Sur un problème de H. Steinhaus concernant les ensembles de points sur le plan

par

W. Sierpiński (Warszawa)

H. Steinhaus m'a posé récemment le problème suivant:

Existe-t-il sur le plan deux ensembles A et B (sauf le cas trivial où un de ces ensembles est le plan tout entier et l'autre est formé d'un seu point) *tels que tout ensemble situé sur ce plan et superposable avec A ait exactement un point commun avec tout ensemble situé sur le même plan et superposable avec B?*

Je me propose de démontrer ici à l'aide de l'axiome du choix que la réponse à ce problème est affirmative. Tous les points et leurs ensembles dont il sera question sont supposés situés sur le même plan.

LEMME. *E étant un ensemble de points de puissance $<2^{\aleph_0}$, il existe un point g tel que toutes les distances de g aux points de E sont positives, distinctes deux à deux et distinctes de toutes les distances entre deux points quelconques de E.*

Démonstration du lemme. Soit F la famille de toutes les normales aux milieux des segments unissant deux points distincts quelconques p et q de l'ensemble E. Soit G la famille de tous les cercles de centre en un point quelconque p de E et de rayon égal à la distance entre deux points distincts quelconques q et r de E.

L'ensemble E étant de puissance $<2^{\aleph_0}$, on montre sans peine (à l'aide de l'axiome du choix) que les familles F et G sont de puissance $<2^{\aleph_0}$. Il existe donc une droite D n'appartenant pas à la famille F et qui est coupée par toutes les droites de la famille F ainsi que par tous les cercles de la famille G en un ensemble de points de puissance $<2^{\aleph_0}$. Il existe donc un point g de la droite D qui n'appartient ni à E, ni à aucune droite de la famille F, ni à aucun cercle de la famille G. On en déduit sans peine que le point g satisfait aux conditions du lemme, qui se trouve ainsi démontré.

En utilisant l'axiome du choix, je définirai maintenant par l'induction transfinie deux ensembles plans A et B comme il suit.

Soit φ le plus petit nombre ordinal de puissance du continu. D'après le théorème de Zermelo, il existe une suite transfinie $\{p_\xi\}_{\xi<\varphi}$ (c'est-à-dire du type φ) formée de tous les points du plan. La famille de toutes les transformations isométriques du plan en lui-même (donc continues) étant, comme on sait, de puissance $2^{\aleph_0}$, il existe une suite transfinie $\{f_\xi\}_{\xi<\varphi}$ formée de toutes ces fonctions.

Soit $a_0 = b_0 = (0,0)$. En admettant que, pour un nombre ordinal $\alpha > 0$ tous les points du plan a_ξ et b_ξ, où ξ est un nombre ordinal $<\alpha$, sont déjà définis, posons $A_\alpha = \{a_\xi\}_{\xi<\alpha}$ et $B_\alpha = \{b_\xi\}_{\xi<\alpha}$. Si $A_\alpha f_\alpha(B_\alpha) \neq 0$, soit $a_\alpha = b_\alpha = a_0$. Si $A_\alpha f_\alpha(B_\alpha) = 0$, soit a_α le premier terme de la suite $\{p_\xi\}_{\xi<\alpha}$ dont toutes les distances aux points de l'ensemble $E_\alpha = A_\alpha + B_\alpha + f_\alpha(B_\alpha)$ sont positives, distinctes deux à deux et distinctes de toutes les distances entre deux points quelconques de E_α; d'après le lemme un tel point a_α existe (car vu que $\alpha < \varphi$, les ensembles A_α et B_α, donc aussi $f_\alpha(B_\alpha)$ et E_α, sont de puissance $<2^{\aleph_0}$). Posons $b_\alpha = f_\alpha^{-1}(a_\alpha)$, où f_α^{-1} désigne la transformation du plan inverse à f_α.

Soit maintenant A' un ensemble superposable avec A et B' un ensemble superposable avec B. Il existe donc des isométries f_β et f_γ du plan telles que $A' = f_\beta(A)$ et $B' = f_\gamma(B)$. Comme $f_\beta^{-1}f_\gamma = f_\beta^{-1}(f_\gamma)$ en est également une, il existe un nombre ordinal $\alpha < \varphi$ tel que $f_\beta^{-1}f_\gamma = f_\alpha$.

Si $A_\alpha f_\alpha(B_\alpha) = 0$, on a $b_\alpha = f_\alpha^{-1}(a_\alpha)$, donc $a_\alpha = f_\alpha(b_\alpha)$ et $f_\beta(a_\alpha) = f_\beta f_\alpha(b_\alpha) = f_\beta f_\beta^{-1} f_\gamma(b_\alpha) = f_\gamma(b_\alpha)$. Or, on a $f_\beta(a_\alpha) \in f_\beta(A) = A'$, $f_\gamma(b_\alpha) \in f_\gamma(B) = B'$ et $f_\beta(a_\alpha) = f_\gamma(b_\alpha)$; on trouve donc $A'B' \neq 0$.

Si $A_\alpha f_\alpha(B_\alpha) \neq 0$, on a à plus forte raison $Af_\alpha(B) \neq 0$, donc aussi $f_\beta[Af_\alpha(B)] \neq 0$, et comme $f_\beta[Af_\alpha(B)] = f_\beta(A)\cdot f_\beta f_\alpha(B) = f_\beta(A) f_\gamma(B) = A'B'$, on trouve encore $A'B' \neq 0$.

On a donc toujours $A'B' \neq 0$. Supposons qu'il existe deux points distincts m' et n' de l'ensemble $A'B'$. On aurait donc $f_\beta^{-1}(m') \in f_\beta^{-1}(A') = A$ et pareillement $f_\beta^{-1}(n') \in A$, $f_\gamma^{-1}(m') \in f_\gamma^{-1}(B') = B$ et $f_\gamma^{-1}(n') \in B$. Comme $m' \neq n'$, les points $f_\beta^{-1}(m')$ et $f_\beta^{-1}(n')$ de A seraient distincts et auraient évidemment la même distance que les points $f_\gamma^{-1}(m')$ et $f_\gamma^{-1}(n')$ de B. Or, nous allons voir que la distance entre deux points de A est toujours distincte de la distance entre deux points quelconques de B.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait des nombres ordinaux μ, ν, ϱ et σ, et même les plus petits, tels que $\mu < \nu < \varphi$, $\varrho < \sigma < \varphi$ et que la distance entre les points a_μ et a_ν de A serait positive et égale à celle entre les points b_ϱ et b_σ de B. On ne peut pas avoir $a_\nu = a_0$, puisque la distance de a_μ à a_ν serait alors égale à celle de a_0 à a_μ, contrairement à la condition imposée aux nombres μ, ν, ϱ et σ. Pareillement, on prouve que $b_\sigma \neq b_0$.

Si $\sigma < \nu$, on a $a_\mu \in A_\nu$, $b_\varrho \in B_\nu$, $b_\sigma \in B_\nu$ et d'après la définition de a_ν, la distance entre $a_\nu \neq a_0$ et a_μ est distincte de celle entre b_σ et b_ϱ (puisque les distances entre deux points de B_ν coïncident avec celles entre deux points de $f_\nu(B_\nu)$). On aboutit donc à une contradiction.

Si $\sigma = \nu$, on a $a_\mu \in A_\nu$, $b_\varrho \in B_\nu$ et d'après la définition de a_ν, la distance entre a_ν et $f_\nu(b_\varrho)$ est distincte de celle entre a_ν et a_μ, sauf peut-être le cas où $f_\nu(b_\varrho) = a_\mu$, mais alors on aurait l'inégalité $A_\nu f_\nu(B_\nu) \neq 0$, donc l'égalité $a_\nu = a_0$, dont l'impossibilité vient d'être constatée. Or, $a_\nu = f_\nu(b_\nu)$ et la distance entre $a_\nu = f_\nu(b_\nu)$ et $f_\nu(b_\varrho)$ est égale à celle entre b_ν et b_ϱ. Donc, la distance entre b_ν et b_ϱ est distincte de celle entre a_ν et a_μ, ce qui implique une contradiction.

Enfin, si $\sigma > \mu$ la distance entre a_σ et $f_\sigma(b_\varrho)$ est distincte de celle entre a_μ et a_ν d'après la définition de $a_\sigma \neq a_0$. La distance entre $f_\sigma^{-1}(a_\sigma) = b_\sigma$ et $f_\sigma^{-1}f_\sigma(b_\varrho) = b_\varrho$ est donc distincte de celle entre a_μ et a_ν, ce qui implique une contradiction.

Il est ainsi démontré que les ensembles A' et B' ne peuvent pas avoir deux points distincts communs. Comme nous avons démontré plus haut, on a $A'B' \neq 0$. Les ensembles A' et B' ont donc exactement un point commun, ce qui achève la démonstration de la thèse proposée.

D'après une remarque de S. Świerczkowski, une légère modification de la démonstration permettrait de prouver, pour tout nombre naturel $n > 1$, l'existence de n ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$ dont chacun contient plus qu'un point et qui sont tels que si, pour $j = 1, 2, \ldots, n$, on désigne par E'_j un ensemble quelconque superposable avec E_j, l'ensemble $E'_1 E'_2 \ldots E'_n$ est formé d'un seul point.

Le problème de définir effectivement deux ensembles satisfaisant aux conditions de H. Steinhaus reste ouvert.

D'après une remarque de A. Schinzel, l'ensemble A de tous les nombres réels positifs $\leqslant 1$ et l'ensemble B de tous les nombres entiers sont tels que tout ensemble de nombres réels superposable avec A a exactement un point commun avec tout ensemble de nombres réels superposable avec B.

Revenons sur le plan. Une autre question (posée aussi par H. Steinhaus et qui reste ouverte) est la suivante: A désignant l'ensemble de tous les points aux coordonnées entières, existe-t-il un ensemble B tel que tout ensemble superposable avec B ait exactement un point commun avec A. On peut démontrer que si un tel ensemble B existe, il ne peut être ni fermé et borné, ni ouvert et borné.

Or, S. Świerczkowski a démontré qu'il n'existe aucun ensemble E (non vide et qui n'est pas le plan tout entier) qui ait exactement un point commun avec tout ensemble H superposable avec E et distinct de E.

Supposons, en effet, qu'un tel ensemble E existe. L'ensemble E étant non vide et distinct du plan, il existe un point $a \in E$ et un point $b \notin E$, de même qu'une translation T du plan transformant a en b. On a donc

$b \in T(E)$ et $b \notin E$, d'où $T(E) \neq E$. D'après l'hypothèse sur l'ensemble E, l'ensemble $ET(E)$ est donc formé d'un seul point, soit p. Posons $q = T^{-1}(p)$. On a évidemment $q \in E$, car $p \in T(E)$ et $T^{-1}(T(E)) = E$. L'ensemble E étant infini (sinon, il existerait une translation de E n'ayant aucun point commun avec E), il existe un point s de E autre que p et q.

Soit R la rotation d'angle π autour du milieu du segment $\overline{sq}$. On a $R(q) = s$ et $R(s) = q$. Vu que $q \in E$ et $s \in E$, on trouve $q \in ER(E)$ et $s \in ER(E)$. Comme $s \neq q$ il en résulte en vertu de la propriété de l'ensemble E que $R(E) = E$, d'où $R(p) \in E$.

Or, on voit sans peine que les segments $\overline{pq}$ et $\overline{sR(p)}$ sont parallèles et ont la même longueur.

Il en résulte que $s = T(R(p))$ et comme $R(p) \in E$, on trouve $s \in T(E)$, donc $s \in ET(E)$. L'ensemble $ET(E)$ étant formé d'un seul point p, cela donne $s = p$, contrairement à la définition du point s. L'existence de l'ensemble E implique donc une contradiction, c. q. f. d.

Cette démonstration est valable pour l'espace à un nombre naturel m quelconque de dimensions.

Reçu par la Rédaction le 4. 3. 1958

Sur la compactification des espaces de proximité

par

A. Császár (Budapest) et **S. Mrówka** (Warszawa)

1. Soit R un espace de proximité au sens de V. A. Efremovitch (v. [1], p. 195, § 2) et écrivons, comme d'habitude, $A\,\delta\,B$ si les ensembles $A \subset R$ et $B \subset R$ sont *voisins* et $A\,\bar{\delta}\,B$ s'ils sont *éloignés*.

Rappelons quelques notions et résultats de la théorie de ces espaces.

En appelant ouverts les ensembles $G \subset R$ tels que $x \in G$ entraîne $\{x\}\,\bar{\delta}\,R-G$, on définit sur R une topologie complètement régulière (v. [1], p. 196, théorème 2), appelée topologie *engendrée* par la structure de proximité de l'espace R. $E \neq 0$ étant un sous-ensemble de R, la relation δ définit une structure de proximité sur E, qui engendre la même topologie que l'on obtient en considérant E comme sous-espace de l'espace topologique R, engendré par la structure de proximité définie sur R. K étant un espace de Hausdorff compact (1), il existe une structure de proximité, et une seule, qui engendre la topologie de K, notamment celle qui s'obtient en posant $A\,\delta\,B$ si et seulement si $\bar{A} \cap \bar{N} \neq 0$ (2) (v. [1], p. 198, théorème 3). Ce fait permet donc de considérer un espace de Hausdorff compact quelconque comme espace de proximité.

On appelle *δ-continue* une application f d'un espace de proximité R dans un espace de proximité S, si $A \subset R$, $B \subset R$, $A\,\delta\,B$ entraîne $f(A)\,\delta\,f(B)$. L'application f est un *équimorphisme*, si elle est biunivoque et si f et f^{-1} sont δ-continues; R et S sont dits *équimorphes* s'il existe un équimorphisme f tel que $S = f(R)$.

Dans la théorie des espaces de proximité, un rôle fondamental est joué par le théorème de plongement de Y. M. Smirnoff: *À tout espace de proximité R on peut attacher un espace de Hausdorff compact R^*, univoquement déterminé à un équimorphisme près, tel que R soit équimorphe à un sous-ensemble dense de R^** (v. [3], p. 551 à 556, en particulier théorème 8 et 9).

Le but de ce travail est, d'une part, de donner de cet important théorème une nouvelle démonstration, fondée sur une méthode complè-

(1) Nous employons le mot „compact" au sens de „bicompact".

(2) $\bar{A}$ désigne la fermeture de l'ensemble A.