Sur la compactification des espaces de proximité

par

A. Császár (Budapest) et S. Mrówka (Warszawa)

1. Soit R un espace de proximité au sens de V. A. Efremovitch (v. [1], p. 195, § 2) et écrivons, comme d'habitude, $A\,\delta\,B$ si les ensembles $A\subset R$ et $B\subset R$ sont *voisins* et $A\,\bar{\delta}\,B$ s'ils sont *éloignés*.

Rappelons quelques notions et résultats de la théorie de ces espaces.

En appelant ouverts les ensembles $G\subset R$ tels que $x\in G$ entraîne $\{x\}\,\bar{\delta}\,R-G$, on définit sur R une topologie complètement régulière (v. [1], p. 196, théorème 2), appelée topologie *engendrée* par la structure de proximité de l'espace R. $E\neq 0$ étant un sous-ensemble de R, la relation δ définit une structure de proximité sur E, qui engendre la même topologie que l'on obtient en considérant E comme sous-espace de l'espace topologique R, engendré par la structure de proximité définie sur R. K étant un espace de Hausdorff compact (1), il existe une structure de proximité, et une seule, qui engendre la topologie de K, notamment celle qui s'obtient en posant $A\,\delta\,B$ si et seulement si $\bar{A}\cap\bar{N}\neq 0$ (2) (v. [1], p. 198, théorème 3). Ce fait permet donc de considérer un espace de Hausdorff compact quelconque comme espace de proximité.

On appelle *δ-continue* une application f d'un espace de proximité R dans un espace de proximité S, si $A\subset R$, $B\subset R$, $A\,\delta\,B$ entraîne $f(A)\,\delta\,f(B)$. L'application f est un *équimorphisme*, si elle est biunivoque et si f et f^{-1} sont δ-continues; R et S sont dits *équimorphes* s'il existe un équimorphisme f tel que $S=f(R)$.

Dans la théorie des espaces de proximité, un rôle fondamental est joué par le théorème de plongement de Y. M. Smirnoff: *À tout espace de proximité R on peut attacher un espace de Hausdorff compact R^*, univoquement déterminé à un équimorphisme près, tel que R soit équimorphe à un sous-ensemble dense de R^** (v. [3], p. 551 à 556, en particulier théorème 8 et 9).

Le but de ce travail est, d'une part, de donner de cet important théorème une nouvelle démonstration, fondée sur une méthode complè-

(1) Nous employons le mot „compact" au sens de „bicompact".

(2) $\bar{A}$ désigne la fermeture de l'ensemble A.

tement différente de celle de Y. M. Smirnoff, et d'autre part, de compléter le théorème en déterminant le poids topologique [3] de l'espace R. Nous introduirons, dans ce but, les notions de *base de proximité* et de *poids de proximité* d'un espace de proximité et nous en étudierons les propriétés.

2. Soit R un espace de proximité: les notions topologiques (ensemble ouvert, point intérieur etc.) sont à entendre dans la topologie engendrée par la structure de proximité de R.

Nous appellerons *base de proximité* de l'espace de proximité R toute famille $\mathfrak{B}$ de sous-ensembles de R telle que $A \subset R$, $B \subset R$, $A \bar{\delta} B$ entraîne l'existence de deux ensembles $U \in \mathfrak{B}$, $V \in \mathfrak{B}$ qui vérifient les conditions

$$A \subset U, \quad B \subset V \quad \text{et} \quad U \bar{\delta} V.$$

(2.1) *$\mathfrak{B}$ étant une base de proximité, les intérieurs des ensembles $U \in \mathfrak{B}$ forment une base de proximité $\mathfrak{B}_0$.*

Démonstration. En supposant $A \bar{\delta} B$, on peut trouver deux ensembles A' et B' tels que

$$A \bar{\delta} R-A', \quad B \bar{\delta} R-B' \quad \text{et} \quad A' \bar{\delta} B'$$

(v. [1], p. 195). Il existe ensuite deux ensembles ouverts A'' et B'' tels que

$$A \bar{\delta} R-A'', \quad B \bar{\delta} R-B', \quad A'' \subset A' \quad \text{et} \quad B'' \subset B',$$

(v. [1], p. 198, Remarque 2) donc que $A'' \bar{\delta} B''$. Par conséquent, on peut trouver dans la famille $\mathfrak{B}$ deux ensembles U et V qui vérifient les conditions

$$A'' \subset U, \quad B'' \subset V \quad \text{et} \quad U \bar{\delta} V,$$

qui entraînent

$$A \subset A'' \subset \operatorname{Int} U \subset U, \quad B \subset B'' \subset \operatorname{Int} V \subset V$$

et

$$\operatorname{Int} U \bar{\delta} \operatorname{Int} V.$$

(2.2) *$\mathfrak{B}$ étant une base de proximité composée d'ensembles ouverts, $\mathfrak{B}$ est une base topologique.*

Démonstration. Si G est un ensemble ouvert et si $x \in G$, on a $\{x\} \bar{\delta} R-G$, il existe donc deux ensembles U, $V \in \mathfrak{B}$ tels que $\{x\} \subset U$, $R-G \subset V$ et que $U \bar{\delta} V$. Ceci entraîne $U \cap V = 0$, donc $x \in U \subset R-V \subset G$.

[3] Le poids topologique d'un espace topologique est le plus petit nombre cardinal $\tau \geqslant \aleph_0$ tel que l'espace possède une base de puissance inférieure ou égale à τ.

En ce qui concerne l'existence des bases de proximité, on constate aussitôt que la famille de tous les sous-ensembles de l'espace R constitue une base de proximité. Il s'ensuit en vertu de (2.1) que

(2.3) *La famille de tous les ensembles ouverts constitue une base de proximité.*

Dans les espaces de proximité compacts, ce théorème peut être précisé de la façon suivante:

(2.4) *$\mathfrak{B}$ étant une base topologique de l'espace de proximité compact K, les réunions finies des ensembles appartenant à $\mathfrak{B}$ forment une base de proximité $\mathfrak{B}^*$.*

Démonstration. Soit $A \bar{\delta} B$, donc $\bar{A} \cap \bar{B} = 0$. La topologie de K étant (complètement) régulière, on peut faire correspondre à tout point $x \in \bar{A}$ un ensemble $U_x \in \mathfrak{B}$ tel que

$$x \in U_x \subset \bar{U}_x \subset R-\bar{B}.$$

Un nombre fini de ces ensembles U_x recouvre l'ensemble compact $\bar{A}$:

$$\bar{A} \subset \bigcup_1^r U_{x_i} \subset \bigcup_1^r \bar{U}_{x_i} \subset R-\bar{B}.$$

Les ensembles fermés $\bigcup_1^r \bar{U}_{x_i}$ et $\bar{B}$ étant fermés et disjoints, on peut répéter le même procédé et parvenir à une suite finie d'ensembles $V_{y_k} \in \mathfrak{B}$ tels que

$$\bar{B} \subset \bigcup_1^s V_{y_k} \subset \bigcup_1^s \bar{V}_{y_k} \subset R - \bigcup_1^r \bar{U}_{x_i}.$$

En posant $U^* = \bigcup_1^r U_{x_i}$, $V^* = \bigcup_1^s V_{y_k}$, on a donc

$$U^* \in \mathfrak{B}^*, \quad V^* \in \mathfrak{B}^*, \quad A \subset U^*, \quad B \subset V^*$$

et $\overline{U^*} \cap \overline{V^*} = 0$, et par conséquent

$$U^* \bar{\delta} V^*,$$

ce qui était à démontrer.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition:

(2.5) *$\mathfrak{B}$ étant une base de proximité de R, les ensembles $U \cap E$ ($U \in \mathfrak{B}$) forment une base de proximité dans le sous-espace $E \subset R$.*

Le théorème suivant constitue, dans un certain sens, la réciproque de (2.5):

(2.6) *E étant un sous-ensemble dense de l'espace de proximité R et $\mathfrak{B}$ désignant une base de proximité dans E, les ensembles $\overline{U}$, où $U \in \mathfrak{B}$, forment une base de proximité dans R.*

Démonstration. Soit $A, B \subset R$, $A \bar{\delta} B$. Il existe (cf. la démonstration de (2.1)) deux ensembles ouverts G et H tels que

$$A \subset G, \quad B \subset H \quad \text{et} \quad G \bar{\delta} H.$$

Les ensembles $G \cap E$ et $H \cap E$ sont partie de E et ils sont éloignés, on peut donc trouver deux ensembles $U, V \in \mathfrak{B}$ tels que

$$G \cap E \subset U \subset E, \quad H \cap E \subset V \subset E \quad \text{et} \quad U \bar{\delta} V.$$

L'ensemble G étant ouvert et l'ensemble E dense dans R, on a évidemment $G \subset \overline{G \cap E}$, et on obtient de la même façon $H \subset \overline{H \cap E}$, d'où il vient $G \subset \overline{U}$ et $H \subset \overline{V}$. On a donc

$$A \subset \overline{U}, \quad B \subset \overline{V}$$

et la relation $U \bar{\delta} V$ entraîne (v. [1], p. 197)

$$\overline{U} \bar{\delta} \overline{V},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Appelons maintenant *poids de proximité* de l'espace de proximité R le plus petit nombre cardinal $\vartheta \geqslant \aleph_0$ tel qu'il existe une base de proximité de R de puissance inférieure ou égale à ϑ. En conséquence de la proposition (2.1), on pourrait se borner dans cette définition à ne considérer que des bases de proximité composées d'ensembles ouverts. Cette remarque entraîne en vertu de (2.2) et de (2.3) la proposition suivante:

(2.7) *R étant un espace de proximité de poids topologique τ et de poids de proximité ϑ, on a l'inégalité*

$$\tau \leqslant \vartheta \leqslant 2^{\tau}.$$

D'après les égalités $\tau^r = \tau$ et $\aleph_0 \tau = \tau$, valables pour $\tau \geqslant \aleph_0$ et r fini, (2.4) et (2.7) entraînent:

(2.8) *Le poids de proximité d'un espace de proximité compact coïncide avec le poids topologique de celui-ci.*

Il s'ensuit de (2.5):

(2.9) *Le poids de proximité d'un sous-espace $E \subset R$ est inférieur ou égal à celui de R.*

Pour le cas où E est dense dans R, on a d'après (2.6):

(2.10) *Le poids de proximité d'un sous-espace dense $E \subset R$ est égal à celui de R.*

Il est à remarquer qu'une proposition analogue serait en défaut pour les poids topologiques.

3. Au moyen de la notion de poids de proximité, on peut donner une forme plus précise au théorème de Y. M. Smirnoff:

Théorème de plongement. *R étant un espace de proximité de poids de proximité ϑ, il existe un espace de Hausdorff compact R^*, de poids topologique ϑ, tel que R soit équimorphe à un sous-ensemble dense de R^*; l'espace R^* est déterminé, à un équimorphisme près, de façon univoque.*

Pour démontrer le théorème, considérons dans R une base de proximité $\mathfrak{B}$ de puissance inférieure ou égale à ϑ et formons tous les couples $\{U, V\}$ d'ensembles $U \in \mathfrak{B}$, $V \in \mathfrak{B}$ tels que $U \bar{\delta} V$. Pour un couple quelconque de ce genre on peut construire, d'après un théorème de V. A. Efremovitch (v. [1], p. 196), une application δ-continue f de l'espace R dans l'intervalle fermé $I = [0, 1]$, telle qu'on ait $f(t) = 0$ pour $t \in U$ et $f(t) = 1$ pour $t \in V$. L'application f sera appelée *application canonique* correspondant au couple $\{U, V\}$.

Désignons par $\{f^\gamma\}$ la famille de toutes ces applications canoniques, l'indice γ parcourant un ensemble Γ de puissance $\vartheta' \leqslant \vartheta$.

Considérons le cube de poids ϑ' de Tychonoff, c'est-à-dire le produit de Tychonoff de ϑ' exemplaires de l'intervalle I, et désignons-le par K. On définit une application f de l'espace R dans l'espace K en faisant usage des éléments de l'ensemble Γ pour distinguer les coordonnées d'un point (x^γ) de K et en posant

$$f(t) = \big(f^\gamma(t)\big).$$

Cette application est biunivoque, puisque pour $s, t \in R$, $s \neq t$, on a $\{s\} \bar{\delta} \{t\}$, donc, on peut trouver deux ensembles $U, V \in \mathfrak{B}$ tels que $s \in U$, $t \in V$, $U \bar{\delta} V$, et en désignant par f^α l'application canonique qui correspond au couple $\{U, V\}$, on a $f^\alpha(s) = 0 \neq 1 = f^\alpha(t)$, c'est-à-dire $f(s) \neq f(t)$.

Nous allons montrer que f est un équimorphisme de l'espace de proximité R sur l'espace $f(R)$ (considéré comme sous-espace de l'espace de proximité K dont la structure de proximité est définie de façon univoque par sa topologie).

Il est facile de voir que l'application f^{-1} est δ-continue, ou, ce qui veut dire la même chose, que $A, B \subset R$, $A \bar{\delta} B$ entraîne $f(A) \bar{\delta} f(B)$. En effet, on peut trouver en ce cas deux ensembles $U, V \in \mathfrak{B}$ tels que $A \subset U$, $B \subset V$, $U \bar{\delta} V$, et en désignant par f^α l'application canonique correspondant au couple $\{U, V\}$, on a

$$f(A) \subset \mathop{X}_{\gamma} U^\gamma \quad \text{et} \quad f(B) \subset \mathop{X}_{\gamma} V^\gamma,$$

où on a posé $U^\alpha = \{0\}$, $V^\alpha = \{1\}$ et $U^\gamma = V^\gamma = I$ pour $\gamma \neq \alpha$. Comme les ensembles $\mathop{X}_{\gamma} U^\gamma$ et $\mathop{X}_{\gamma} V^\gamma$ sont fermés et disjoints, ils sont éloignés dans K, d'où la relation exigée $f(A) \bar{\delta} f(B)$.

La δ-continuité de l'application f est une conséquence de la proposition générale que voici:

(3.1) *f^γ étant pour $\gamma \in \Gamma$ une application δ-continue de l'espace de proximité R dans l'espace de proximité compact S^γ et en posant $S = \underset{\gamma}{X} S^\gamma$, l'application f de R dans S (muni de la structure de proximité unique qui engendre la topologie de cet espace de Hausdorff compact), définie par la formule*

$$f(t) = \big(f^\gamma(t)\big),$$

est δ-continue.

Pour démontrer (3.1), remarquons d'abord que les ensembles $\underset{\gamma}{X} G^\gamma$, où G^γ est un sous-ensemble ouvert de l'espace S^γ et, à l'exception d'un nombre fini d'indices γ, on a $G^\gamma = S^\gamma$, forment une base topologique $\mathfrak{B}'$ dans l'espace S. D'après (2.4), les ensembles de la forme $\bigcup\limits_1^r U_i$, où r est un nombre naturel et $U_i \in \mathfrak{B}'$, forment une base de proximité $\mathfrak{B}^*$ dans S.

Pour établir la δ-continuité de l'application f, il suffit de démontrer que les conditions

$$A, B \subset R \quad \text{et} \quad f(A)\,\bar{\delta}\,f(B)$$

entraînent $A\,\bar{\delta}\,B$. Or, ces conditions étant vérifiées et $\mathfrak{B}^*$ étant une base de proximité, il existe deux ensembles U^* et V^* tels que

$$f(A) \subset U^*, \quad f(B) \subset V^*, \quad U^*\,\bar{\delta}\,V^* \quad \text{et} \quad U^*, V^* \in \mathfrak{B}^*. \tag{3.2}$$

Posons

$$U^* = \bigcup_1^r U_i, \quad V^* = \bigcup_1^s V_k, \quad U_i \in \mathfrak{B}', \quad V_k \in \mathfrak{B}', \tag{3.3}$$

donc

$$U_i = \underset{\gamma}{X} G_i^\gamma, \quad V_k = \underset{\gamma}{X} H_k^\gamma, \tag{3.4}$$

où G_i^γ et H_k^γ sont des sous-ensembles ouverts de S^γ. La relation $U^*\,\bar{\delta}\,V^*$ entraîne $\overline{U}^* \cap \overline{V}^* = 0$, donc $\overline{U}_i \cap \overline{V}_k = 0$ pour $i = 1, \dots, r$ et $k = 1, \dots, s$, on a par conséquent

$$\overline{\underset{\gamma}{X} G_i^\gamma} \cap \overline{\underset{\gamma}{X} H_k^\gamma} = (\underset{\gamma}{X} \overline{G}_i^\gamma) \cap (\underset{\gamma}{X} \overline{H}_k^\gamma) = \underset{\gamma}{X} (\overline{G}_i^\gamma \cap \overline{H}_k^\gamma) = 0.$$

Il s'ensuit qu'on a (pour des i et k quelconques fixés) un indice $a \in \Gamma$ tel que $\overline{G}_i^a \cap \overline{H}_k^a = 0$. En posant donc

$$A_i' = f(A) \cap U_i, \quad B_k' = f(B) \cap V_k, \tag{3.5}$$

$$A_i = f^{-1}(A_i'), \quad B_k = f^{-1}(B_k'), \tag{3.6}$$

on a pour un $a \in \Gamma$ convenable, en vertu des inclusions $f(A_i) \subset U_i$ et $f(B_k) \subset V_k$ et des égalités (3.4),

$$f^a(A_i) \subset G_i^a, \quad f^a(B_k) \subset H_k^a \quad \text{et} \quad \overline{G}_i^a \cap \overline{H}_k^a = 0,$$

d'où $G_i^a\,\bar{\delta}\,H_k^a$ et, à plus forte raison,

$$f^a(A_i)\,\bar{\delta}\,f^a(B_k).$$

L'application f^a étant δ-continue, il s'ensuit

$$A_i\,\bar{\delta}\,B_k \tag{3.7}$$

pour $i = 1, \dots, r$ et $k = 1, \dots, s$. Mais les formules (3.2), (3.3) et (3.5) entraînent

$$f(A) = \bigcup_1^r A_i', \quad f(B) = \bigcup_1^s B_k',$$

donc, d'après (3.6),

$$A \subset \bigcup_1^r A_i, \quad B \subset \bigcup_1^s B_k,$$

ce qui donne la relation à démontrer $A\,\bar{\delta}\,B$ par l'application répétée de (3.7) et de l'axiome 1 (v. [1], p. 195).

D'après ce que nous venons de démontrer, l'application f transforme l'espace R de façon équimorphe en un sous-ensemble de l'espace compact K de poids topologique $\vartheta' \leqslant \vartheta$, donc, en conséquence de (2.8), de poids de proximité ϑ'. Il s'ensuit d'après (2.9) que le poids de proximité de l'espace $f(R)$ est inférieur ou égal à ϑ', ce qui entraîne $\vartheta' = \vartheta$. En posant donc $R^* = \overline{f(R)}$, l'espace R^* est un espace de Hausdorff compact de poids topologique ϑ et R est équimorphe à un sous-ensemble dense de R^*.

4. Pour terminer la démonstration du Théorème de plongement, il faut prouver que deux espaces de Hausdorff compacts, dont chacun contient un ensemble dense équimorphe à l'espace donné R, sont toujours équimorphes. Or, cette proposition est contenue dans la suivante:

(4.1) *Soient R et R' deux espaces de Hausdorff compacts, E et E' deux sous-ensembles denses de R et de R' respectivement. f étant un équimorphisme de E sur E', l'application f peut être prolongée à un équimorphisme de R sur R'.*

D é m o n s t r a t i o n [4]. Soit $x \in R$ et considérons un nombre fini de voisinages [5] U_i $(i = 1, \dots, r)$ de x. L'ensemble $\bigcap\limits_1^r U_i$ étant également

[4] Pour la méthode de la démonstration, cf. [4], théorème 1.

[5] Nous entendons par voisinage d'un point tout ensemble tel que ce point en est un point intérieur.

un voisinage de x et E étant dense dans R, on a $E \cap (\bigcap_1^r U_i) \neq 0$. Par conséquent, f étant biunivoque, on a

$$\bigcap_1^r \overline{f(E \cap U_i)} \subset \overline{\bigcap_1^r f(E \cap U_i)} = \overline{f\big(\bigcap_1^r (E \cap U_i)\big)} = \overline{f\big(E \cap (\bigcap_1^r U_i)\big)} \neq 0 .$$

Il s'ensuit que si l'ensemble U parcourt les voisinages du point x, les ensembles fermés $\overline{f(E \cap U)}$ forment une famille concentrée, c'est-à-dire l'intersection d'un nombre fini de ces ensembles, arbitrairement choisis, ne peut jamais être vide. L'espace R' étant compact, l'intersection de tous ces ensembles est également non vide:

$$F(x) = \bigcup_{x \in \operatorname{Int} U} \overline{f(E \cap U)} \neq 0 . \tag{4.2}$$

Nous allons montrer que l'ensemble $F(x)$ ne peut contenir qu'un seul point. Supposons en effet qu'on ait

$$x' \in F(x) , \quad y' \in F(x) , \quad x' \neq y' .$$

L'espace R' étant normal, les points x' et y' possèdent des voisinages ouverts U' et V' respectivement dont les fermetures sont disjointes. En désignant donc par U un voisinage quelconque du point x, on a

$$x' \in \overline{f(E \cap U)} \cap U' \neq 0 , \quad y' \in \overline{f(E \cap U)} \cap V' \neq 0 ,$$

par conséquent, U' et V' étant ouverts, on a

$$U \cap f^{-1}(U') = E \cap U \cap f^{-1}(U') \neq 0 , \quad U \cap f^{-1}(V') = E \cap U \cap f^{-1}(V') \neq 0 ,$$

ce qui montre, U étant un voisinage quelconque de x, que

$$x \in \overline{f^{-1}(U')} \cap \overline{f^{-1}(V')} \neq 0 .$$

Ceci veut dire que $f^{-1}(U')\, \delta\, f^{-1}(V')$, donc en vertu de la δ-continuité de f

$$f\big(f^{-1}(U')\big)\, \delta\, f\big(f^{-1}(V')\big) ,$$

et à plus forte raison $U' \delta V'$, c'est-à-dire $\overline{U'} \cap \overline{V'} \neq 0$, ce qui contredit au choix des ensembles U' et V'.

Désignons par $g(x)$ le seul point de l'ensemble $F(x)$:

$$\{g(x)\} = F(x) .$$

L'application g transforme l'espace R en un sous-ensemble de l'espace R'. Pour $x \in E$, on a $x \in E \cap U$ pour tous les voisinages U de x, donc $f(x) \in f(E \cap U) \subset \overline{f(E \cap U)}$, d'où $f(x) \in F(x)$ et $f(x) = g(x)$. L'application g est donc un prolongement de f.

Comme le rôle des espaces R et R', des ensembles E et E' et des applications f et f^{-1} est symétrique dans les hypothèses, on peut construire de la même façon une application g' de R' dans R qui coïncide avec f^{-1} sur l'ensemble E', par la formule

$$\{g'(x')\} = \bigcap_{x' \in \operatorname{Int} U'} \overline{f^{-1}(E' \cap U')} . \tag{4.3}$$

On aura pour $x \in R$ l'égalité $g'\big(g(x)\big) = x$. En effet, U' étant un voisinage quelconque du point $g(x)$ dans l'espace R', et U un voisinage de x dans R, on a, en conséquence de la relation $g(x) \in \overline{f(E \cap U)}$,

$$f(E \cap U) \cap U' \neq 0 ,$$

d'où

$$U \cap f^{-1}(U') = E \cap U \cap f^{-1}(U') \neq 0 ,$$

ce qui entraîne

$$x \in \overline{f^{-1}(U')} = \overline{f^{-1}(E' \cap U')} .$$

En faisant parcourir à U' tous les voisinages du point $g(x)$, il vient d'après (4.3) $x = g'\big(g(x)\big)$.

On démontre de la même façon l'égalité $g\big(g'(x)\big) = x'$ pour $x' \in R'$ quelconque. On en conclut que l'application g transforme l'espace R en R', qu'elle est biunivoque et que $g' = g^{-1}$.

Il ne reste qu'à démontrer que l'application g est continue; en effet, il s'ensuit qu'elle est un homéomorphisme de l'espace compact R sur R' et, la structure de proximité d'un espace de Hausdorff compact étant univoquement déterminée par la topologie de l'espace, que g est un équimorphisme.

Soit $G' \subset R'$ un ensemble ouvert et supposons, par l'impossible, que l'ensemble $G = g^{-1}(G')$ possède un point $x \in G$ qui appartient à $\overline{R - G}$. Considérons un nombre fini de voisinages quelconques U_i $(i = 1, \ldots, r)$ du point x et posons

$$U^* = \operatorname{Int}(\bigcup_1^r U_i) ;$$

U^* est un voisinage ouvert de x. Il existe donc par hypothèse un point $y \in U^* \cap (R - G)$, et U^* étant un voisinage du point y, on a

$$g(y) \in \overline{f(E \cap U^*)} \cap g(R - G) = \overline{f(E \cap U^*)} \cap (R' - G') ,$$

d'où il vient

$$\begin{aligned}(\bigcap_1^r \overline{f(E \cap U_i)}) \cap (R' - G') &\supset \overline{\bigcap_1^r f(E \cap U_i)} \cap (R' - G') \\ &= \overline{f\big(\bigcap_1^r (E \cap U_i)\big)} \cap (R' - G') \\ &= \overline{f\big(E \cap (\bigcap_1^r U_i)\big)} \cap (R' - G') \supset \overline{f(E \cap U^*)} \cap (R' - G') \neq 0 .\end{aligned}$$

Ceci veut dire que, si U parcourt les voisinages du point x, la famille des ensembles fermés $\overline{f(E\cap U)}$ et $R'-G'$ est concentré, ce qui a pour conséquence, vu que l'espace R' est compact, que

$$\Big(\bigcap_{x\in \operatorname{Int} U}\overline{f(E\cap U)}\Big)\cap(R'-G') = F(x)\cap(R'-G')\neq 0\,;$$

mais c'est impossible, puisque $F(x)=\{g(x)\}$ et que $g(x)\notin R'-G'$. La proposition (4.1) et, par suite, le Théorème de plongement se trouvent ainsi démontrés ([6]).

5. On sait que tout espace métrique R peut être considéré comme espace de proximité, en posant pour $A\subset R$, $B\subset R$, $A\,\delta\,B$ si et seulement si $\varrho(A,B)=\inf\{\varrho(x,y)\colon x\in A,\ y\in B\}=0$, où $\varrho(x,y)$ désigne la distance des points $x,y\in R$; de plus, f étant une application de l'espace métrique R dans l'espace métrique S, la δ-continuité de l'application f équivaut à la continuité uniforme de celle-ci (v. [1], p. 190, théorème 1). On appelle *métrisable* l'espace de proximité R s'il est équimorphe à un espace métrique.

Nos résultats permettent d'énoncer la proposition suivante:

(5.1) *Un espace de proximité est équimorphe à un espace métrique totalement borné si et seulement s'il possède $\aleph_0$ pour poids de proximité. Par conséquent, tout espace de proximité de poids de proximité $\aleph_0$ est métrisable.*

Démonstration. Si l'espace de proximité R possède $\aleph_0$ pour poids de proximité, il est équimorphe, d'après le Théorème de plongement, à un sous-ensemble d'un espace de Hausdorff compact et de poids topologique $\aleph_0$, c'est-à-dire d'un espace métrisable et compact. Cet espace, muni d'une métrique, devient donc totalement borné, et ses sous-ensembles le deviennent également.

D'autre part, si R est équimorphe à un espace métrique R' totalement borné, désignons par R^* un espace métrique complet qui contient R' comme sous-ensemble dense. L'espace R^* est compact, donc séparable, et il s'ensuit du Théorème de plongement (ou bien des propositions (2.8) et (2.9)) que le poids de proximité de l'espace R', donc celui de R, est égal à $\aleph_0$.

(5.2) *Pour que le poids de proximité d'un espace métrique soit égal à $\aleph_0$, il faut et il suffit que cet espace soit totalement borné.*

([6]) Il faut remarquer que cette forme plus précise du Théorème de plongement est une conséquence immédiate de la forme originale du Théorème de plongement (due à Smirnoff et citée dans l'introduction du présent article) et des propositions (2.8) et (2.10).

Démonstration. La suffisance de la condition étant une conséquence de (5.1), supposons que l'espace métrique R possède $\aleph_0$ pour poids de proximité. Il s'ensuit d'après (5.1) que R est équimorphe à un espace métrique totalement borné, donc qu'il est l'image uniformément continue d'un espace totalement borné. Par conséquent, R est totalement borné.

La proposition (5.2) est un cas particulier d'un théorème plus général sur le poids de proximité des espaces métriques. Pour pouvoir formuler ce théorème, appelons dans l'espace métrique R un sous-ensemble E *ε-discret*, si l'on a

$$\varrho(x,y)\geqslant\varepsilon\quad\text{pour}\quad x,y\in E,\ x\neq y\,.$$

On prouve aisément par des méthodes transfinies, par exemple au moyen du lemme de Teichmüller et Tukey (v. [5] et [6], p. 7), qu'il existe dans R, pour un $\varepsilon>0$ quelconque, un ensemble ε-discret *maximal* E_ε, c'est-à-dire tel que $E_\varepsilon\subset E\subset R$, $E_\varepsilon\neq E$ entraîne que E n'est plus ε-discret.

(5.3) *Soit R un espace métrique de poids topologique τ et de poids de proximité ϑ, et désignons par E_n un ensemble $1/n$-discret maximal dans R $(n=1,2,\ldots)$, de puissance σ_n. On a en ce cas les égalités*

(5.4)
$$\tau=\sum_n\sigma_n\quad\text{et}\quad\vartheta=\sum_n 2^{\sigma_n}\,.$$

Démonstration. En désignant par $S(x,\varepsilon)$ la sphère ouverte ayant le point x pour centre et $\varepsilon>0$ pour rayon, les sphères $S(x,1/2n)$, où $x\in E_n$, forment évidemment une famille d'ensembles ouverts, disjoints et non vides. Cette famille étant de puissance σ_n, il s'ensuit $\sigma_n\leqslant\tau$, on a par conséquent

$$\sum_n\sigma_n\leqslant\aleph_0\tau=\tau\,.$$

D'autre part, les sphères $S(x,1/n)$, où $x\in E_n$, couvrent tout l'espace R (autrement E_n ne serait pas maximal), donc, en faisant parcourir à n tous les entiers positifs, la famille de toutes les sphères en question forme une base topologique de puissance $\leqslant\sum_n\sigma_n$, d'où

$$\tau\leqslant\sum_n\sigma_n\,.$$

La première égalité (5.4) est ainsi démontrée.

Pour établir la seconde, remarquons d'abord que deux sous-ensembles disjoints quelconques de l'ensemble E_n sont toujours éloignés, par conséquent, toute base de proximité du sous-espace E_n doit contenir tous les sous-ensembles de E_n, c'est-à-dire que le poids de proximité du sous-espace E_n est supérieur ou égal à 2^{σ_n}. Ceci entraîne d'après (2.9) l'inégalité $2^{\sigma_n} \leqslant \vartheta$, donc

$$\sum_n 2^{\sigma_n} \leqslant \aleph_0 \vartheta = \vartheta .$$

D'autre part, A et B étant deux sous-ensembles éloignés de R, donc tels que $\varrho(A, B) = \varepsilon > 0$, soit $1/n < \frac{1}{5}\varepsilon$ et désignons par U et par V la réunion des sphères $S(x, 1/n)$ telles que $x \in E_n$ et qui rencontrent, respectivement, l'ensemble A et l'ensemble B. Comme la famille de toutes les sphères $S(x, 1/n)$ $(x \in E_n)$ couvre l'espace R, on a $A \subset U$, $B \subset V$ et évidemment $\varrho(U, V) \geqslant \frac{1}{5}\varepsilon > 0$, donc $U \bar{\delta} V$. Ceci veut dire que l'on parvient à une base de proximité en formant la réunion des sphères $S(x, 1/n)$ ayant les points d'un sous-ensemble de E_n pour centres, et cela pour tous les sous-ensembles possibles de E_n et pour $n = 1, 2, \ldots$ Cette base de proximité ayant la puissance $\leqslant \sum_n 2^{\sigma_n}$, on a

$$\vartheta \leqslant \sum_n 2^{\sigma_n} .$$

Ceci prouve la seconde égalité (5.4).

On déduit aisément de (5.3) la proposition suivante, plus précise que (5.2):

(5.5) *Un espace métrique possède un poids de proximité soit égal à $\aleph_0$, soit supérieur ou égal à $2^{\aleph_0}$, suivant qu'il est totalement borné ou non.*

En effet, la condition que R soit totalement borné équivaut à l'inégalité $\sigma_n < \aleph_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Le théorème (5.3) permet parfois de trouver une relation précise entre le poids topologique et le poids de proximité de l'espace métrique R. En effet, on a avec les notations de (5.3):

(5.6) *Si $\sigma_n = \tau$ pour au moins un entier n, il s'ensuit que $\vartheta = 2^{\tau}$. C'est le cas en particulier lorsque τ est de la forme $\tau = \xi^{\aleph_0}$, où ξ désigne un nombre cardinal quelconque.*

Démonstration. L'égalité $\sigma_n = \tau$ entraîne en vertu de la seconde égalité (5.4) et de (2.7)

$$2^{\tau} \leqslant \sum_n 2^{\sigma_n} = \vartheta \leqslant 2^{\tau} .$$

D'autre part, si l'on avait $\sigma_n < \tau$ pour $n = 1, 2, \ldots$, il s'ensuivrait d'après le théorème de Gy. König (v. par exemple [2], p. 34, théorème III)

$$\sum_n \sigma_n < \tau^{\aleph_0} = (\xi^{\aleph_0})^{\aleph_0} = \xi^{\aleph_0^2} = \xi^{\aleph_0} = \tau ,$$

en contradiction avec la première égalité de (5.3).

En admettant l'hypothèse (généralisée) du continu, on peut énoncer la proposition (5.6) sous la forme plus précise suivante:

(5.7) *On a $\vartheta = 2^{\tau}$ ou $\vartheta = \tau$ suivant qu'il existe ou non un entier positif n tel que $\sigma_n = \tau$.*

Démonstration. La première partie de l'énoncé étant contenue dans (5.6), supposons qu'on ait $\sigma_n < \tau$ pour $n = 1, 2, \ldots$ D'après l'hypothèse (généralisée) du continu, il s'ensuit $2^{\sigma_n} \leqslant \tau$, donc d'après la seconde égalité (5.4) et (2.7)

$$\tau \leqslant \vartheta = \sum_n 2^{\sigma_n} \leqslant \aleph_0 \tau = \tau .$$

Travaux cités

[1] В. А. Ефремович, *Геометрия близости I*, Мат. сборник 31 (73) (1952), p. 189-200.

[2] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, Berlin-Leipzig 1927.

[3] Ю. М. Смирнов, *О пространствах близости*, Мат. сборник 31 (73) (1952), p. 543-574.

[4] А. В. Тайманов, *О распространении непрерывных отображений топологических пространств*, Мат. сборник 31 (73) (1952), p. 459-463.

[5] O. Teichmüller, *Braucht der Algebraiker das Auswahlaxiom?*, Deutsche Math. 4 (1939), p. 567-577.

[6] J. W. Tukey, *Convergence and uniformity in topology*, Annals of Math. Studies (1940).

Reçu par la Rédaction le 4. 3. 1958