Площадь обобщенного круга как функция его радиуса (II)

Г. Фаст (Вроцлав)

Настоящая вторая часть работы посвященной изучению площади обобщенного круга как функции его радиуса содержит дальнейшую разработку тематики первой части, опубликованной под тем же заглавием с номером (I) на стр. 137-146.

В дальнейшем мы будем первую часть работы обозначать кратко символом (I) и пользоваться без особых оговорок (за исключением лишь нескольких мест) употребленными в ней обозначениями, определениями понятий и полученными в ней результатами.

В (I) была доказана теорема о том, что для множества M, являющегося континуумом, функция $\varphi_M(r)$ выпукла вверх. Выпуклость подразумевалась в слабом смысле (т. е. в том обычном смысле, когда равенство характеризующее выпуклость пишется со знаком $\leqslant$). Поэтому теоремой допущена линейность функции $\varphi_M(r)$ как крайний случай выпуклости, а приведенная в (I) формула Минковского показывает, что случай линейности этой функции на целой полупрямой $r>0$ фактически осуществляется, именно, для выпуклых континуумов M.

Естественно возникает вопрос о поведении $\varphi_M(r)$ с точки зрения ее строгой выпуклости (конечно, вверх) — для каких континуумов M функция $\varphi_M(r)$ является строго выпуклой на целой числовой полупрямой $r>0$, а также для каких M и на какой части числовой полупрямой $r>0$ она может оказаться линейной. Решению этих вопросов и посвящена в основном настоящая вторая часть работы.

Начнем с введения двух новых понятий: множества $B^{(r,M)}$ и радиуса внешней достижимости данного множества (необязательно континуума) M.

Пусть M — заданное ограниченное множество и пусть дано число $r>0$. Рассмотрим класс $\mathfrak{B}^{(r,M)}$ всех неограниченных связных множеств B обладающих свойством $B_r \subset \complement M$ (1) (этот класс, очевидно, не пуст, так как он содержит в качестве элемента внешность достаточно большого круга содержащего множество M). Множество $B^{(r,M)}$ определим формулой

$$B^{(r,M)} = \overline{\sum_{B \in \mathfrak{B}(r,M)} B}\,.$$

(1) Символ $\complement$ обозначает переход к дополнению.

Из данного определения видно, что множество $B^{(r,M)}$ неограничено и связно и что

$$B_r^{(r,M)} \subset \overline{CM}. \tag{1}$$

Пусть $0<r'<r$ и $0<\delta<r-r'$; имеем теперь $B_{r-\delta}^{(r,M)} \subset CM$. Так как множество $B_{r-r'-\delta}^{(r,M)}$ неограничено и связно, из соотношения $(B_{r-r'-\delta}^{(r,M)})_{r'} = B_{r-\delta}^{(r,M)} \subset CM$ (²) получаем $B_{r-r'-\delta}^{(r,M)} \in \mathfrak{B}^{(r',M)}$, откуда $B_{r-r'-\delta}^{(r,M)} \subset B^{(r',M)}$. Отсюда имеем $B_r^{(r,M)} = (B_{r-r'-\delta}^{(r,M)})_{r'+\delta} \subset B_{r'+\delta}^{(r',M)}$; ввиду произвольной малости δ это дает нам $B_r^{(r,M)} \subset B_{r'}^{(r',M)}$. Таким образом, если

$$B_r^{(r,M)} = \overline{CM} \tag{2}$$

для некоторого r, то $CM \subset B_{r'}^{(r',M)}$ для любого $r'<r$, откуда, в силу (1), $B_{r'}^{(r',M)} = \overline{CM}$ для любого $r'<r$. Поэтому равенство (2) определяет некоторое сечение в множестве всех положительных чисел, причем нижний класс этого сечения (который может оказаться пустым) составляют те числа r, для которых выполняется равенство (2). Число $P(M)$ производящее это сечение назовем *радиусом внешней достижимости* множества M и условимся, что $P(M)=\infty$, когда (2) выполняется для любого положительного r. Наглядно выражаясь, кругом радиуса меньшего чем радиус внешней достижимости можно вымести всю внешность множества M.

Для выпуклых M, как легко проверить, имеем $P(M)=\infty$. Ниже будет доказано, что в случае континуума это свойство характерно для выпуклости M (³). Для M неодносвязных очевидно $P(M)=0$; поэтому условие $P(M)>0$ влечет за собой, в частности, односвязность M. Но $P(M)=0$ может, конечно, оказаться и для множества M односвязного (напр. для невыпуклого многоугольника).

В (I) изучение функции $\varphi_M(r)$ произвольного континуума M было сведено к изучению такой же функции множества состоящего из конечного числа точек. В дальнейшем этот метод будет еще использован для обнаружения интервалов строгой выпуклости функции. Но для выявления интервалов ее линейности мы построим другой аппроксимационный аппарат, именно, аппроксимируя односвязный континуум M (предположение односвязности будет при выводе окончательного результата изъято) последовательностью более простых континуумов M^n, мы сможем перейти от изучения функций $\varphi_{M^n}(r)$ к изучению функции $\varphi_M(r)$. К определению множеств M^n мы сейчас и переходим.

(²) Равенство $(M_{r'})_{r''} = M_{r'+r''}$ $(r', r''>0)$ для произвольного множества M следует непосредственно из определения обобщенного круга. Мы будем им еще пользоваться.

(³) Как можно усмотреть из доказательства нижеследующей теоремы 5, это верно даже при менее стеснительном предположении относительно множества M, чем мы, однако, особо заниматься не будем.

Пусть M континуум и пусть $P(M)>0$ (следовательно, континуум M односвязен); пусть задано некоторое число ϱ, $0<\varrho<P(M)$. Для упрощения записи будем писать попросту B вместо $B^{(\varrho,M)}$. Пусть далее S^n — $(1/n)$-сеть множества B построенная следующим образом: на плоскость налагаем достаточно мелкую квадратную сетку и избираем по точке множества B в каждом из квадратов, в которых таковы содержатся. Можем при этом дополнительно потребовать, чтобы $S^n \subset S^{n+1}$, $n=1,2,\ldots$ Так как S_ϱ^n не содержит внутренних точек множества M, то $M \subset \overline{CS_\varrho^n}$ (⁴). Определим M^n как ту среди компонент множества $\overline{CS_\varrho^n}$, которая содержит множество M.

Связное замкнутое множество M^n, как легко видеть, ограничено, когда n достаточно велико. Кроме того, для достаточно больших n оно односвязно; в самом деле, S_ϱ^n для таких n связно и поэтому каждая из компонент замыкания его дополнения односвязна (по известной теореме Брауэра), а M^n ведь есть одна из этих компонент. Итак, для достаточно больших n множество M^n есть односвязный континуум. Его граница состоит при этом из конечного числа дуг окружностей радиуса ϱ.

Лемма 1. *Для* $0<r<P(M)$, $\overline{CM_r} = B^{(r,M)}$.

Займемся лишь доказательством того, что $\overline{CM_r} \subset B^{(r,M)}$, так как соотношение обратное тривиально. Доказательство разобьем на две части. В первой докажем следующее:

(a) *Если* $(p)_r \subset \overline{CM}$, *то* $(p)_r \cdot M$ *самое большее одноточечное множество*

Доказательство. (a) Прежде всего заметим, что множество $(p)_r \cdot M$ не содержит дуги. Действительно, в противном случае, если из такой дуги и дуги окружности радиуса r', $r<r'<P(M)$, направленной выпуклостью в ту же сторону составить луночку, то любой круг радиуса r' не содержащий внутри точек первой из указанных дуг не содержит внутри точек луночки (т. к. иначе, подвергнув всю фигуру инверсии с полюсом в точке пересечения обеих окружностей радиуса r' получим явную нелепость), а это означало бы, что луночка — часть множества $\overline{CM}$ — не содержится в множестве $B^{(r,M)}$, вопреки выбору числа r.

Остается исключить возможность несвязности множества $(p)_r \cdot M$. Пусть будет иначе. Тогда множество $(p)_r + M$, как объединение двух континуумов с несвязным пересечением, разрезает, как известно, плоскость (это т. наз. *свойство Янишевского плоскости*), а так как у его дополнения лишь одна компонента неограничена, то существует у этого дополнения ограниченная компонента G. Для нее имеем, конечно, $\mathrm{Fr}\, G = \overline{G} \cdot M + \overline{G} \cdot \mathrm{Fr}(p)_r$, причем второе из слагаемых есть некоторая дуга L окружности $\mathrm{Fr}(p)_r$ с концами $q_1, q_2 \in M$. Присоединим к G сегмент ограниченный дугой L и хордой $\overline{q_1 q_2}$

(⁴) При нашем способе записи переход к дополнительному множеству следует понимать, как следующий после перехода к обобщенному кругу.

(исключая точки самой хорды). Получится новая, содержащая G область G', причем, как опять легко заметить, имеем $\operatorname{Fr}\overline{G}'=\overline{G}'\cdot M+\overline{q_1q_2}$. Пусть число r' определено как выше и пусть точка $q\epsilon G$. Существует точка $q'\epsilon B^{(r',M)}$ такая, что $d(q,q')<r'$. Рассмотрим ее возможные положения. Если бы $q'\epsilon G'$, то (в силу свойств множества $B^{(r',M)}$), существовала бы точка $q''\epsilon\operatorname{Fr}G'\cdot B^{(r',M)}$, но так как $q''\bar{\epsilon} M$, остается что $q''\epsilon\overline{q_1q_2}$; но последнее тоже невозможно, ибо тогда мы имели бы, очевидно, $q_1\epsilon(q'')_{r'}$ или $q_2\epsilon(q'')_{r'}$ (где $q_1,q_2\epsilon M$ и $q''\epsilon B^{(r',M)}$).

Итак, нам осталась возможность $q'\bar{\epsilon} G'$. В этом случае имеем $\overline{qq'}\cdot\operatorname{Fr}G'\neq 0$ и $\overline{qq'}\cdot\operatorname{Fr}G\neq 0$. Но так как $\overline{qq'}\cdot M=0$ (поскольку $(q')_{r'}\subset\overline{\mathrm{C}M}$) остается $\overline{qq'}\cdot\overline{q_1q_2}\neq 0$ и $\overline{qq'}\cdot L\neq 0$. Покажем теперь, что и в этом случае будет $q'\epsilon(q'')_{r'}$ или $q_2\epsilon(q'')_{r'}$ (или, что то же самое, $d(q_1,q'')\leqslant r'$ или $d(q_2,q'')<r'$), т. е., что и этот случай невозможен, чем доказательство пункта (а) будет кончено.

Легко видеть, что $d(q',L)<r'$. Пусть точка $p'\epsilon L$ такая, что $d(q',p')=d(q',L)<r'$. Исключив случай $p'=q_1$ или $p'=q_2$, который сразу дает что нужно, примем сперва, что $d(q',p')>r$. Так как теперь, очевидно, отрезок $\overline{q'p'}$ нормален к L в точке p', то $p\epsilon\overline{q'p'}$. Поэтому получим $d(q_1,q')\leqslant d(q_1,p)+d(p,q')=d(p',p)+d(p,q')=d(p',q')<r'$. Если же $d(q',p')\leqslant r$, тогда, как легко заметить (случай $p'=q_1$ или $p'=q_2$ уже исключен), q' содержится в равнобедренном треугольнике Δpq_1q_2 и тогда опять $d(q',q_1)\leqslant d(p,q_1)=r<r'$ или $d(q',q_2)\leqslant d(p,q_2)=r<r'$.

(б) Предположим теперь, что равносильно отрицанию леммы, что для некоторой точки q будет $d(q,M)\geqslant r$ и $d(q,B^{(r,M)})>0$. Пусть точка $p\epsilon B^{(r,M}$ такая, что $d(q,p)=d(q,B^{(r,M)})$. Тогда $(p)_r\cdot M\neq 0$, так как иначе, т. е., если бы $(p)_{r+\delta}\cdot M=0$ для $\delta>0$ мы имели бы, очевидно, $(p)_\delta\subset B^{(r,M)}$, что несогласно с определением точки p. Итак, пусть $q'\epsilon(p)_r\cdot M$; из (а) имеем, что q' — единственная такая точка. Поэтому, произвольному $\varepsilon>0$ отвечает число $\delta>0$ такое, что $\{(p)_r-(q')_\varepsilon\}_\delta\cdot M=0$. Далее, так как $q\epsilon\overline{\mathrm{C}M}$, имеем $d(q,p)<r$, следовательно, $\sphericalangle q'pq>\frac{1}{3}\pi$. Примем напр. $\varepsilon=r/100$; пусть p' — точка, для которой $d(p,p')<\delta$ и напр. $\sphericalangle qpp'=\frac{1}{3}\pi$ и $\sphericalangle q'pp'>\frac{2}{3}\pi$ (такая, конечно, существует). Тогда для любой точки $p''\epsilon\overline{pp'}$ будем иметь $(p'')_r\subset\{(p)_r-(q')_\varepsilon\}_\delta+(p)_r-(q')\subset\mathrm{C}M$, значит, $\overline{pp'}\subset B^{(r,M)}$. Но тогда $p'\epsilon B^{(r,M)}$ и $d(p',q)<d(p,q)$, что невозможно. Полученное противоречие кончит доказательство леммы.

Лемма 2. *Для любого $\delta>0$ существует такой номер $n(\delta)$, что*

$$M\subset M^n\subset M_\delta \quad \text{\textit{при}} \quad n>n(\delta).$$

Доказательство. Справедливость соотношения $M\subset M^n$ (при любом n) следует прямо из определения множества M^n; поэтому нам предстоит доказать лишь вторую часть соотношения.

Предположим, что вопреки утверждению леммы, при некотором $\delta>0$ для некоторой последовательности $\{n_k\}$ существуют точки $p_{n_k}\epsilon M^{n_k}-M_\delta$. Точки p_{n_k} находятся в ограниченной части плоскости (так как из $S^n\subset S^{n+1}$ имеем $M^{n+1}\subset M^n$, а M^n с некоторого n начиная, как было уже сказано, — континуум). Пусть p — предельная точка этой последовательности; мы можем, конечно, принять, что $p=\lim\limits_k p_{n_k}$. Имеем $p\bar{\epsilon} M$, откуда $d(p,B)<\varrho$, но, с другой стороны, имеем

$$d(p_{n_k},B)\geqslant d(p_{n_k},S^{n_k})-1/n_k>\varrho-1/n_k,$$

что в пределе дает $d(p,B)\geqslant\varrho$. Это противоречие доказывает лемму.

Лемма 3. *Из $0<\delta<\varrho$ и $n>n(\delta)$ следует $P(M^n)>\varrho-\delta$.*

Доказательство. Пусть $p\epsilon B_{\varrho-\delta}$, т. е. $d(p,B)\leqslant\varrho-\delta$ и пусть точка $q\epsilon B$ такая, что $d(p,q)\leqslant\varrho-\delta$. Для любой точки $q'\epsilon M$ имеем $d(q,q')\geqslant\varrho$. Из неравенства треугольника получаем $d(p,M)\geqslant d(q,q')-d(p,q)\geqslant\varrho-(\varrho-\delta)=\delta$, т. е. $p\epsilon\overline{\mathrm{C}M_\delta}$. Мы получаем соотношение

$$B_{\varrho-\delta}\subset\overline{\mathrm{C}M_\delta}. \tag{3}$$

Далее, из леммы 2 (примененной для $\delta/2$), после перехода в соответствующем соотношении к дополнениям, получим

$$\mathrm{C}M_{\delta/2}\subset\mathrm{C}M^n \quad \text{для} \quad n>n(\delta),$$

а учтя, что $\overline{\mathrm{C}M_\delta}\subset\mathrm{C}M_{\delta/2}$ (это видно, если учесть, что $M_\delta=(M_{\delta/2})_{\delta/2}$) получим

$$\overline{\mathrm{C}M_\delta}\subset\mathrm{C}M^n \quad \text{для} \quad n>n(\delta). \tag{4}$$

Вместе взятые соотношения (3) и (4) дают нам $B_{\varrho-\delta}\subset\mathrm{C}M^n$ для $n>n(\delta)$. Отсюда имеем $B\epsilon\mathfrak{B}^{(\varrho-\delta,M^n)}$ $(n>n(\delta))$, одкуда

$$B\subset B^{(\varrho-\delta,M^n)}, \quad n>n(\delta). \tag{5}$$

Предположим вопреки утверждению настоящей леммы, что $P(M^n)<\varrho-\delta$ для некоторого $n>n(\delta)$. Тогда, согласно определению радиуса внешней достижимости, множество $\overline{\mathrm{C}M^n}-B_{\varrho-\delta}^{(\varrho-\delta,M^n)}$ непусто. Пусть K — одна из его компонент. Очень легко сообразить каково ее строение: это элементарно-геометрическая фигура; среди ее граничных дуг имеется дуга (по крайней мере одна) являющаяся дугой окружности радиуса ϱ и заодно одной из составляющих дуг границы множества M^n. Пусть $(q)_\varrho$ — круг носящий только что названную дугу $(q\epsilon S^n)$. Воспользовавшись соотношением (5), получим

$$q\epsilon S^n\subset B\subset B^{(\varrho-\delta,M^n)}. \tag{6}$$

Если круг $(q)_{\varrho-\delta}$ сдвигать непрерывным образом с места на расстояние не превышающее δ, то он, конечно, будет при этом оставаться в круге $(q)_\varrho$, а и подавно в множестве $\overline{\complement M^n}$. Отсюда и на основании (6) заключаем, что $(q)_\delta \subset B^{(\varrho-\delta, M^n)}$, откуда

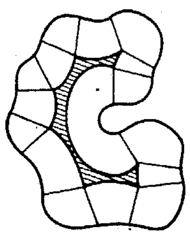
$$(q)_\varrho = \big((q)_\delta\big)_{\varrho-\delta} \subset B_{\varrho-\delta}^{(\varrho-\delta, M^n)}. \tag{7}$$

Из строения компоненты K следует $K-(q)_\varrho \neq 0$; однако это, благодаря (7), находится в противоречии с тем, что K есть часть множества $\overline{\complement M^n} - B_{\varrho-\delta}^{(\varrho-\delta, M^n)}$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 4. *Для любого δ, $0<\delta<\varrho$, множества M_r^n, начиная с некоторого n, односвязны для $0<r<\varrho-\delta$.*

Доказательство. К M^n как к односвязному континууму применима лемма 1. Применив ее, получаем, что для $0<r<P(M^n)$ множество $\overline{\complement M_r^n}$ равно заведомо связному множеству $B^{(r, M^n)}$, что означает односвязность M_r^n для r из этого интервала. Применив здесь еще лемму 3, получим, что для $0<\delta<\varrho$, начиная с некоторого n, множества M_r^n односвязны при $0<r<\varrho-\delta$. Лемма доказана.

Множества M^n и M_r^n являются по сути элементарно-геометрическими фигурами. Как уже знаем, для достаточно больших n множества M^n односвязны, а по лемме 4 это же относится и к M_r^n при $0<r<\varrho-\delta$, где $0<\delta<\varrho$. Поэтому для этих значений n и r фигура $M_r^n - M^n$, как разность двух односвязных фигур, из которых одна содержится вместе со своим замыканием в другой, есть множество двусвязное (кольцеобразное). Его структуру выяснить очень легко: для этого достаточно в угловых точках кривой F_{M^n} выставить во внешность M^n по паре перпендикуляров длины r к соответствующим составляющим круговым дугам этой кривой. Тогда, как легко заметить, фигура $M_r^n - M^n$ разобьется этими перпендикулярами на составные фигуры, которые окажутся двух родов: (а) круговые секторы радиуса r с вершинами в угловых точках кривой F_{M^n} и (б) кольцевые секторы ограниченные парой круговых дуг радиусов ϱ и $\varrho-r$ каждый (черт. 1). Опираясь на изученном только что строении нашей фигуры, докажем следующую лемму:



Черт. 1

Лемма 5. *Для любого δ, $0<\delta<\varrho$, начиная с некоторого n, функции $\varphi_{M^n}(r)$ линейны в интервале $0<r<\varrho-\delta$.*

Доказательство. Пусть r удовлетворяет указанному условию и n настолько большое, что фигура $M_r^n - M^n$ разлагается как сказано выше. Перенумеруем каким-нибудь образом составляющие дуги и угловые точки кривой F_{M^n}; пусть l_i — i-тая из этих дуг, λ_i — соответствующий этой дуге центральный угол, наконец, пусть χ_i — угол составленный парой перпендикуляров, о которых было сказано выше, исходящих из i-той угловой точки кривой F_{M^n}. Выразим через эти величины площади фигур обоих родов (а) и (б).

Площадь фигуры рода (а) равна $\frac{1}{2}\chi_i \cdot r^2$, для фигуры же рода (б) она равна

$$\tfrac{1}{2}\lambda_i\big(\varrho^2-(\varrho-r)^2\big) = \lambda_i\varrho r - \tfrac{1}{2}\lambda_i r^2 = r\cdot \mathrm{s}l_i - \tfrac{1}{2}\lambda_i \cdot r^2.$$

Суммируя все эти площади, мы получим на площадь целой фигуры $M_r^n - M^n$ выражение

$$\mathrm{m}(M_r^n - M^n) = r\cdot \mathrm{s}F_{M^n} + \tfrac{1}{2}r^2\Big[\sum_i \chi_i - \sum_i \lambda_i\Big].$$

Здесь в первой из сумм стоящих в квадратных скобках суммирование производится по всем вершинам, во второй — по всем составляющим дугам кривой F_{M^n}.

Величина стоящая в квадратных скобках равна (аналогично тому, как это имело место в лемме 2 из (I)) величине угла оборота касательной, когда точка касания пробегает всю кривую F_{M^n} в положительном направлении обхода. Действительно, при продвижении точки касания вдоль дуги l_i этот угол уменьшается на λ_i, а при ее переходе через острие он скачкообразно увеличивается на χ_i. Значит, величина в квадратных скобках равна 2π. Итак, имеем

$$\mathrm{m}(M_r^n - M^n) = r\cdot \mathrm{s}F_{M^n} + \pi r^2,$$

что, иначе, дает

$$\varphi_{M^n}(r) = \mathrm{m}M_r^n - \pi r^2 = \mathrm{m}(M_r^n - M^n) + \mathrm{m}M^n - \pi r^2 = r\cdot \mathrm{s}F_{M^n} + \mathrm{m}M^n.$$

Функция $\varphi_{M^n}(r)$ оказывается линейной в интервале $0<r<\varrho-\delta$. Доказательство окончено.

Наконец, еще одна лемма:

Лемма 6. *Для любого $r>0$, $\lim\limits_n \varphi_{M^n}(r) = \varphi_M(r)$.*

Доказательство. Выполнив операцию взятия обобщенного r-круга на всех трех членах соотношения выступающего в формулировке леммы 2, получим, что справедливо соотношение

$$M_r \subset M_r^n \subset (M_\delta)_r = M_{r+\delta} \quad \text{для} \quad n>n(\delta) \quad \text{при любом} \quad r>0,$$

из которого, в силу непрерывности $\mathrm{m}M_r$ как функции от r, следует, что для любого $r>0$

$$\lim_n \mathrm{m}M_r^n = \mathrm{m}M_r,$$

что эквивалентно утверждению настоящей леммы.

Теперь мы уже в состоянии доказать следующую теорему:

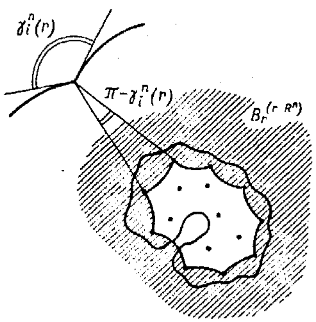
Теорема 1 (5). *Пусть M — односвязный континуум* (6) *с ненулевым радиусом внешней достижимости:* $0<P(M)\leqslant\infty$. *Тогда функция* $\varphi_M(r)$ *линейна для* $0<r<P(M)$.

Доказательство получается сразу из лемм 5 и 6, если заметить, что граничная функция сходящейся последовательности функций линейных в некотором интервале тоже линейна в этом интервале.

Доказанная выше теорема решает частично поставленную в начале настоящей статьи задачу, именно для случая, когда M — односвязный континуум, для некоторого интервала изменения r. Теперь, сохраняя предположение односвязности континуума M, мы займемся еще изучением нашей функции $\varphi_M(r)$ для $r>P(M)$ (конечно, предполагая $P(M)<\infty$), чем задача полного ее изучения, пока лишь для односвязного континуума, будет полностью завершена.

Итак, пусть M, как и прежде, односвязный континуум. Пусть $\{R^n\}$ обозначает некоторую (в дальнейшем фиксированную) последовательность $(1/n)$-сетей этого континуума. Обозначим через $\gamma_1^n(r),\gamma_2^n(r),\ldots$ каким-нибудь образом перенумерованные при фиксированном r внешние углы (7) в угловых точках границы множества R_r^n. Введем обозначение

$$\gamma^n(r)=\min\left(\gamma_1^n(r),\gamma_2^n(r),\ldots\right).$$



Черт. 2

Из самого смысла величины $\gamma^n(r)$ имеем, что она содержится в границах $0\leqslant\gamma^n(r)\leqslant\pi$. Но нам потребуется для дальнейшего иметь для нее более острое ограничение. Это даст нам нижеследующая лемма; но прежде чем к ней перейти, сделаем еще несколько замечаний относительно строения множества $B^{(r,R^n)}$. Из простых геометрических соображений легко вывести, что границей множества $B^{(r,R^n)}$ является дуговой многоугольник состоящий из конечного числа дуг окружностей радиуса r; концы этих дуг принадлежат сети R^n, а центры носящих их окружностей суть угловые точки (быть может, лишь некоторые) границы множества R_r^n (черт. 2). Отметим связь, какая состоит

(5) В случае, когда M простая дуга, эта теорема дает ответ на один из вопросов поставленных мне Ю. Пэркалем.

(6) Теорема 1 формально верна и без предположения односвязности континуума M.

(7) См. описание строения границы такого множества данное в (I); там же выяснено, что следует понимать под внешним углом в угловой точке (вершине).

между величиной такой дуги и внешним углом $\gamma_i^n(r)$ в соответствующей ей угловой точке: центральный угол дуги равен $\pi-\gamma_i^n(r)$ (черт. 2). Отсюда, если $s^n(r)$ — наименьшая из длин этих дуг, то $s^n(r)=\left(\pi-\gamma_i^n(r)\right)\cdot r$.

Лемма 7. *Для любых чисел r' и r'', $P(M)<r'<r''$, существует число a, $0<a<\pi$, такое, что начиная с некоторого номера n (а тем самым и для всех n), будет $\gamma^n(r)<a$ в интервале $r'<r<r''$.*

Доказательство будем вести от противного. Пусть лемма ложна; это означает, что для некоторой последовательности номеров $\{n_k\}$ и некоторой последовательности чисел $\{r_k\}$, $r'<r_k<r''$, имеем $\lim\limits_k\gamma^{n_k}(r_k)=\pi$, или, что одно и то же, $\lim\limits_k s^{n_k}(r_k)=0$. Можем, конечно, считать, что последовательность $\{r_k\}$ сходится: $\lim\limits_k r_k=\bar r$, где $r'\leqslant\bar r\leqslant r''$. Примем еще, ради упрощения записи, обозначение B^k вместо $B^{(r_k,R^{n_k})}$.

Пусть дана произвольная точка p, $p\notin M$, и некоторое число ϱ, $0<\varrho<$ $<d(p,M)$. На основании леммы 1 настоящей статьи имеем $p\in B^{(\varrho,M)}$. Если $p\in B_{r_k}^k$ для некоторого k, то множество $B^{(\varrho,M)}$ пересекается с границей множества $B_{r_k}^k$, следовательно и с некоторой из ее составляющих дуг. Концы такой дуги, как точки сети R^{n_k}, лежат вне множества $B_\varrho^{(\varrho,M)}$, следовательно, длина дуги не меньше ϱ. Поэтому, благодаря предположению $\lim\limits_n s^n(r)=0$ существует такой номер k_0, что $p\in B_{r_k}^k$ для $k>k_0$. Обозначим через p_k точки $p_k\in B^k$, такие, что $d(p,p_k)<r_k$ для $k>k_0$. Так как числа $d(p,p_k)$, $k>k_0$, ограничены в совокупности, то существует сходящаяся последовательность $\{p_{k_i}\}$: $\lim\limits_i p_{k_i}=p'$. Обозначив через $B^\otimes$ верхний топологический предел последовательности множеств B^k: $B^\otimes=\mathrm{Ls}\,B^k$ (8), имеем $p'\in B^\otimes$, а так как $d(p,p')=\lim\limits_i d(p,p_{k_i})\leqslant\lim\limits_k r_k=\bar r$, $p\in B_{\bar r}^\otimes$. В силу выбора точки p получаем отсюда $\mathrm{C}M\subset B_{\bar r}^\otimes$ и даже (приняв во внимание замкнутость обобщенного круга)

$$\overline{\mathrm{C}M}\subset B_{\bar r}^\otimes. \tag{8}$$

Пусть теперь $p\in B^\otimes$; пусть точки $p_{k_i}\in B^{k_i}$ такие, что $p=\lim\limits_i p_{k_i}$. Из неравенств $d(p_{k_i},M)\geqslant d(p_{k_i},R^{n_{k_i}})-1/n_{k_i}\geqslant r_{k_i}-1/n_{k_i}$ в пределе получаем $d(p,M)=\lim\limits_i d(p_{k_i},M)\geqslant\bar r$, следовательно, в силу произвольности выбора точки p из множества $B^\otimes$,

$$B^\otimes\subset\overline{\mathrm{C}M_{\bar r}}. \tag{9}$$

(8) По определению, $\mathrm{Ls}\,A_n=\{p$: существуют последовательности номеров $\{n_k\}$ и точек $\{p_{n_k}\}$ такие, что $p_{n_k}\in A_{n_k}$, $k=1,2,\ldots$, и $p=\lim\limits_k p_{n_k}\}$. Как следует из определения, $\mathrm{Ls}A_n$ — замкнутое множество.

Рассмотрим множество $B^{\otimes}-B^{(\bar r,M)}$. Если оно непусто, то оно, как разность двух замкнутых множеств, пересечение которых непусто, содержит, как легко проверить, точку p — внутреннюю для множества $B^{\otimes}$ и граничную для $B^{(\bar r,M)}$. Учтя (9), получим отсюда $(p)_{\delta+r}=\big((p)_\delta\big)_r\subset CM$, что в силу соотношения $p\in B^{(\bar r,M)}$ дает $(p)_\delta\subset B^{(\bar r,M)}$, вопреки выбору точки p как граничной для множества $B^{(\bar r,M)}$. Следовательно, рассматриваемое множество пусто, т. е. $B^{\otimes}\subset B^{(\bar r,M)}$. Отсюда и из (8) получим

$$\overline{CM}\subset B^{\otimes}_{\bar r}\subset B^{(\bar r,M)}_{\bar r},$$

откуда, приняв во внимание (1),

$$B^{(\bar r,M)}_{\bar r}=\overline{CM}. \tag{10}$$

Равенство (10) означает, что $\bar r\leqslant P(M)$, что находится в противоречии с неравенством $P(M)<r'\leqslant\bar r$, которому число $\bar r$ должно, по своему определению, удовлетворять. Полученное противоречие доказывает лемму.

Припомним теперь и уточним еще некоторые моменты из (I), на которые придется нам сослаться. В (I) на функцию $\varphi_R(r)$ произвольного конечного множества R были выведены, среди прочих, формулы носящие там номера (1) и (3), которые, в применении к рассматрываемым здесь функциям $\varphi_{R^n}(r)$ запишутся (после соответствующей перемены обозначений: пишем теперь $R^n,\Phi_i^n(r),\gamma_i^n(r),\nu_n(r),N_n(r)$ вместо употреблявшихся в (I) R,Φ_i,γ_i,ν,N) в виде

$$\frac{d^2}{dr^2}\varphi_{R^n}(r)=\sum_{i=1}^{\nu_n(r)}\Phi_i^n(r)-2\sum_{i=1}^{\nu_n(r)}\operatorname{ctg}\tfrac12\gamma_i^n(r)-2\pi, \tag{1.I}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu_n(r)}\Phi_i^n(r)-\sum_{i=1}^{\nu_n(r)}\big(\pi-\gamma_i^n(r)\big)=\big(2-N_n(r)\big)\cdot 2\pi. \tag{3.I}$$

Эти формулы выведены для т. наз. *неисключительных значений* r (при всяком n исключительных значений самое большее конечное число) превышающих некоторое число $\varrho>0$, подданное лишь тому условию, чтобы R^n_ϱ было связно. Если задать произвольно число $\varrho>0$, то это условие выполняется для достаточно больших n (именно, для $n>1/\varrho$ — см. последнюю часть доказательства теоремы из (I)).

Изучение строения границы множества R_r (или, как здесь, R^n_r) при $r>\varrho$, в окрестности неисключительного значения, проведенное в (I) показывает, что углы $\Phi_i^n(r)$ и $\gamma_i^n(r)$ как функции от r (первые относятся, конечно, к данным варьирующим составляющим дугам, вторые — к вершинам ими

созданным) для такого значения непрерывны. В силу (1.I) это же относится и ко второй производной $d^2\varphi_{R^n}(r)/dr^2$, которая таким образом оказывается кусочно непрерывной функцией (для $r>\varrho$).

После сделанных замечаний докажем следующую лемму:

Лемма 8. *Для любых чисел r' и r'', $P(M)<r'<r''$, существует число $b\neq 0$ такое, что, начиная с некоторого номера n,*

$$\frac{d^2}{dr^2}\varphi_{R^n}(r)<-b^2$$

равномерно для всех неисключительных значений r из интервала $r'<r<r''$.

Доказательство. Число $\gamma^n(r)$ равно при фиксированных r и n одному из чисел $\gamma_1^n(r),\gamma_2^n(r),\dots,\gamma_{\nu_n(r)}^n(r)$. Пусть r — значение из $r'<r<r''$. Положим для определенности $\gamma^n(r)=\gamma_1^n(r)$ для всех n (что нисколько не уменьшит общности).

Заметим теперь следующее. Выражение $2\operatorname{ctg}\frac12\gamma-(\pi-\gamma)$ положительно и монотонно убывает в интервале $0<\gamma<\pi$. Положив $2\operatorname{ctg}\frac12 a-(\pi-a)=b^2$, где a — пока произвольное число из интервала $0<\gamma<\pi$, имеем пару неравенств

$$2\operatorname{ctg}\tfrac12\gamma-(\pi-\gamma)>\begin{cases} b^2 & \text{для}\quad 0<\gamma<a<\pi,\\ 0 & \text{для}\quad 0<\gamma<\pi.\end{cases} \tag{11}$$

Пусть теперь число a есть число выступающее в лемме 7; пусть n_0 номер такой, что для $n>n_0$ лемма 7 удовлетворена, т. е. $\gamma^n(r)<a$ для $r'<r<r''$. Подставив $\gamma^n(r)$ в первое, а $\gamma_i^n(r)$, $i=2,3,\dots$ — во второе из неравенств (11) (записывая эти неравенства несколько иначе) и помня, что (по принятому) $\gamma^n(r)=\gamma_1^n(r)$ при данном r и $n>n_0$, получаем

$$\begin{aligned} &-2\operatorname{ctg}\tfrac12\gamma_i^n(r)<-\big(\pi-\gamma_i^n(r)\big), && i=2,3,\dots,\nu_n(r),\\ &-2\operatorname{ctg}\tfrac12\gamma_1^n(r)<-b^2-\big(\pi-\gamma_1^n(r)\big), && n>n_0;\end{aligned} \tag{11'}$$

суммируя неравенства (11′), находим

$$-2\sum_{i=1}^{\nu_n(r)}\operatorname{ctg}\tfrac12\gamma_i^n(r)<-b^2-\sum_{i=1}^{\nu_n(r)}\big(\pi-\gamma_i^n(r)\big),\qquad n>n_0.$$

Примем теперь, что значение r неисключительное и применим последнее неравенство к формуле (1.I). Воспользовавшись еще формулой (3.I) (9) и заметив, что всегда $N_n(r)\geqslant 1$, получаем утверждение леммы.

(9) Если в качестве числа $\varrho>0$, о котором упоминалось в сделанном выше замечании взять число $r'>0$, то для n достаточно большого формулы (1.I) и (3.I) применимы для неисключительных значений полупрямой $r>r'$ и тем более — интервала $r'<r<r''$.

Нижеследующую лемму можно рассматривать как продолжение леммы 8:

Лемма 9. *Предположим, что, с некоторого номера n начиная, $d^2\varphi_{R^n}(r)/dr^2+b^2<0$, $b\neq 0$, для всех неисключительных значений из интервала $r'<r<r''$, где $0<r'<r''$. Тогда граничная функция $\varphi_M(r)=\lim\limits_n \varphi_{R^n}(r)$* [10] *строго выпукла вверх в этом интервале.*

Доказательство. Положим

$$\frac{d^2}{dr^2}\varphi_{R^n}(r)+b^2=\theta^n(r)\,. \tag{12}$$

Для достаточно больших значений n функция $\theta^n(r)$, равно как и стоящая слева вторая производная, кусочно непрерывна в интервале $r'<r<r''$, а по предположению леммы она отрицательна в этом интервале. Интегрируя двукратно равенство (12) соответствующим образом, получим

$$\varphi_{R^n}(r)=-\frac{1}{2}b^2(r-r')^2+\int\limits_{r'}^{r}dt\int\limits_{r'}^{t}\theta^n(\tau)\,d\tau+(r-r')\left(\frac{d}{dr}\varphi_{R^n}(r)\right)_{r=r'}+\varphi_{R^n}(r'),$$
$$r'<r<r''.$$

Возьмем второе приращение [11] от обеих сторон полученного равенства. Для двух последних слагаемых правой части это приращение, очевидно, исчезает; для второго же слагаемого оно отрицательно, так как имеем

$$\Delta_h^2\int\limits_{r'}^{r}dt\int\limits_{r'}^{t}\theta^n(\tau)\,d\tau=\int\limits_{r+h}^{r+2h}dt\int\limits_{r'}^{t}\theta^n(\tau)\,d\tau-\int\limits_{r}^{r+h}dt\int\limits_{r'}^{t}\theta^n(\tau)\,dt=$$
$$=h\left(\int\limits_{r'}^{\xi''}\theta^n(\tau)\,d\tau-\int\limits_{r'}^{\xi'}\theta^n(\tau)\,d\tau\right)=h\int\limits_{\xi'}^{\xi''}\theta^n(\tau)\,d\tau<0\,,$$

где $r'<r<\xi'<r+h<\xi''<r+2h<r''$. Отсюда $\Delta_h^2\varphi_{R^n}(r)<\Delta_h^2\left(-\frac{1}{2}b^2(r-r')^2\right)$, откуда, переходя к пределу при $n\to\infty$, окончательно получаем

$$\Delta_h^2\varphi_M(r)<\Delta_h^2\left(-\tfrac{1}{2}b^2(r-r')^2\right)<0$$

(здесь второе из неравенств выражает строгую выпуклость вверх функции $-\frac{1}{2}b^2(r-r')^2$), что и означает строгую выпуклость вверх функции $\varphi_M(r)$ в рассматриваемом интервале.

Теперь мы уже сможем дать ответ на вопрос о поведении нашей функции на полупрямой $r>P(M)$ с точки зрения ее строгой выпуклости; именно, справедлива следующая теорема:

(10) Это соотношение доказано в (I).

(11) По определению, $\Delta_h^2 f(x)=f(x+2h)-f(x+h)-[f(x+h)-f(x)]$, $h>0$. Когда речь идет об определенном интервале, как в нашем случае, надо предположить что точки x, $x+h$, $x+2h$, в нем содержатся.

Теорема 2. *Пусть M — односвязный континуум, $P(M)<\infty$. Тогда функция $\varphi_M(r)$ строго выпукла вверх на полупрямой $r>P(M)$.*

Доказательство следует немедленно из лемм 8 и 9, если в качестве выступающих в них чисел r' и r'' брать всевозможные числа, удовлетворяющие условию $P(M)<r'<r''$.

Полученные нами в этой статье результаты выведены для континуума M односвязного. Теперь пришло время освободиться от этого ограничения. Но прежде чем к этому приступить надо ввести одно новое понятие и доказать еще одну теорему.

Пусть M — произвольный континуум (необязательно односвязный). Среди кругов содержащихся в ограниченных компонентах множества $\overline{CM}$ (если таковы вообще имеются) есть, очевидно, круг (по крайней мере один) максимального радиуса. Этот радиус обозначим через $\eta(M)$. В случае односвязного M положим $\eta(M)=0$. Очевидно, имеем $0\leqslant\eta(M)<\infty$, причем условие $\eta(M)=0$ равносильно односвязности множества M.

Пусть R^n, как и прежде, обозначает $(1/n)$-сеть множества M. Докажем следующую лемму:

Лемма 10. *Пусть $\eta(M)>0$, а r' и r'' произвольные числа $0<r'<r''<\eta(M)$. С некоторого номера n начиная,*

$$\frac{d^2}{dr^2}\varphi_{R^n}(r)\leqslant -2\pi$$

во всех неисключительных точках интервала $r'<r<r''$.

Доказательство. Пусть p — точка ограниченной компоненты множества $\overline{CM}$, для которой $(p)_{\eta(M)}\subset\overline{CM}$. Для произвольного неограниченного связного множества K содержащего точку p имеем $K\cdot M\neq 0$. Так как, по определению $(1/n)$-сети, для $n>1/r'$ имеем $M\subset R^n_{r'}$, получается, что $K\cdot M\subset R^n_{r'}$ $(n>1/r')$ и, следовательно,

$$R^n_{r'}\cdot K\neq 0\qquad (n>1/r'). \tag{13}$$

С другой стороны, для $r<r''$ из очевидных соотношений $d(p,R^n_r)>d(p,R^n_{r''})\geqslant\eta(M)-r''>0$ получаем

$$p\notin R^n_r\qquad\text{для}\qquad r<r''. \tag{14}$$

Соотношения (13) и (14) показывают, что множества R^n_r более чем односвязны для $n>1/r'$ и $r'<r<r''$ (множества $R^n_{r'}$, а тем более и R^n_r, как уже было выше замечено, связны для достаточно больших n (именно, для $n>1/r'$)). Примем теперь, что r, $r'<r<r''$, неисключительное значение; тогда, во-первых, доказанная неодносвязность множеств R^n_r дает $N_n(r)\geqslant 2$ для $n>1/r'$, во-вторых, применимы формулы (1.I) и (3.I). Если в первой из них использовать неравенства $-2\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma_i^n(r) < -\bigl(\pi-\gamma_i^n(r)\bigr)$, $i=1,2,\ldots$ (результат подстановки в первое из неравенств (11)), а затем применить вторую и учесть вышеуказанное для $N_n(r)$, получается немедленно справедливость настоящей леммы.

Из лемм (9) и (10), приняв во внимание произвольность выбора чисел r' и r'' подданых указанному в лемме 10 ограничению, получаем следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть M — неодносвязный континуум, $(\eta(n)>0)$. Тогда функция $\varphi_M(r)$ строго выпукла вверх в интервале $0<r<\eta(M)$.*

Пусть M — произвольный континуум. Через $\hat{M}$ будем обозначать его *односвязное пополнение*, т. е. континуум полученный из M присоединением к нему всех ограниченных компонент его дополнения (заклеением его дыр). Между множествами M и $\hat{M}$ имеет место следующее простое соотношение:

Лемма 11. *$M_r=\hat{M}_r$ для $r>\eta(M)$.*

Доказательство. Пусть D обозначает объединение всех ограниченных компонент множества $\overline{CM}$. По определению, имеем $\hat{M}=D+M$, откуда сейчас же следует $\hat{M}_r=D_r+M_r$. Благодаря легко проверяемому соотношению [12]

$$D_r \subset \{p\colon d(p,\operatorname{Fr} D)\leqslant r\}+D\subset M_r+D\,,$$

получаем далее $\hat{M}_r\subset M_r+D$. Но для $r>\eta(M)$, как следует почти непосредственно из определения числа $\eta(M)$, имеем $D\subset M_r$, что вместе с предыдущим дает соотношение $\hat{M}_r\subset M_r$ для $r>\eta(M)$. Обратное соотношение тривиально. Лемма доказана.

Таким образом оказывается, что задача изучения функции $\varphi_M(r)$ произвольного континуума с точки зрения ее строгой выпуклости требует отдельного рассмотрения лишь для $0<r<\eta(M)$, так как на остальной части числовой полупрямой $r>0$ она сводится к такой же задаче для функции $\varphi_{\hat{M}}(r)$ односвязного континуума $\hat{M}$. Но первая часть этой задачи решена теоремой 3, решение же второй — содержится в теоремах 1 и 2. Все три предыдущие теоремы можно объединить в одну общую, полностью решающую, уже для произвольного континуума M, поставленный в начале настоящей статьи вопрос:

Теорема 4. *Пусть M — произвольный континуум, $\hat{M}$ — его односвязное пополнение. Тогда функция $\varphi_M(r)$ строго выпукла вверх для $0<r<\eta(M)$ и для $r>P(\hat{M})$ и линейна для $\eta(M)<r<P(\hat{M})$. Каждая из трех указанных областей может, в частности, оказаться пустой* [13].

[12] Здесь использован факт, что расстояние точки лежащей вне множества от этого множества равно ее расстоянию от границы множества.

[13] Числа $\eta(M)$ и $P(\hat{M})$ не находятся, как легко проверить, ни в какой взаимной зависимости.

Обратим еще внимание на той случай, когда функция $\varphi_M(r)$ линейна на целой числовой полупрямой $r>0$.

Из теоремы 4 следует, что это равносильно одновременному выполнению равенств $\eta(M)=0$ и $P(\hat{M})=\infty$, или, что одно и то же, одному равенству $P(M)=\infty$. В случае M выпуклого последнее равенство удовлетворено и мы еще раз получаем результат, собственно уже содержащийся в приведенной в (I) формуле Минковского. Но, оказывается, справедливо и обратное утверждение:

Теорема 5. *Если для некоторого континуума M функция $\varphi_M(r)$ линейна на целой полупрямой $r>0$, то континуум M выпуклый.*

Доказательство. По сделанному выше замечанию, нам достаточно доказать выпуклость континуума M исходя из предположения $P(M)=\infty$.

Будем обозначать (здесь и в дальнейшем) через $\widetilde{M}$ — выпуклую оболочку континуума M ($\widetilde{M}$, очевидно, тоже континуум). Нам надо доказать, что $M=\widetilde{M}$. Предположим противное, т. е., что $\widetilde{M}-M\neq 0$. Пусть p — внутренняя точка из $\widetilde{M}$, содержащаяся в этой непустой разности (такая, конечно, существует). Из предположения $P(M)=\infty$ и по выбору точки p имеем, что $p\in B_r^{(r,M)}$ для любого числа $r>0$. Из последнего соотношения записанного в форме $d(p,B^{(r,M)})<r$, если принять во внимание связность множества $B^{(r,M)}$, видно, что для каждого числа $r>0$ существует точка $q\in B^{(r,M)}$ такая, что $d(p,q)=r$ или, иначе говоря, при каждом $r>0$ через p проходит окружность радиуса r с центром из множества $B^{(r,M)}$ (следовательно, окружность лежащая целиком в множестве $B_r^{(r,M)}=\overline{CM}$). Из только что определенного множества окружностей можно, с помощью известного метода, извлечь последовательность окружностей с радиусами растущими к бесконечности, так чтобы направления этих окружностей в точке p стремились к некоторому предельному направлению. Прямая, проходящая через точку p в этом направлении, как предельная (в топологическом смысле) для нашей последовательности окружностей, так же как и все окружности последовательности, должна содержаться в множестве $\overline{CM}$, что, однако, находится в противоречии с выбором точки p как внутренней для выпуклой оболочки $\widetilde{M}$. Полученное противоречие доказывает теорему [14].

В заключение займемся еще вопросом поведения функции $\varphi_M(r)$ при $r\to\infty$.

[14] В работе Ю. Пэржаля, *Sur les ensembles ε-convexes*, Coll. Math. IV (1956), стр. 1-10, изучается понятие т. наз. ε-выпуклой оточки (enveloppe ε-convexe) данного множества M; это есть множество, по своему определению схожее с нашим $B_r^{(r,M)}$ и находящееся в известном отношении к нему. Учтя эту связь, можно получить наш результат как следствие результатов (именно, равенства 15) цитированной работы. Мы предпочли, однако, дать независимый вывод, чтобы избежать введения нового понятия для целей одного лишь рассуждения.

Теорема 6. *Пусть M — произвольный континуум, $\widetilde{M}$ — его выпуклая оболочка. График функции $\varphi_M(r)$ имеет при $r\to\infty$ своей асимптотой прямую — график функции $\varphi_{\widetilde{M}}(r)$.*

Доказательство. Легко заметить, что когда M невыпукло ($M\neq\widetilde{M}$), в границе множества $\widetilde{M}$ содержатся прямолинейные отрезки $\overline{q_iq_i'}$, $i=1,2,\ldots$, концы которых принадлежат множеству M: $q_i, q_i'\in M$. Введем в рассмотрение множество $A=\{p\colon d(p,M)>d(p,\widetilde{M})>0\}$. Так как условие $p\in A$, как нетрудно проверить, равносильно тому, что ближайшая к точке p точка множества $\widetilde{M}$ лежит на одном из отрезков $\overline{q_iq_i'}$, множество A оказывается объединением всех полуполос шириной $d(q_i,q_i')$, восставленных во внешность множества $\widetilde{M}$ перпендикулярно к отрезкам $\overline{q_iq_i'}$. Это показывает, что множество $A\cdot\widetilde{M}_r$ состоит из всех лежащих вне $\widetilde{M}$ прямоугольников высоты r, основаниями которых служат отрезки $\overline{q_iq_i'}$. Отсюда, положив $\sum\limits_i d(q_i,q_i')=\Pi$ (суммирование по всем прямолинейным отрезкам границы; число Π не превосходит периметра границы множества $\widetilde{M}$, который есть конечное число), получаем $\mathrm{m}(A\cdot\widetilde{M}_r)=r\cdot\Pi$ и далее

$$\mathrm{m}(A\cdot\widetilde{M}_r-A\cdot\widetilde{M}_{r-\delta})=\delta\cdot\Pi\,, \tag{15}$$

где $0<\delta<r$. Для достаточно больших значений r: $r>r(\delta)$, как легко заметить, любой из составляющих множество $A\cdot\widetilde{M}_{r-\delta}$ прямоугольников с основанием $\overline{q_iq_i'}$ (и высотой $r-\delta$) содержится в объединении пары кругов $(q_i)_r+(q_i')_r$ (независимо от номера i) и тем более он будет содержаться в множестве M_r, следовательно,

$$A\cdot\widetilde{M}_{r-\delta}\subset M_r \quad \text{для} \quad r>r(\delta)\,. \tag{16}$$

Примем дополнительно, что

$$\widetilde{M}\subset M_r \quad \text{для} \quad r>r(\delta)\,. \tag{17}$$

Запишем тождество

$$\widetilde{M}_r-M_r=A-\widetilde{M}_r-A\cdot M_r+\mathrm{C}A\cdot(\widetilde{M}_r-M_r)\,.$$

Из определения выступающих в нем множеств имеем $\mathrm{C}A\cdot(\widetilde{M}_r-M_r)=\{p\colon d(p,M)=d(p,\widetilde{M})$ или $d(p,\widetilde{M})=0\}\cdot\{p\colon d(p,\widetilde{M})\leqslant r<d(p,M)\}=\widetilde{M}(\widetilde{M}_r-M_r)$, откуда и из (17) следует

$$\mathrm{C}A\cdot(\widetilde{M}_r-M_r)=0 \quad \text{для} \quad r>r(\delta)\,.$$

Наше тождество даст теперь, если в нем применить (16), соотношение

$$\widetilde{M}_r-M_r\subset A\cdot\widetilde{M}_r-A\cdot\widetilde{M}_{r-\delta} \quad \text{для} \quad r>r(\delta)\,.$$

Из последнего соотношения и из (15) для площадей получается

$$\mathrm{m}\widetilde{M}_r-\mathrm{m}M_r=\mathrm{m}(\widetilde{M}_r-M_r)\leqslant\delta\cdot\Pi \quad \text{для} \quad r>r(\delta)\,,$$

откуда непосредственно имеем $\lim\limits_{r\to\infty}\big(\varphi_{\widetilde{M}}(r)-\varphi_M(r)\big)=0$. Теорема доказана.

Автор считает своим долгом выразить глубокую признательность проф. А. Белецкому, прочитавшему работу в рукописи, за ряд ценных указаний, которые здесь уже учтены.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Reçu par la Rédaction le 12. 11. 1957