Sur les types d'ordre distincts dont les n-ièmes puissances sont équivalentes

par

F. Sunyer i Balaguer (Barcelone)

En 1951 W. Sierpiński [5] a posé la question suivante:

L'égalité $\varphi^2 = \psi^2$ pour deux types d'ordre entraîne-t-elle toujours l'égalité $\varphi = \psi$?

A. C. Davis [1] a répondu négativement à cette question en donnant deux types d'ordre dénombrables φ et ψ tels que $\varphi^2 = \psi^2$ et $\varphi \neq \psi$. Cet exemple a été simplifié par W. Sierpiński. Ultérieurement, dans une Note commune, A. C. Davis et W. Sierpiński [3] ont donné trois types d'ordre distincts α, β et γ tels que $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2$. De même, ils affirment que pour des types d'ordre α déterminés l'équation $\xi^n = \alpha$ se trouve vérifiée pour plusieurs types d'ordre ξ distincts. Dans une Note postérieure A. C. Davis [2] a démontré qu'il existe des types d'ordre α tels que l'équation $\xi^n = \alpha$ a exactement m solutions différentes, où $m = 0, 1, 2, \ldots, \aleph_0, 2^{\aleph_0}$. Néanmoins, en faisant usage de l'axiome du choix, on peut démontrer que si $\varphi^n = \psi^n$, alors φ et ψ sont des types d'ordre équivalents (similaires au sens de Fraïssé [4]). C'est ce que nous ferons dans cette Note.

Voici d'abord quelques explications sur la terminologie et les notations que nous utiliserons.

Un type d'ordre β sera dit inférieur ou équivalent à un type d'ordre α si un ensemble ordonné A de type α admet un sous-ensemble B (éventuellement $\equiv A$) de type β; on écrira $\beta \lessapprox \alpha$ ou $\alpha \gtrapprox \beta$.

Deux types α et β seront dits *équivalents* (similaires selon Fraïsse) si on simultanément $\alpha \lessapprox \beta$ et $\beta \lessapprox \alpha$; on écrira dans ce cas $\alpha \approx \beta$.

Par contre, lorsque $\beta \lessapprox \alpha$, sans que l'on ait en même temps la relation $\alpha \lessapprox \beta$, nous dirons que β est *inférieur à* α et nous écrirons $\beta < \alpha$.

En premier lieu nous démontrerons le lemme suivant:

LEMME 1. *Si* $\alpha\beta \lessapprox \gamma\delta$, *une au moins des relations* $\alpha \lessapprox \gamma$ *ou* $\beta \lessapprox \delta$ *est vérifiée.*

Démonstration. Soit A, B, C et D des ensembles ordonnés de types α, β, γ et δ respectivement. On sait que l'ensemble E des couples ba, où $a \in A$ et $b \in B$, ordonné *alphabétiquement* (c'est-à-dire d'après le principe des premières différences), est de type $\alpha\beta$.

De même l'ensemble E_1 des couples dc, où $c \in C$ et $d \in D$, ordonné alphabétiquement est de type $\gamma\delta$.

Par suite, l'hypothèse $\alpha\beta \lessapprox \gamma\delta$ nous permet d'affirmer l'existence d'une similitude (correspondance biunivoque qui conserve les relations d'ordre) entre l'ensemble E et un sous-ensemble de E_1. Soit F cette similitude, on peut donc écrire $F(E) \subset E_1$.

Désignons maintenant par $A(b)$ l'ensemble des couples ba tels que a *parcourt* tout l'ensemble A et b reste fixe. De même, $C(d)$ sera l'ensemble des couples dc tels que c parcourt tout l'ensemble C et d reste fixe.

Evidemment, ou bien il existe un b, que nous désignerons par b_0, tel que pour un d_0 déterminé on a $F(A(b_0)) \subset C(d_0)$, ou bien pour tout b l'ensemble $F(A(b))$ a des éléments $d'c'$ et $d''c''$, où $d' \neq d''$.

Dans le premier cas, puisque $A(b_0)$ est de type α et $C(d_0)$ est de type γ, nous aurons $\alpha \lessapprox \gamma$.

Dans le deuxième cas soit $M(b)$ l'ensemble formé par tous les d auxquels on peut faire correspondre un c tel que $dc \in F(A(b))$. Par hypothèse $M(b)$ aura dans ce cas au moins deux éléments. Il existe donc une correspondance qui fait correspondre à chaque b un des d de $M(b)$ qui ne soit pas le premier élément de $M(b)$ (s'il en existe un). Si nous démontrons que cette correspondance G entre l'ensemble B et un sous-ensemble de D est une similitude, nous aurons démontré que $\beta \lessapprox \delta$, c'est-à-dire le lemme sera établi.

Soient b' et b'' deux éléments tels que $b' \prec b''$, et posons $d' = G(b')$ et $d'' = G(b'')$; ceci veut dire qu'il existe deux éléments $c', c'' \in C$ tels que

$$d'c' \in F(A(b')), \qquad d''c'' \in F(A(b'')),$$

et, puisque F conserve l'ordre, nous aurons $d' \prec d''$, ou bien $d' = d''$. Mais, si $d' = d''$ pour tout $d''' \prec d''$, quel que soit c, nous aurons $d'''c \prec d'c'$, et par suite, puisque F conserve l'ordre, on aura $d'''c \notin F(A(b''))$, c'est-à-dire d'' sera le premier élément de $M(b'')$, contrairement à l'hypothèse. Par suite, si $b' \prec b''$, et $d' = G(b')$ et $d'' = G(b'')$, on a toujours $d' \prec d''$; G est donc une similitude.

Du lemme 1 on tire immédiatement le résultat suivant:

LEMME 2. *Si $\alpha\beta \approx \gamma\delta$, une au moins des quatre conclusions suivantes est vérifiée:*

1° $\alpha \approx \gamma$,
2° $\beta \approx \delta$,
3° $\alpha < \gamma$, $\delta < \beta$,
4° $\gamma < \alpha$, $\beta < \delta$.

Démonstration. De $\alpha\beta \lessapprox \gamma\delta$ on déduit, d'après le lemme 1, que

(1) $$\alpha \lessapprox \gamma$$

ou bien que

(2) $$\beta \lessapprox \delta.$$

De même, de $\alpha\beta \gtrapprox \gamma\delta$ on déduit que

(3) $$\alpha \gtrapprox \gamma$$

ou bien

(4) $$\beta \gtrapprox \delta.$$

Si (1) et (3) sont vérifiées simultanément on a $\alpha \approx \gamma$. Si les conclusions qui sont vérifiées sont (2) et (4), nous aurons $\beta \approx \delta$. Par contre, si (1) et (3) ainsi que (2) et (4) ne sont pas vérifiées en même temps, on doit supposer que ce sont (1) et (4), ou bien (2) et (3), qui sont vérifiées simultanément. Dans le premier cas, puisque l'on suppose que (2) et (3) n'ont pas lieu, nous aurons

$$\alpha < \gamma, \quad \delta < \beta.$$

De même dans le deuxième cas on aura

$$\gamma < \alpha, \quad \beta < \delta.$$

Le lemme 2 nous permet de démontrer facilement le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si, pour un entier positif n, il existe deux types d'ordre φ et ψ tels que*

(5) $$\varphi^n \approx \psi^n,$$

on a $\varphi \approx \psi$.

Démonstration. La relation (5) peut s'écrire

$$\varphi\varphi^{n-1} \approx \psi\psi^{n-1}.$$

Nous appliquerons donc le lemme 2 où l'on posera

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \varphi^{n-1}, \quad \gamma = \psi, \quad \delta = \psi^{n-1},$$

et nous démontrerons en premier lieu que les conclusions 3° et 4° ne sont pas possibles dans ce cas. En effet, la conclusion 3° s'écrit

(6) $$\varphi < \psi,$$

(7) $$\psi^{n-1} < \varphi^{n-1},$$

et on voit facilement que (6) est incompatible avec (7). De même, dans la conclusion 4° on a

(8) $$\psi < \varphi,$$

(9) $$\varphi^{n-1} < \psi^{n-1}$$

et (8) et (9) sont contradictoires.

Par suite nous aurons

$$\varphi \approx \psi$$

ou

$$\varphi^{n-1} \approx \psi^{n-1},$$

dans le premier cas le théorème est donc démontré. Dans le deuxième, on peut répéter la démonstration en remplaçant n par $n-1$ et, en appliquant le lemme 2 un nombre fini de fois, on arrive nécessairement à la conclusion $\varphi \approx \psi$.

Comme corollaire immédiat de ce théorème, ou plus encore comme cas particulier, on peut énoncer le résultat que nous avons signalé, c'est-à-dire:

COROLLAIRE. *Si $\varphi^n = \psi^n$, on a $\varphi \approx \psi$.*

Travaux cités

[1] A. C. Davis, *On order types whose squares are equal*, Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), p. 361-382.

[2] — *Sur l'équation $\zeta^n = a$ pour les types d'ordre*, C. R. Acad. Sci. Paris 235 (1952), p. 924-926.

[3] — et W. Sierpiński, *Sur les types d'ordre distincts dont les carrés sont égaux*, C. R. Acad. Sci. Paris 235 (1952), p. 850-852.

[4] R. Fraïssé, *Sur la comparaison des types d'ordres*, C. R. Acad. Sci. Paris 226 (1948), p. 1330-1331.

[5] W. Sierpiński, *Dernières recherches et problèmes de la Théorie des Ensembles*, Rendiconti di Matematica, Serie V, 10 (1951), p. 1-11.

Reçu par la Rédaction le 20. 3. 1958

On transfinite iteration

by

B. Banaschewski (Hamilton, Ontario)

1. Let $\mathfrak{D}$ be a class of sets closed under the union of chains and $f: \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ an extensional operator on $\mathfrak{D}$, i. e., $fX \supseteq X$ holds for all $X \in \mathfrak{D}$. Then, the powers f^α of f for any ordinal α are defined, as usual, by

$$f^\alpha X = f \bigcup_{\beta<\alpha} f^\beta X .$$

These f^α may, but need not be, distinct for all α. Of course, if all f^α are distinct $\mathfrak{D}$ cannot be a set, and if $\mathfrak{D}$ is a set of cardinal $\mathfrak{d}$ one must have $f^\alpha = f^\delta$ for all $\alpha \geqslant \delta$ when δ denotes the first ordinal whose cardinal is greater than $\mathfrak{d}$. Less obvious criteria for the equality of all powers of f from some ordinal onwards can be based on suitable properties of f. A property of this kind was described in a recent paper by G. Schwarz [1] in the following way:

($S_\mathfrak{k}$) *If $\mathfrak{A}$ is a collection of $\mathfrak{k}$ sets $A \in \mathfrak{D}$, then there exists a set Φ of sub-collections $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, each consisting of less than $\mathfrak{k}$ sets, such that*

$$f \bigcup_{A \in \mathfrak{A}} A = \bigcup_{\mathfrak{B} \in \Phi} f \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B .$$

For any extensional isotonic [1] operator f satisfying ($S_\mathfrak{k}$) with some $\mathfrak{k}$ which is either denumerable or has an immediate predecessor (in the natural well-ordering of the cardinals) Schwarz proves the equation

(1) $$f^\alpha X = \bigcup_{\eta<\xi} f^\eta X \qquad (\alpha \geqslant \xi)$$

where ξ denotes the first ordinal whose cardinal is $\mathfrak{k}$.

In the present note, a number of conditions for operators f will be considered which are similar to ($S_\mathfrak{k}$) and have the same effect on the powers of f as ($S_\mathfrak{k}$). Also, their relations to each other and to ($S_\mathfrak{k}$) will be discussed and some statements concerning products of operators will be deduced from them.

[1] This means $fX \subseteq fY$ whenever $X \subseteq Y$.