b_{\eta_\zeta}\, \varrho\, b_{\eta_\xi}$ pour $0 \leqslant \zeta < \xi < \omega_\nu$.

Démontrons que si l'on pose $d_\xi = b_{\eta_\xi}$ pour $0 \leqslant \xi < \omega_\nu$, la suite (2.2) satisfaira aux conditions du Théorème II.

En effet, on obtient la formule

$$d_0\, \varrho\, d_1\, \varrho \ldots \varrho\, d_\xi\, \varrho \ldots \quad (\xi < \omega_\nu) \tag{2.4}$$

directement de la définition des termes d_ξ.

Pour démontrer la propriété (*), donnons-nous un élément a de $\mathcal{N}$ et soit η^0 son indice (unique) dans la suite (2.3); on a alors $a = b_{\eta^0}$.

Comme $0 \leqslant \eta_\xi < \eta_{\xi'} < \omega_\nu$ pour $0 \leqslant \xi < \xi' < \omega_\nu$, il vient

$$\lim_{\xi\to\omega_\nu} \eta_\xi = \omega_\nu. \tag{2.5}$$

D'après (2.5), il existe un indice ordinal ξ_0 tel que $\eta_{\xi_0} > \eta^0$. D'après la définition du nombre η_{ξ_0+1}, on a $\eta_{\xi_0+1} \geqslant \eta_{\xi_0} + 1$ et $b_\eta\, \varrho\, b_{\eta_{\xi_0+1}}$ pour $\eta \leqslant \eta_{\xi_0}$, d'où $b_{\eta^0}\, \varrho\, b_{\eta_{\xi_0+1}}$, c'est-à-dire $a\, \varrho\, b_{\eta_{\xi_0+1}}$.

L'élément a de $\mathcal{N}$ étant choisi arbitrairement, ceci démontre la propriété (*) de la suite (2.2) (comparer [4], p. 145, Proposition C_{76}, démonstration).

Nous avons ainsi démontré que la condition du Théorème est suffisante.

Remarquons que, dans la construction de la suite (2.2), on peut exiger que l'élément d_0 soit donné d'avance; en effet, on arrange la suite (2.3) de façon que l'on ait $b_0 = d$, d'où $d_0 = b_{\eta_0} = b_0 = d$ (d étant un élément arbitraire de $\mathcal{N}$).

II. *La condition est nécessaire.* Supposons qu'il existe une suite (2.2) satisfaisant aux conditions du Théorème II; supposons de plus que $\aleph_\nu$ soit un aleph régulier.

Dans ces hypothèses, soit M un sous-ensemble de $\mathcal{N}$ tel que $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{\mathcal{N}}}$, d'ailleurs arbitraire, et soit ξ_p un indice satisfaisant à la condition

$$p\, \varrho\, d_{\xi_p} \quad \text{pour} \quad p \in M. \tag{2.6}$$

L'ensemble des nombres ξ_p $(p \in M)$ étant évidemment de puissance $\leqslant \overline{\overline{M}} < \aleph_\nu$, il existe en vertu de la régularité supposée du nombre ω_ν un indice $\xi = \xi^0$ tel que $\xi_p < \xi^0$, donc aussi $d_{\xi_p}\, \varrho\, d_{\xi^0}$, pour $p \in M$. Ceci donne, d'après (2.6), la relation $M\, \varrho\, d_{\xi^0}$. On en conclut qu'il n'existe aucune suite de la forme (2.1) satisfaisant aux conditions du Théorème I et dont l'ensemble des termes soit de puissance $< \aleph_\nu$. De la l'égalité demandée $\alpha = \nu$.

Le Théorème II est entièrement démontré.

3. Revenons à l'espace $\mathcal{M}$; on a évidemment $\overline{\overline{\mathcal{M}}} = 2^{\aleph_0}$.

Dans ce cas, les Théorèmes I-II deviennent applicables en vertu des propriétés (A) et (B) lorsqu'on interprète ϱ comme relation (1.1), respectivement comme sa réciproque.

On en conclut en premier lieu, vu le Théorème I, qu'il existe au moins une suite transfinie de la forme

$$a_0 \gg a_1 \gg \ldots \gg a_\sigma \gg \ldots \text{[5]} \quad (\sigma < \omega_\alpha) \tag{3.1}$$

composée d'éléments de $\mathcal{M}$ et non-bornée selon la relation $\gg$, ainsi qu'une suite analogue

$$b_0 \ll b_1 \ll \ldots \ll b_\tau \ll \ldots \quad (\tau < \omega_\beta), \tag{3.2}$$

non-bornée selon la relation d'ordre inverse de (1.1).

Cela étant, admettons que toutes les suites de la forme (3.1) et (3.2) soient de type de bon ordre ω_c [6], c'est-à-dire que l'on ait constamment $\omega_\alpha = \omega_\beta = \omega_c$, quelles que soient les suites (3.1) et (3.2) satisfaisant aux conditions posées tout à l'heure. Alors, l'application répétée du Théorème II (avec $\omega_\nu = \omega_c$) fournit le résultat suivant:

Il existe deux suites transfinies formées d'éléments de $\mathcal{M}$,

$$s_0 \gg s_1 \gg \ldots \gg s_\xi \gg \ldots \quad (\xi < \omega_c) \tag{3.3}$$

et

$$t_0 \ll t_1 \ll \ldots \ll t_\eta \ll \ldots \quad (\eta < \omega_c), \tag{3.4}$$

---

[5] En raison de (A), les éléments stationnaires sont exclus de ces considérations.

[6] ω_c désigne toujours le nombre ordinal initial de puissance du continu.

où $s_0 = t_0$, telles que l'ensemble E se composant de la totalité de leurs termes, ordonné selon la relation (1.1) en type $\omega_c^* + \omega_c$, savoir l'ensemble

$$(3.5) \qquad \ldots \gg t_\eta \gg \ldots \gg t_{\omega_0} \gg \ldots \gg t_1 \gg s_0 \gg s_1 \gg \ldots \gg s_\xi \gg \ldots \qquad (\xi < \omega_c,\ \eta < \omega_c),$$

est pourvu de la propriété (π).

Réciproquement, E étant un ensemble quelconque ordonné selon (1.1) en type d'ordre $\omega_c^* + \omega_c$ et jouissant de la propriété (π), il existe une décomposition de E de la forme (3.5) où les suites (3.3) et (3.4), avec $s_0 = t_0$, satisfont vu (1.9) à toutes les conditions imposées à la suite (2.2) (avec $\omega_\nu = \omega_c$), chacune relativement à sa relation ordonnante; on en conclut selon le Théorème II que, si $2^{\aleph_0}$ est un aleph régulier, toutes les suites de la forme (3.1) et (3.2) sont bien ordonnées en type ω_c, c'est-à-dire que $\omega_a = \omega_\beta = \omega_c$.

Pour mettre ce résultat sous une forme plus concise, formulons les deux propositions suivantes:

PROPOSITION (T). *Il existe un ensemble E, $E \subset \mathcal{M}$, ordonné selon la relation $\gg$ en type d'ordre $\omega_c^* + \omega_c$ et jouissant de la propriété* (π).

PROPOSITION (U). *Toutes les suites transfinies formées d'éléments de $\mathcal{M}$, bien ordonnées et non-bornées selon la relation $\gg$, respectivement selon la relation réciproque $\ll$, sont de type d'ordre ω_c.*

Alors, nous pouvons énoncer le théorème que voici:

THÉORÈME III. *Si $2^{\aleph_0}$ est un aleph régulier, les Propositions* (T) *et* (U) *sont équivalentes.*

Si $\mathcal{M}$ désigne un espace de la classe mentionnée à la fin du premier n^0, si $\overline{\overline{\mathcal{M}}} = \aleph_\mu$ et si $\aleph_\mu$ est un aleph régulier, il n'est qu'à remplacer dans cet énoncé $2^{\aleph_0}$ par $\aleph_\mu$ et, dans les énoncés (T) et (U), ω_c par ω_μ. En désignant les propositions ainsi modifiées par (T') et (U'), on obtient la modification correspondante du Théorème III:

THÉORÈME IIIa. *Si $\aleph_\mu$ est un aleph régulier, les Propositions* (T') *et* (U') *sont équivalentes.*

Travaux cités

[1] F. Hausdorff, *Summen von $\aleph_1$-Mengen*, Fund. Math. 26 (1936), p. 241-255.

[2] K. Knopp, *Szeregi nieskończone*, Warszawa 1956 (traduction de 4-ème édition allemande, 1947).

[3] J. Popruženko, *Sur certains ensembles indénombrables singuliers de nombres irrationnels*, Fund. Math. 42 (1955), p. 319-338.

[4] W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Warszawa-Lwów, 1934.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 9. 5. 1958

A theory of extensions of map-systems I

by

W. Słowikowski (Warszawa)

Introduction. The concept of a map-system makes it possible to find out the common structure of a number of theories similar to Schwartz's theory of distributions [7], Mikusiński's operational calculus [5], and Gelfand-Silov generalized functions [2].

This idea was prompted by Sikorski's approach [9] to the theory of distributions. Therefore the reader who is already acquainted with Schwartz distributions and still finds it difficult to follow our theory closely or pick up its intuitive background is advised to look into Sikorski's brief paper as an example. It should be noted here that Sikorski's idea is in fact very similar to one due to Bochner [1].

It is the purpose of this paper to characterize some classes of extensions of linear map-systems or topological map-systems which are similar to those of Schwartz, Mikusiński, and Gelfand-Silov respectively, as well as many others important classes. The principal results of this paper were announced in [10] and [11]

A map-system is a pair $\mathfrak{A} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{X})$ which consists of an abelian group $\boldsymbol{X}$ and a semi-group $\boldsymbol{S}$ of homomorphisms $A \in \boldsymbol{S}$ of some subgroups $\boldsymbol{G}_A \subset \boldsymbol{X}$ into $\boldsymbol{X}$. We assume that, for each $A, B \in \boldsymbol{S}$, $(AB)x = A(Bx)$ whenever the left side exists.

If $\boldsymbol{X}$ is a linear space, we say that $\mathfrak{A} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{X})$ is a linear map-system provided all $\boldsymbol{G}_A$ are linear spaces and $A \in \boldsymbol{S}$ are linear mappings.

The chief problem concerning map-systems is to find all the possible extensions of an arbitrary map-system to an algebraically closed one, i. e. such a map-system that the domains of its operators coincide with the whole underlying space.

In general there are many different ways of extension of a given map-system. If the linear space of a given linear map-system $\mathfrak{A}$ is a topological one, we can impose on the extension some additional topological conditions, for instance we can admit only algebraically closed extensions of $\mathfrak{A}$ whose spaces are topologized so that all the extended operators are continuous and so is the imbedding of $\mathfrak{A}$ into its extension.