Sur le prolongement des homéomorphies

par

R. Duda (Wrocław)

1. A. Kirkor a montré que A et B étant des ensembles compacts, homéomorphes, de dimension nulle et situés sur des sphères à $n > 1$ dimensions, toute homéomorphie entre leurs compléments à ces sphères se laisse prolonger aux sphères tout entières. Sa démonstration (non publiée) fait un emploi essentiel des propriétés de polyèdres. Il a posé donc le problème de la validité du théorème en question pour les espaces plus généraux que les sphères.

Il sera démontré ici que ce théorème se laisse généraliser aux continus localement connexes arbitraires X et Y qui ne sont pas coupés localement (au sens qui sera précisé plus loin) par leurs sous-ensembles A et B compacts de dimension nulle (voir le théorème 3). L'hypothèse que A et B ne coupent localement X et Y respectivement est si forte que celle de l'homéomorphie entre A et B devient superflue: elle résulte de la démonstration. Cependant, cette hypothèse n'est qu'une condition suffisante pour l'existence du prolongement $h^*(X) = Y$ d'une homéomorphie $h(X-A) = Y-B$ quelconque. En effet, $A = B$ étant composé d'un seul point p qui coupe un segment rectiligne $X = Y$, l'identité (de même que toute homéomorphie) entre $X-A$ et $Y-B$ se laisse prolonger à celle entre X et Y.

Le problème d'une condition à la fois suffisante et nécessaire est donc ouvert, de même que celui des généralisations aux espaces qui ne sont pas des continus localement connexes.

Il est toutefois à observer que l'hypothèse de la dimension nulle de A et B est essentielle, même en admettant que ces ensembles sont homéomorphes et non-denses dans X et Y respectivement. Soient en effet X le solide de révolution du cercle $(x-1)^2+y^2 \leqslant 1$ autour de l'axe des y, A le segment $0 \leqslant x \leqslant 1$ de l'axe de x, Y la sphère massive $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ et B le segment $-1 \leqslant y \leqslant 1$ de l'axe des y. Alors $X-A$ et $Y-B$ sont homéomorphes, de même que A et B, ni A n'est une coupure locale (voir plus loin, p. 179) de X, ni B de Y, et on a $\overline{X-A} = X$, de même que $\overline{Y-B} = Y$. Cependant, X n'est pas homéomorphe à Y. À plus forte raison, aucune homéomorphie entre $X-A$ et $Y-B$ ne se laisse prolonger à celle entre X et Y.

La méthode de la démonstration qui suit est empruntée au travail d'Antoine [1]. Les modifications portent sur la notion de ses „surfaces de définition" déterminant les ensembles parfaits de dimension nulle et ont pour but de la rendre applicable aux continus localement connexes pour y déterminer les ensembles compacts de dimension nulle, pas nécessairement parfaits.

J'ai choisi cette méthode malgré qu'elle soit plutôt primitive et qu'elle comporte de longs calculs, mais elle me semble avoir l'avantage d'être naturelle et intuitive géométriquement.

Les notations sont celles de la monographie de Kuratowski [2].

2. X étant un continu, soit $\{A_i\}$ une suite de ses sous-ensembles compacts (non-vides) assujettie pour $i=1,2,\ldots$ aux conditions:

(1) $$A_{i+1}\subset \operatorname{Int}(A_i)\,,$$

(2) tout A_i n'a qu'un nombre fini de composantes A_{ij}:

$$A_i=\sum_{j=1}^{n(i)} A_{ij}\,,$$

(3) quel que soit A_{ij}, il existe un $A_{i+1\,k}$ tel que

$$A_{i+1\,k}\subset \operatorname{Int}(A_{ij})\,.$$

Toute suite $\{A_i\}$ ainsi définie sera dite une *suite déterminant l'ensemble*

(4) $$A=\prod_{i=1}^{\infty} A_i\,.$$

On a, d'après (3) et (4), $A=\bar{A}$ (en vertu du théorème de Cantor sur la partie commune d'une suite descendante d'ensembles compacts).

LEMME 1. *Si X est un continu localement connexe et $A=\bar{A}\subset X$, il existe dans X une suite $\{A_i\}$ déterminant l'ensemble A.*

Démonstration. La suite $\{A_i\}$ satisfaisant aux conditions (1)-(4) sera définie par l'induction à l'aide du théorème de Hahn-Mazurkiewicz-Sierpiński ([2], II, p. 185). Soit en effet $X=\sum_{m=1}^{n_1} C_{1m}$, où C_{1m} est un continu de diamètre $\delta(C_{1m})<\delta(X)/2$ pour $m=1,2,\ldots,n_1$. Désignons par A_1 la somme de tous les C_{1m} pour lesquels $C_{1m}\cdot A\neq 0$. On a donc $A\subset\operatorname{Int}(A_1)$, car la distance d_1 entre A et la somme de tous les autres C_{1m} est positive (distance entre deux ensembles compacts disjoints):

$$d_1=\varrho(A,\overline{X-A_1})>0\,.$$

A_i étant supposé défini de façon que $A\subset\operatorname{Int}(A_i)$, c'est-à-dire que

(5) $$d_i=\varrho(A,\overline{X-A_i})>0\,,$$

soit $X=\sum_{m=1}^{n_{i+1}} C_{i+1\,m}$, où $C_{i+1\,m}$ est un continu de diamètre

(6) $$\delta(C_{i+1\,m})<d_i/2\quad \text{pour}\quad m=1,2,\ldots,n_{i+1}\,,$$

et désignons par A_{i+1} la somme de tous les $C_{i+1\,m}$ tels que $C_{i+1\,m}\cdot A\neq 0$. Alors

(7) $$A\subset\operatorname{Int}(A_{i+1})\quad \text{pour tout}\quad i=1,2,\ldots,$$

la distance d_{i+1} entre A et le sous-ensemble $X-A_{i+1}$ de la somme de tous les autres $C_{i+1\,m}$ étant positive. La suite $\{A_i\}$ satisfaisant aux conditions (5) et (7) est ainsi définie.

Reste à en déduire les conditions (1)-(4).

Soit $Q_i(a)\subset X$ la sphère ouverte de centre a et de rayon $d_i/2$. Notons que

(8) $$a\in A_{i+1}\ \text{entraîne}\ Q_i(a)\subset A_i\quad \text{pour}\quad i=1,2,\ldots,$$

En effet, d'après la définition de A_{i+1}, on a $a\in C_{i+1\,k}$ pour un $k=1,2,\ldots,n_{i+1}$, d'où $\varrho(a,A)\leqslant\delta(C_{i+1\,k})<d_i/2$ en vertu de (6), et par conséquent $x\in Q_i(a)$ entraîne $\varrho(x,A)\leqslant\varrho(x,a)+\varrho(a,A)<d_i/2+d_i/2=d_i$, d'où $x\in X-\overline{X-A_i}$ en vertu de (5), donc $x\in A_i$. On a ainsi (8), ce qui équivaut à la condition (1). Elle se trouve donc satisfaite.

On a en outre d'après les définitions de A_{i+1} et d_{i+1}

$$d_{i+1}=\varrho(A,\overline{X-A_{i+1}})\leqslant\delta(C_{i+1\,m})<d_i/2\quad \text{pour un}\quad m=1,2,\ldots,n_i+1$$

en vertu de (6), d'où $\lim_{i\to\infty}d_i=0$. Par conséquent, l'ensemble A étant compact, il existe pour tout $x\in X-A$ un tel i que $d_i<\varrho(x,A)$, d'où $x\in X-A_{i+1}$ en vertu de (5) et (6). Ainsi $x\in A_i$ pour tout $i=1,2,\ldots$ entraîne $x\in A$, c'est-à-dire que $\prod_{i=1}^{\infty}A_i\subset A$. La réciproque est une conséquence immédiate de (7) et (1). L'égalité (4) est donc également satisfaite.

Il en est de même de la condition (2), puisque le nombre n_i étant, pour tout $i=1,2,\ldots$, fini par définition, celui des continus C_{im} composant A_i l'est à plus forte raison; en désignant donc par $A_{i1},A_{i2},\ldots,A_{in(i)}$ les composantes de A_i, on a $n(i)\leqslant n_i<\infty$.

Enfin, tout A_{ij}, où $j=1,2,\ldots,n(i)$, étant ouvert dans A_i en vertu de (2), on a (voir [2], I, p. 31 (i))

(9) $$\operatorname{Int}(A_i)=\sum_{j=1}^{n(i)}\operatorname{Int}(A_{ij})$$

et tout $C_{ik} \subset A_{ij} \subset A_i$ ayant par définition des points communs avec A, on a $A \cdot A_{ij} \neq 0$ pour tout $j = 1, 2, \ldots, n(i)$.

Fixons j. Comme A est couvert par les continus $A_{i+1\,k}$ où $k = 1, 2, \ldots, n(i+1)$, la dernière inégalité entraîne $A_{i+1\,k} \cdot A_{ik} \neq 0$ tout au moins pour une valeur de k. Il en résulte par suite de la connexité de la $A_{i+1\,k}$ que

(10) $$A_{i+1\,k} \subset A_{ij},$$

puisque les continus A_{ij} sont disjoints deux à deux. Leurs sous-ensembles $\mathrm{Int}(A_{ij})$ l'étant donc aussi, la conséquence

(11) $$A_{i+1\,k} \subset A_{i+1} \subset \mathrm{Int}(A_i) = \sum_{j=1}^{n(i)} \mathrm{Int}(A_{ij})$$

de la condition (2) lue pour $i+1$ et k au lieu de i et j, de (1) et de (9) montre en vertu de (10) que l'on a $A_{i+1\,k} \subset \mathrm{Int}(A_{ij})$ pour cette valeur de k. La condition (3) est donc aussi réalisée, ce qui achève la démonstration.

LEMME 2. *Admettons que X est un continu, $A = \bar{A} \subset X$, $\dim(A) = 0$, que $\{A_i\}$ est une suite déterminant A et que A_{ij}, où $j = 1, 2, \ldots, n(i)$, est la j-ème composante de son i-ème terme.*

On a alors

(12) $$\lim_{i\to\infty} \max_{j=1,2,\ldots,n(i)} \delta(A_{ij}) = 0,$$

(13) *il existe pour tout $k = 1, 2, \ldots, n(i+1)$ un tel $j = 1, 2, \ldots, n(i)$ que*
$$A_{i+1\,k} \subset \mathrm{Int}(A_{ij}).$$

Démonstration. En supposant que la limite (12) soit égale à un $d > 0$, considérons pour tout $i = 1, 2, \ldots$ l'ensemble compact $S_i \subset A_i$ qui est la somme de tous les A_{ij} tels que $\delta(A_{ij}) \geqslant d$ (donc somme d'un nombre fini de continus). Toute composante de S_i aurait à plus forte raison le diamètre au moins égal à d, quel que soit $i = 1, 2, \ldots$ La suite $\{S_i\}$ étant descendante en vertu de (1) et (2), toute composante C de l'ensemble $\prod_{i=1}^{\infty} S_i$ est la partie commune d'une suite descendante de composantes de S_i, où $i = 1, 2, \ldots$, dans lesquelles elle est contenue. N'étant pas vide en vertu du théorème de Cantor, le continu C serait donc aussi de diamètre égal où supérieur à d (par suite de la continuité de la fonction δ). Cependant, $S_i \subset A_i$ entraîne $\prod_{i=1}^{\infty} S_i \subset A$ en vertu de (4), d'où $C \subset A$, contrairement à l'hypothèse que $\dim(A) = 0$. La condition (12) est ainsi établie.

La condition (13), qui est réciproque de (3), résulte aussitôt de (11), puisque tout $A_{i+1\,k}$, en tant qu'un continu, ne peut être contenu que dans un seul sommande $\mathrm{Int}(A_{ij})$ de $\mathrm{Int}(A_i)$, ces sommandes étant séparés deux à deux en tant que sous-ensembles de composantes distinctes.

3. Convenons de dire que l'ensemble A est une *coupure locale* de X ou qu'il *coupe X localement* lorsqu'il existe une région (c'est-à-dire ensemble ouvert et connexe) $R \subset X$ telle que $R - A$ n'est pas connexe [1].

THÉORÈME 1. *Admettons que X est un continu localement connexe, Y est un continu, $A = \bar{A} \subset X$, $B = \bar{B} \subset Y$, $\dim(A) = \dim(B) = 0$, que A n'est pas une coupure locale de X ni B de Y, que $h(X-A) = Y-B$ est une homéomorphie et que $\{A_i\}$ est une suite déterminant l'ensemble A.*

Il existe alors une suite $\{B_i\}$ déterminant B et une correspondance biunivoque f (terme par terme et composante par composante) entre A_i et B_i, telle que

(14) $$f(A_{ij}) = B_{ij} \quad \textit{pour tout} \quad i = 1, 2, \ldots \quad \textit{et} \quad j = 1, 2, \ldots, n(i),$$

(15) $$A_{i+1\,k} \subset A_{ij} \quad \textit{entraîne} \quad B_{i+1\,k} \subset B_{ij}.$$

Démonstration. Posons pour tout $i = 1, 2, \ldots$

(16) $$h(X - A_i) = Y - B_i.$$

On a donc en vertu de (4) et h étant biunivoque par hypothèse,

$$Y - B = h(X-A) = h\Big(\sum_{i=1}^{\infty} (X - A_i)\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} h(X - A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (Y - B_i),$$

c'est-à-dire

(17) $$B = \prod_{i=1}^{\infty} B_i.$$

La condition (4) est donc satisfaite pour la suite $\{B_i\}$.

On a $X - \mathrm{Int}(A_i) \subset X - A_{i+1}$ d'après (1), d'où, en appliquant (16) à $i+1$ au lieu de i,

(18) $$h(\overline{X-A_i}) = h[X - (X - \overline{X-A_i})] = h[X - \mathrm{Int}(A_i)] \subset h(X - A_{i+1}) = Y - B_{i+1}.$$

On a en même temps $X - A_i \subset X - \mathrm{Int}(A_i)$, d'où $\overline{X-A_i} \subset X - \mathrm{Int}(A_i) \subset X - A_{i+1} \subset X - A$ d'après (1) et (4) et, par suite de la bicontinuité de h, $Y - \mathrm{Int}(B_i) = Y - (Y - \overline{Y - B_i}) = \overline{Y - B_i} = \overline{h(X-A_i)} = h(\overline{X - A_i}) \subset Y - B_{i+1}$

[1] Cette définition peut être considérée comme celle du *séparateur local*. Or les notions de *séparation* et de *coupure* coïncident pour des A compacts et des régions R des continus localement connexes (cf. [2], II, p. 187, 8).

en vertu de (16) et (18). Ainsi $B_{i+1} \subset \mathrm{Int}(B_i)$, ce qui est la réalisation de la condition (1) pour $\{B_i\}$.

Pour montrer que cette suite satisfait également à la condition (2), notons d'abord que *$A_{ij}-A$ est connexe.*

On a, en effet, $A \cdot \mathrm{Fr}(A_i) = 0$ pour $i = 1$ d'après la définition de A et pour $i = 2, 3, \dots$ en vertu de (7), d'où à plus forte raison

$$A \cdot \mathrm{Fr}(A_{ij}) = 0 \,, \tag{19}$$

A_{ij} étant une composante de A_i par définition. En même temps, l'hypothèse que $\dim(A) = 0$ entraîne que

$$\overline{A_{ij}-A} = A_{ij} \,, \tag{20}$$

A_{ij} étant par définition un continu composé de plus d'un point. En supposant donc que

$$A_{ij}-A = M+N \,, \tag{21}$$

$$M\cdot\overline{N}+\overline{M}\cdot N = 0 \quad \text{et} \quad M \neq 0 \neq N \,, \tag{22}$$

on aurait $A_{ij} = \overline{M}+\overline{N}$ d'après (20), d'où $\overline{M}\cdot\overline{N} \neq 0$, et $\overline{M}\cdot\overline{N}-A \subset M+N$ d'après (21), d'où $\overline{M}\cdot\overline{N}-A = (\overline{M}\cdot\overline{N}-A)\cdot(M+N) \subset \overline{M}\cdot\overline{N}\cdot M+\overline{M}\cdot\overline{N}\cdot N = 0$ en vertu de (22), c'est-à-dire $\overline{M}\cdot\overline{N} \subset A$. Il en résulte en vertu de (19) que $\overline{M}\cdot\overline{N} \subset \mathrm{Int}(A_{ij})$.

Il existerait donc une composante R de $\mathrm{Int}(A_{ij})$ telle que $R\cdot\overline{M}\cdot\overline{N} \neq 0$. Le continu X étant localement connexe par hypothèse, R est un ensemble ouvert et on aurait par suite de l'inégalité qui précède

$$R\cdot M \neq 0 \neq R\cdot N \,. \tag{23}$$

Comme ensemble ouvert et connexe (car une composante), R est une région; l'hypothèse que A ne coupe pas X localement entraîne donc que l'ensemble $R-A$ est connexe. M et N étant disjoints de A en vertu de (21), on en conclut en vertu de (23) que $(R-A)\cdot M \neq 0 \neq (R-A)\cdot N$, et $R \subset A_{ij}$ entraîne d'après (21) que $R-A = (R-A)\cdot M+(R-A)\cdot N$. Cette décomposition de l'ensemble connexe $R-A$ en deux sommandes non-vides est toutefois impossible, car ils sont contenus dans les ensembles M et N respectivement, qui sont séparés d'après (22).

La connexité de l'ensemble $A_{ij}-A$ étant ainsi établie, définissons $B_{ij}-B$ pour $i = 1, 2, \dots$ et $j = 1, 2, \dots, n(i)$ par l'équation

$$h(A_{ij}-A) = B_{ij}-B \,, \tag{24}$$

qui entraîne la connexité de $B_{ij}-B$. En définissant donc B_{ij} par l'égalité

$$B_{ij} = \overline{B_{ij}-B} \,, \tag{25}$$

B_{ij} est un continu.

On a $X = X-A_i+\sum_{j=1}^{n(i)} A_{ij}$ en vertu de (2) et les sommandes de cette somme finie sont disjoints. En vertu de la conséquence $A \subset A_i$ de (4), on a donc pour tout $i = 1, 2, \dots$

$$X-A = X-A_i+\sum_{j=1}^{n(i)} (A_{ij}-A) \,,$$

d'où par homéomorphie h d'après (24) et (16)

$$Y-B = Y-B_i+\sum_{j=1}^{n(i)} (B_{ij}-B) \,. \tag{26}$$

En ajoutant B aux deux membres, on a donc $Y = (Y-B)+B = Y-B+\sum_{j=1}^{n(i)}(B_{ij}-B)+B$; cette somme est également finie et ses sommandes sont disjoints.

On a par conséquent $B_i = \sum_{j=1}^{n(i)}(B_{ij}-B)+B$, d'où en vertu de (25)

$$B_i = \sum_{j=1}^{n(i)} B_{ij}+B \,, \tag{27}$$

et comme (26) entraîne $Y = \overline{Y-B_i}+\sum_{j=1}^{n(i)} B_{ij}$ (puisque Y étant un continu et $\dim(B)$ étant nulle par hypothèse, on a $\overline{Y-B} = Y$), il vient, en multipliant par B,

$$B = B\cdot\overline{Y-B_i}+B\cdot\sum_{j=1}^{n(i)} B_{ij} = B\cdot\sum_{j=1}^{n(i)} B_{ij}$$

(puisque $B \subset B_{i+1}$ d'après (17) et $B_{i+1} \subset \mathrm{Int}(B_i) = Y-\overline{Y-B_i}$ d'après la condition (1) établie pour $\{B_i\}$). On a ainsi dans (27) $B \subset \sum_{j=1}^{n(i)} B_{ij}$, d'où

$$B_i = \sum_{j=1}^{n(i)} B_{ij} \,. \tag{28}$$

Il s'agit à présent de montrer que les continus B_{ij} sont disjoints deux à deux. Remarquons à ce but que le continu *Y est localement connexe.*

En effet, l'ensemble $X-A$ l'est comme sous-ensemble ouvert du continu X, qui est localement connexe par hypothèse; par conséquent, $Y-B$ l'est aussi d'après l'hypothèse que $h(X-A) = Y-B$ est une homéomorphie. Les points en lesquels le continu Y pourrait ne pas être localement connexe devraient donc se trouver dans B, ce qui est cependant impossible, puisque B contiendrait alors, d'après un théorème de Moore-Urysohn-Zarankiewicz (voir [2], II, p. 176), des continus de dimension positive, contrairement à l'hypothèse que $\dim(B) = 0$.

On a en outre $A_{ij_1} \cdot A_{ij_2} = 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$ et pour deux valeurs quelconques j_1 et j_2 de j telles que $1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant n(i)$, car A_{ij_1} et A_{ij_2} sont des composantes (de A_i); il en résulte d'après (19) que $(B_{ij_1} - B) \cdot (B_{ij_2} - B) = h(A_{ij_1} - A) \cdot h(A_{ij_2} - A) = h[(A_{ij_1} - A) \cdot (A_{ij_2} - A)] = 0$, la fonction h étant une homéomorphie. On a par suite

(29) $$B_{ij_1} \cdot B_{ij_2} \subset B\,.$$

Or supposons que l'on ait, pour un triple de telles valeurs des indices i, j_1 et j_2, l'inégalité $B_{ij_1} \cdot B_{ij_2} \neq 0$. Vu que,

(30) $$B \subset B_{i+1} \subset \mathrm{Int}(B_i)$$

en vertu de (17) et de la condition (1) établie pour $\{B_i\}$, il existerait donc, en vertu de (29), une composante R de l'ensemble ouvert $\mathrm{Int}(B_i)$ telle que $B_{ij_1} \cdot B_{ij_2} \cdot R \neq 0$, d'où $B_{ij_1} \cdot R \neq 0 \neq B_{ij_2} \cdot R$. Par suite de la connexité locale de Y, cette composante est aussi un ensemble ouvert. $B_{ij_1} \cdot R$ et $B_{ij_2} \cdot R$ sont donc des sous-ensembles ouverts (relatifs) des continus B_{ij_1} et B_{ij_2} respectivement. Comme tels, ils contiennent des continus (composés de plus d'un point), d'où

(31) $$B_{ij_1} \cdot (R - B) \neq 0 \neq B_{ij_2} \cdot (R - b)\,,$$

puisque $\dim(B) = 0$ par hypothèse. En même temps, l'hypothèse que B n'est pas une coupure locale de Y entraîne la connexité de l'ensemble $R - B$, qui est en outre localement connexe comme sous-ensemble ouvert (puisque $B = \bar{B}$ par hypothèse) du continu localement connexe Y. Il s'ensuit en vertu du théorème de Mazurkiewicz-Moore-Menger ([2], II, p. 184), que $R - B$ est localement connexe par arcs. Soit donc L un arc tel que $L \subset R - B$ et

(32) $$L \cdot B_{ij_1} \neq 0 \neq L \cdot B_{ij_2}\,,$$

qui existe en vertu de (31). Or $R \subset \mathrm{Int}(B_i)$ entraîne $R - B \subset \mathrm{Int}(B_i) - B \subset B_i - B = \sum_{j=1}^{n(i)} (B_{ij} - B)$ d'après (28), d'où $L \subset \sum_{j=1}^{n(i)} (B_{ij} - B)$ et par suite $L = \sum_{j=1}^{n(i)} L \cdot (B_{ij} - B)$, ce qui est impossible, les sommandes de cette somme étant séparés d'après (29) et au moins deux d'entre eux n'étant pas vides d'après (32).

Il est ainsi établi que les sommandes (28) de B_i sont disjoints. Comme des continus, ils sont donc des composantes de B_i, qui satisfait par conséquent à la condition (2).

Pour montrer que les continus B_{ij} satisfont à la condition (3), rappelons que cette condition pour A_{ij} entraîne l'existence d'un k tel que $A_{i+1\,k} \subset \mathrm{Int}(A_{ij})$, d'où $A_{i+1\,k} - A \subset \mathrm{Int}(A_{ij}) - A = \mathrm{Int}(A_{ij}) \cdot (X - A) = \mathrm{Int}(A_{ij}) \cdot \mathrm{Int}(X - A) = \mathrm{Int}[A_{ij} \cdot (X - A)] = \mathrm{Int}(A_{ij} - A)$. Il en résulte par l'homéomorphie h que d'après (24)

(33) $$B_{i+1\,k} - B \subset h[\mathrm{Int}(A_{ij} - A)] \subset \mathrm{Int}[h(A_{ij} - A)] = \mathrm{Int}(B_{ij} - B)\,,$$

d'où $B_{i+1\,k} \subset B_{ij}$ d'après (25), donc $B \cdot B_{i+1\,k} \subset B \cdot B_{ij} \subset B \subset \mathrm{Int}(B_i) = \sum_{m=1}^{n(i)} \mathrm{Int}(B_{im})$ en vertu de (30) et (28), puisque les continus B_{im} sont disjoints et leur nombre est fini en vertu de la condition (2) établie pour $\{B_i\}$. On a donc $B_{ij} \cdot \mathrm{Int}(B_{im}) = 0$ pour tout $m \neq j$ et par conséquent $B \cdot B_{i+1\,k} \subset \mathrm{Int}(B_{ij})$. On en conclut par l'addition membre à membre à (33) que l'on a

$$B_{i+1\,k} = (B_{i+1\,k} - B) + B \cdot B_{i+1\,k} \subset \mathrm{Int}(B_{ij} - B) + \mathrm{Int}(B_{ij}) = \mathrm{Int}(B_{ij})\,,$$

c'est-à-dire la condition (3) pour $\{B_i\}$. La démonstration que $\{B_i\}$ est une suite déterminant l'ensemble B est ainsi achevée.

Reste à montrer que la fonction f définie par la condition (14) satisfait à (15). Or $A_{i+1\,k} \subset A_{ij}$ entraîne en effet $A_{i+1\,k} - A \subset A_{ij} - A$, d'où $B_{i+1\,k} - B \subset B_{ij} - B$ en vertu de (19) et, par passage aux fermetures, $B_{i+1\,k} \subset B_{ij}$ en vertu de (25), les ensembles B_{ij} étant des continus.

4. $\{\{A_{ij}\}\}$ où $i = 1, 2, \ldots$ et $j = 1, 2, \ldots, n(i)$ étant la suite double des composantes des termes de la suite $\{A_i\}$ déterminant l'ensemble $A \subset X$, considérons une suite partielle simple $\{A_{i\,j(i)}\}$ telle que

(34) $$A_{i+1\,j(i+1)} \subset A_{i\,j(i)}$$

pour tout $i = 1, 2, \ldots$, donc qui est descendante et contient exactement une composante de chaque A_i. Vu que $\dim(A) = 0$, leur partie commune se réduit en vertu du lemme 2 (voir (12)) à un point et, en vertu de (4), ce point appartient à l'ensemble A.

Toute suite $A_{i\,j(i)}$ de ce genre sera dite *suite déterminant le point*

(35) $$(a) = \prod_{i=1}^{\infty} A_{i\,j(i)} \quad \text{où} \quad a \in A\,.$$

Réciproquement, à tout point $a \in A$ vient correspondre une suite $\{A_{i\,j(i)}\}$, et une seule, qui le détermine. En effet, on a d'après (4) $a \in A_i$ pour tout $i = 1, 2, \ldots$ et il existe d'après (2) un seul A_{ij} tel que $a \in A_{ij}$. En le désignant par $A_{i\,j(i)}$, la suite $\{A_{i\,j(i)}\}$ satisfait à (34) et on a (35) en vertu de (12).

Ainsi la fonction

$$S(a) = \{A_{i\,j(i)}\} \tag{36}$$

qui fait correspondre à tout point $a \in A$ la suite déterminant ce point est biunivoque. Etant donné dans Y une suite $\{B_i\}$ déterminant l'ensemble B, soit

$$T(b) = \{B_{i\,j(i)}\} \quad \text{où} \quad b \in B \tag{37}$$

la fonction analogue.

Théorème 2. *Les hypothèses du théorème 1 (sauf celle sur h, qui est ici superflue) étant maintenues et la suite $\{B_i\}$, de même que la fonction f, satisfaisant à la thèse de ce théorème, la fonction*

$$g(a) = T^{-1}fS(a) \quad \textit{où} \quad a \in A \tag{38}$$

est une homéomorphie entre A et B.

Démonstration. La fonction g est biunivoque comme superposition des fonctions qui le sont.

D'après le théorème 1, $\{B_i\}$ est une suite déterminante, donc satisfaisant à (12) d'après le lemme 2, et la suite $\{B_{i\,j(i)}\}$ satisfait, en vertu de (15), à (34), ces formules étant entendues pour B au lieu de A. Elle est donc une suite déterminant un point $b \in B$ qui satisfait aux égalités $(b) = \prod_{i=1}^{\infty} B_{i\,j(i)}$ et (37). On a par conséquent d'après (14) et (37)

$$b = T^{-1}(\{B_{i\,j(i)}\}) = T^{-1}\big(\{f(A_{i\,j(i)})\}\big) = T^{-1}f(\{A_{i\,j(i)}\}) = T^{-1}fS(a)\,,$$

d'où $b = g(a)$ pour $a \in A$ en vertu de (38). Ainsi $a \in A$ entraîne $g(a) \in B$ c'est-à-dire que l'on a $g(A) \subset B$. Réciproquement, $B_{i+1\,k} \subset B_{ij}$ entraîne $A_{i+1\,k} \subset A_{ij}$ pour $A_{ij} = f^{-1}(B_{ij})$ par suite de la biunivocité de f. Le raisonnement analogue au précédent, et dans lequel ces formules jouent le rôle de (15) et (14), conduit donc à la conclusion que $b \in B$ entraîne $g^{-1}(b) \in A$, c'est-à-dire que $g^{-1}(B) \subset A$, d'où $gg^{-1}(B) \subset g(A)$, c'est-à-dire $B \subset g(A)$. Il est ainsi démontré que

$$g(A) = B\,. \tag{39}$$

Reste donc à établir la continuité de la fonction g. Notons à ce but que

$$g(A \cdot A_{i\,j(i)}) = B \cdot B_{i\,j(i)}\,. \tag{40}$$

En effet, $a \in A \cdot A_{i\,j(i)}$ entraîne $A_{i\,j(i)} \in S(a)$ d'après (36), d'où $f(A_{i\,j(i)}) \in fS(a)$, c'est-à-dire $B_{i\,j(i)} \in Tg(a)$ en vertu de (14) et (38) et par conséquent $g(a) \in B \cdot B_{i\,j(i)}$ d'après (39). Réciproquement, $g(a) \in B \cdot B_{i\,j(i)}$ entraîne $B_{i\,j(i)} \in Tg(a) = fS(a)$ d'après (37) et (38), d'où $f^{-1}(B_{i\,j(i)}) \in f^{-1}fS(a) = S(a)$, c'est-à-dire $A_{i\,j(i)} \in S(a)$ d'après (14) et par conséquent $a \in A \cdot A_{i\,j(i)}$ d'après (36).

Considérons à présent l'ensemble $E \subset A$ formé d'une suite convergente $\{a_k\}$ et de son point-limite $a = \lim_{k\to\infty} a_k$. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{k\to\infty} g(a_k) = g(\lim_{k\to\infty} a_k)\,. \tag{41}$$

Soit $\{A_{i\,j(i)}\}$ la suite déterminant le point $a \in E$. Par conséquent, la suite $\{f(A_{i\,j(i)})\} = \{B_{i\,j(i)}\}$ détermine, comme il a été constaté au début de la démonstration, le point $b = g(a)$. Or $a_k \in E \cdot A_{i\,j(i)}$ entraîne $g(a_k) \in g(E \cdot A_{i\,j(i)})$, d'où, la fonction g étant biunivoque et la suite $\{B_{i\,j(i)}\}$ étant descendante,

$$\lim_{k\to\infty} g(a_k) \in \operatorname*{Lim}_{i\to\infty} g(E \cdot A_{i\,j(i)}) = \operatorname*{Lim}_{i\to\infty} g(E) \cdot B_{i\,j(i)} = g(E) \cdot \operatorname*{Lim}_{i\to\infty} B_{i\,j(i)}$$
$$= g(E) \cdot \prod_{i=1}^{\infty} B_{i\,j(i)} = g(E) \cdot (b) = g(E) \cdot g(a) = g(a) = g(\lim_{k\to\infty} a_k)\,.$$

L'égalité (41) est ainsi établie, c. q. f. d.

Théorème 3. *Admettons que X est un continu localement connexe, Y un continu, $A = \bar{A} \subset X$, $B = \bar{B} \subset Y$, $\dim(A) = \dim(B) = 0$, que A n'est pas une coupure locale de X ni B de Y et que $h(X-A) = Y-B$ est homéomorphie.*

Il existe alors une homéomorphie $h^*(X) = Y$ qui est un prolongement de h.

Démonstration. Il existe dans X, en vertu du lemme 1, une suite $\{A_i\}$ déterminant l'ensemble A. Il existe donc, dans Y, en vertu du théorème 1, une suite $\{B_i\}$ déterminant l'ensemble B et une fonction bicontinue f assujettie à (14) et (15), d'où l'existence, en vertu du théorème 2, d'une homéomorphie $g(A) = B$ définie par (38). Posons

$$h^*(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour} \quad x \in A\,, \\ h(x) & \text{pour} \quad x \in X-A\,. \end{cases} \tag{42}$$

Ainsi définie, la fonction h est biunivoque, puisque g et h sont des homéomorphies et les ensembles de leurs valeurs sont disjoints.

Reste à établir la continuité de h^*. Soit donc p un point de X. Si $p \in X-A$, on a $h^*(p) = h(p)$ d'après (42). L'ensemble $X-A$ étant ouvert et h étant une homéomorphie, p en est un point de continuité. Si $p \in A$, on a $h^*(p) = g(p) \in B$ d'après (42) et H étant un entourage ouvert de $g(p)$ dans Y, il existe en vertu de la thèse (12) du lemme 1 un tel $i = 1, 2, \ldots$ que

$$B_{ij} \subset H \tag{43}$$

pour un $j = 1, 2, \ldots, n(i)$, où $B_{ij} \epsilon Tg(p)$ conformément à (37). L'identité $(A_{ij}-A)+A\cdot A_{ij} = A_{ij}$ entraîne d'après (42) que $h(A_{ij}-A)+g(A\cdot A_{ij}) = h^*(A_{ij})$, d'où $(B_{ij}-B)+B\cdot B_{ij} = h^*(A_{ij})$ d'après (24) et (40), c'est-à-dire

$$B_{ij} = h^*(A_{ij})\,. \tag{44}$$

En même temps, $p \epsilon A$ entraîne $p \epsilon A\cdot A_{ij}$ pour les mêmes valeurs de i et j en vertu de (40), d'où $p \epsilon \operatorname{Int}(A_{ij})$ en vertu des propriétés (7) et (9) des A_{ij}, établies dans la démonstration du lemme 1. Il existe donc dans X un entourage ouvert G de p tel que $G \subset A_{ij}$, ce qui entraîne $h^*(G) \subset h^*(A_{ij}) \subset H$ en vertu de (43) et (44). L'ensemble ouvert $H \subset Y$ étant arbitraire, l'existence d'un tel $G \subset X$ équivaut à la continuité de h en p (cf. par exemple [2], I, p. 73), c. q. f. d.

Travaux cités

[1] L. Antoine, *Sur les voisinages de deux figures homéomorphes*, Fund. Math. 5 (1924), p. 265-287.

[2] C. Kuratowski, *Topologie*, deux volumes (2me édition), Warszawa 1952.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 25. 2. 1958

On successive settings of an arc on the circumference of a circle

by

S. Świerczkowski (Warszawa)

Summary of results. Let (ϱ, φ) be a system of polar coordinates on the plane and $\varrho = \varrho_0$ the equation of a circle C. We consider an arbitrary natural N and such an angle ψ that all points $p_x = (\varrho_0, x\psi)$, where $x = 0, 1, \ldots, N$, are different. Let us suppose that C is a directed circle, say in the counter-clock-wise sense. Thus each two points $p_x, p_y \epsilon C$ define an arc with the initial point p_x and the endpoint p_y. We shall denote this (open) arc by $\langle x, y\rangle$. For $1 \leqslant x, y \leqslant N$ let us say that p_y *immediately follows* p_x if $p_z \notin \langle x, y\rangle$ for $1 \leqslant z \leqslant N$. Let p_{a_r} be the point which immediately follows p_0 and p_{a_k} that immediately followed by p_0.

THEOREM. *The difference $y-x$, where p_y immediately follows p_x, takes the values $a_r, -a_k, a_r-a_k$ (the last one only in the case $N < a_r+a_k-1$).*

This theorem is a conjecture of H. Steinhaus. Let us denote by (x, y) the length of $\langle x, y\rangle$.

COROLLARY 1. *The lengths (x, y), where p_y immediately follows p_x, take the values $(a_k, 0)$, $(0, a_r)$, (a_k, a_r) and the last value is attained only for $N < a_r+a_k-1$.*

This corollary easily follows from the above theorem. We shall deduce from it the following corollary, conjectured by J. Oderfeld:

COROLLARY 2. *If the length of C is 1, $(0, 1) = z = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ and f_m is the greatest Fibonacci number* (1) *which does not exceed N, then z^m, z^{m-1}, z^{m-2} are the possible values of (x, y), where p_y immediately follows p_x.*

In the proof of our theorem we shall apply some ideas due to P. Erdös and V. Sós Turán, who have proved it independently. Another proof (based on the theory of continued fractions) has been obtained by P. Szüsz. These proofs, however, have not been published.

1. In this section we shall prove our theorem. For convenience let us write $[x, y]$ instead of "p_y immediately follows p_x" and $[x, z, y]$ for $p_z \epsilon \langle x, y\rangle$.

(1) $f_1 = f_2 = 1$ and $f_n = f_{n-1}+f_{n-2}$ for $n = 3, 4, \ldots$