Площадь обобщенного круга как функция его радиуса (I)

Г. Фаст (Вроцлав)

Исследования настоящей статьи относятся к некоторому классу плоских множеств, для которых мы приняли здесь название *обобщенных кругов*. Само понятие обобщенного круга не является новым и оно изучалось под разными названиями (¹) многими авторами. О некоторых из этих исследований, которые имеют связь с интересующей нас здесь темой, будет еще упомянуто ниже. Но прежде всего введем основные понятия и обозначения.

Пусть M — множество на плоскости, p — точка этой плоскости. *Обобщенным кругом* радиуса r от множества M (или с множеством M как центром) назовем множество $M_r = \{p\colon d(p, M) \leqslant r\}$, $r > 0$. Так определенное множество M_r, очевидно, замкнуто. Другое эквивалентное предыдущему определение: множество M_r — это замыкание суммы всех кругов радиуса r, центры которых составляют множество M. В частности, когда M одноточечно: $M = (p)$, обобщенный круг $M_r = (p)_r$ есть обыкновенный круг радиуса r с центром p. Обобщенный круг от любого множества равен, очевидно, обобщенному кругу от его замыкания: $M_r = \bar{M}_r$ (²). Границу множества M_r будем обозначать через F_{M_r}. Легко видеть, что из $p \in F_{M_r}$ следует $d(p, M) = r$ (но обратного заключения вывести нельзя — достаточно в качестве M взять окружность, а за r — ее радиус). Площадь (плоскую меру) множества условимся обозначать через m. Можно показать, что обобщенный круг конечной площади является множеством измеримым по Жордану так, что $\mathrm{m}M_r$ обозначает его жорданову меру. Выражение $\mathrm{m}M_r$ при данном M будет функцией от r определенной на положительной полупрямой $r > 0$. Ее изучение с некоторой точки зрения для множеств M специального рода и составляет предмет настоящей статьи (³).

(¹) В немецкой литературе имеется на это понятие установившийся термин *Parallelkörper;* во французской такого термина, кажется, нет; Булиган переход от множества M к M_r называет операцией C-M (Кантора-Минковского). Отметим, что иногда под этими терминами понимают открытое множество — внутрненность определенного нами множества M_r.

(²) В принятой нами символике операцию взятия обобщенного круга условимся считать следующей после операции замыкания.

(³) Результаты настоящей работы и второй ее части (см. [1]) содержат, в частности, ответы на вопросы поставленные мне Ю. Пэркалем, возникшие у него в связи с его исследованиями по методам приближенного измерения длин кривых заданных эмпирически.

Вообще же, изучение функции $\mathrm{m}M_r$ — тема не новая; ею занимались непосредственно или по случаю других исследований разные авторы.

Минковский, как известно, предложил определение длины дуги, сводящееся, в частности, когда дуга L плоская, к нахождению границы отношения $\mathrm{m}L_r/2r$ при $r\to 0$, в случае, когда этот предел существует. Вопрос о существовании этого предела самим Минковским не ставился. Лишь некоторое время спустя Гроссом было доказано (4), что в определении Минковского предел существует, а также, что так определенная длина равна классической, полученной вписыванием ломаных. В этой же работе Гросс, следуя по пути обобщения этого свойства на множества более общей природы, изучал поведение для $r\to 0$ выражения $\mathrm{m}M_r/r$, где M — какое-либо замкнутое ограниченное множество. Оказалось, что для некоторого класса этих множеств (именно, для множеств содержащихся в счетном множестве спрямляемых дуг с конечной общей длиной) такое обобщение возможно, т. е., соответствующий предел существует и равен линейной мере Каратеодори данного множества. Вообще же такое обобщение слишком далеко не идет и дается опровергающий пример (ограниченного, замкнутого) множества, для которого этот предел (ни конечный, ни бесконечный) не существует.

Мы обратили здесь внимание на эту проблематику потому, что она в сущности касается поведения функции $\mathrm{m}M_r$, именно, ее поведения вблизи нуля. Цитированные выше результаты дают некоторое воображение о возможном характере такого поведения в зависимости от свойств множества M. Из других авторов, занимавшихся изучением этой функции упомянем еще М. Кнезера (5), который получает некоторые результаты, не делая никаких предположений относительно свойств рассматриваемых множеств, кроме предположения ограниченности.

Отметим еще одно общее, легко доказуемое свойство нашей функции — ее непрерывность (см. Пэркаль [5]).

Прежде чем итти дальше, сделаем следующие два замечения: во-первых, во всех рассуждениях, относящихся к $\mathrm{m}M_r$ необходимо предположить, что M ограничено, так как иначе было бы $\mathrm{m}M_r=\infty$ при всяком $r>0$; во-вторых, можно без умаления общности принять, что M замкнуто (см. сноска (2)).

Введем функцию $\varphi_M(r)$ определенную для $r>0$ формулой

$$\varphi_M(r)=\mathrm{m}M_r-\pi r^2.$$

Для случая выпуклого M еще Минковским было установлено равенство

$$\mathrm{m}M_r=\mathrm{m}M+r\cdot \mathrm{s}F_M+\pi r^2$$

(4) См. [3]. Интересно отметить, что к этому же результату относительно дуги кривой, не зная, повидимому, работы Гросса, пришел позже Фавар [2].

(5) См. [4]; Кнезер проводит свои рассуждения сразу в n-мерном римановом пространстве.

(знаком s здесь и в дальнейшем будем обозначать длину кривой или системы кривых), которое при употреблении только что введенной функции $\varphi_M(r)$ перепишется в виде

$$\varphi_M(r)=\mathrm{m}M+r\cdot \mathrm{s}F_M\,,$$

— значит, для M выпуклого $\varphi_M(r)$ — линейная функция.

Естественно ожидать, что если выделять классы множеств более общих чем выпуклые но в некотором смысле регулярных, то соответствующие этим множествам функции $\varphi_M(r)$ будут тоже проявлять известную регулярность. Рассматривая примеры простых связных, но необязательно выпуклых множеств (напр. некоторые элементарно геометрические фигуры), легко заметим, что для них $\varphi_M(r)$ является функцией выпуклой вверх. Это именно свойство, т. е. выпуклость вверх примем, как свойство регулярности этой функции, упомянутое выше; затем зададимся вопросом: нельзя ли при помощи возможно естественных условий выделить достаточно обширный класс множеств, для которых $\varphi_M(r)$ обладала бы этим свойством.

Приступая к этой задаче прежде всего замечаем, что самых условий ограниченности и замкнутости здесь явно недостаточно: уже двухточечное множество доставляет в этом отношении надлежащий пример. Поэтому, чтобы избежать таких возможностей, мы должны о множествах искомого класса что-то дополнительно предположить. Попробуем в качестве такого предположения принять связность. Теперь у нас имеются уже три естественные необходимые условия, которые вместе взятые определяют класс континуумов (на плоскости где ведутся рассуждения). Но оказывается, что этих условий уже и достаточно: континуумы есть множества обладающие интересующим нас свойством (доказательству этого посвящена нижеследующая теорема). Поэтому мы можем считать что класс континуумов отвечает нашим требованиям и что он есть искомый.

Теорема. *Если M — континуум, то функция $\varphi_M(r)$ выпукла вверх.*

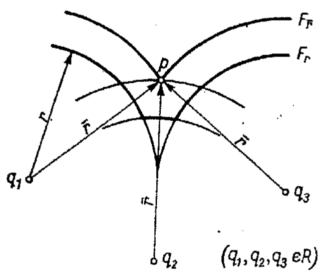
Докажем сперва вспомагательное предложение:

Пусть R — множество состоящее из конечного числа точек и пусть R_ϱ связно. Тогда функция $\varphi_R(r)$ выпукла вверх для $r>\varrho$.

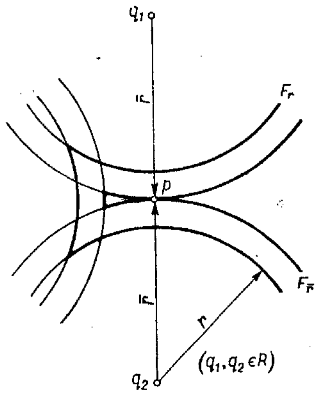
Доказательство будет опираться на трех леммах, которые приводятся ниже. Но прежде чем к ним перейти, нам следует сделать несколько замечаний относительно строения границы множества R_r, которую мы будем здесь коротко обозначать через F_r.

Примем для дальнейшего, что $r>\varrho$. Тогда R_r будет связно. F_r может при этом, конечно, быть множеством несвязным в некоторой области изменения r (но напр. для достаточно больших r оно наверно связно).

Каждая из компонент F_r, если она не одноточечна (в том, что одноточечная компонента на деле может выступить, можно убедиться на соотв. примере), есть замкнутая кривая состоящая из круговых дуг радиуса r с центрами в точках из R; более того, она есть простая замкнутая кривая, исключая случай, когда какие-то две из ее составляющих дуг касаются (внешним образом). Легко себе уяснить, что когда r меняется, число составляющих дуг может измениться при переходе r через некоторое значение $\bar{r}$ лишь за счет двух обстоятельств: (a) если при этом одна (по крайней мере) из составляющих дуг стягивается в точку и затем исчезает (это и есть, очевидно, тот случай, когда, в частности, у $F_{\bar{r}}$ может оказаться одноточечная компонента) и (б), если одна (по крайней мере) из этих дуг делится при этом на большее число составляющих дуг. В случае (a) через ту точку $p \in F_{\bar{r}}$, в которую



Черт. 1а



Черт. 1б

стянулась дуга, как через предельное положение концов по крайней мере трех составляющих дуг, проходят три разные окружности радиуса r с центрами из R; иначе говоря, точка p находится на одинаковом расстоянии от трех разных точек из R (черт. 1а). В случае (б), при $r=\bar{r}$, как легко сообразить, в точке p, делящей данную дугу, наступит внешнее касание двух составляющих дуг, значит, точка p делит пополам отрезок соединяющий пару точек из R (черт. 1б). Так как R — конечное множество, то каждый из этих случаев может произойти лишь для конечного числа значений r. Эти значения назовем *исключительными*, все же остальные — *неисключительными* значениями радиуса.

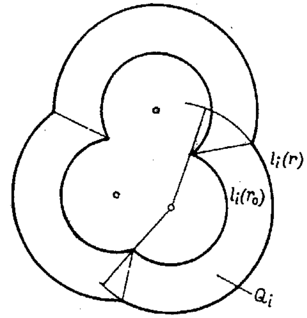
Пусть r_0 — неисключительное значение радиуса, $l_1(r_0), l_2(r_0), \ldots, l_\nu(r_0)$ — составляющие дуги границы F_{r_0} перенумерованные в некотором порядке. Из вышеизложенного следует, что каждая из компонент F_{r_0} простая замкнутая кривая и что, когда r меняется в достаточно малой окрестности U значения r_0, то число составляющих ее дуг сохраняется, при чем каждая из дуг $l_i(r_0)$

переходит непрерывным образом в соответствующую, близкую к ней и концентрическую с ней дугу $l_i(r)$ радиуса r.

Еще несколько слов о вершинах (угловых точках) границы F_{r_0}. Так как составляющим дугам можно отнести однозначно вершины (напр. при определенном направлении обхода на компонентах отнести каждой из дуг ее первый конец; в случае, когда дуга является целой окружностью, мы, чтобы сохранить в дальнейшем однообразность формулировок, примем условно одну из ее точек за вершину), то число вершин равно числу дуг, т. е. ν.

Лемма 1. $\dfrac{d}{dr}\mathrm{m}R_r = \mathrm{s}F_r$ $(r>\varrho)$ (6).

Доказательство. Пусть r принадлежит окрестности U значения r_0. Пусть сначала $r>r_0$. Соединим отрезками соответствующие концы дуг $l_i(r)$ и $l_i(r_0)$. Множество $R_r - R_{r_0}$ окажется разрезанным этими отрезками на ν криволинейных четырехугольников Q_i, $i=1,2,\ldots,\nu$. Дополним каждый Q_i вблизи его концов соответствующими криволинейными треугольниками так, чтобы получился кольцевой сегмент с площадью $\mathrm{s}l_i(r_0)\cdot(r-r_0)$ (черт. 2). Площадь такого треугольника, как легко видеть, не превышает произведения $r-r_0$ на расстояние между двумя соответствующими концами дуг $l_i(r_0)$ и $l_i(r)$ стремящееся к нулю при $r\to r_0$ и поэтому получаем следующую оценку:



Черт. 2

$$\mathrm{m}Q_i = \mathrm{s}l_i(r_0)\cdot(r-r_0)+o(r-r_0), \qquad i=1,2,\ldots,n.$$

одкуда, просуммировав по i,

$$\mathrm{m}R_r - \mathrm{m}R_{r_0} = \mathrm{m}(R_r - R_{r_0}) = \sum_{i=1}^{\nu}\mathrm{m}Q_i = \mathrm{s}F_{r_0}\cdot(r-r_0)+o(r-r_0).$$

Для случая $r<r_0$, совершенно аналогично получим оценку:

$$\mathrm{m}R_{r_0} - \mathrm{m}R_r = \mathrm{m}(R_{r_0} - R_r) = \mathrm{s}F_{r_0}\cdot(r_0-r)+o(r-r_0).$$

Последние две оценки запишутся вместе следующим образом;

$$\mathrm{m}R_r - \mathrm{m}R_{r_0} = \mathrm{s}F_{r_0}\cdot(r-r_0)+o(r-r_0),$$

откуда следует непосредственно утверждение леммы, пока лишь при предположении, что r_0 неисключительное значение. Но $\mathrm{s}F_r$, как легко заметить,

(6) Мы сохраняем предположение $r>\varrho$, так как лишь при нем это соотношение понадобится.

непрерывная функция от r, а отсюда уже просто выводим, что и для исключительного значения утверждение леммы верно (для исключительного значения $r=\bar{r}$, $\mathrm{m}R_r$ имеет, как легко видеть, обусторонные производные по r равные обе $\mathrm{s}F_{\bar{r}}$). Таким образом мы видим, что утверждение леммы справедливо всюду (т. е. для всех $r>\varrho$).

Введем определение: *внешним углом* в данной вершине, образованной некоторой парой круговых дуг, назовем лежащий вне соответствующих кругов угол, образованный касательными к этим дугам в данной точке.

Если все вершины границы F_{r_0} перенумерованы, то пусть $\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_\nu$ — внешние углы в этих вершинах. Пусть далее Φ_i — центральный угол дуги $l_i(r_0)$.

Лемма 2. *Для всякого неисключительного значения r_0 производная от $\mathrm{s}F_r$ по r существует и*

$$\frac{d}{dr}\,\mathrm{s}F|_{r=r_0}=\sum_{i=1}^{\nu}\Phi_i-2\sum_{i=1}^{\nu}\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\gamma_i .$$

Доказательство. Пусть r_0, как прежде, произвольное неисключительное значение, $r_0>\varrho$, и r из указанной выше окрестности U этого значения. Пусть p_i^0, q_i^0 и p_i, q_i соответственные концы дуг $l_i(r_0)$ и $l_i(r)$; пусть далее $l_i'(r)$ — проекция дуги $l_i(r_0)$ на окружность, носящую дугу $l_i(r)$, из общего центра обеих окружностей; пусть соответственно p_i' и q_i' — концы дуги $l_i'(r)$ соответствующие по соседству точкам p_i^0 и q_i^0 (и соответственно точкам p_i и q_i); внешние углы в вершинах p_i^0 и q_i^0 обозначим временно через α_i и β_i. Точки p_i и q_i лежат, как легко заметить, на биссектрисах этих углов.

Пусть сначала $r>r_0$. Тогда дуга $l_i(r)$ содержится целиком в дуге $l_i'(r)$ (черт. 3). Если из дуги $l_i'(r)$ удалить дугу $l_i(r)$, то останутся две дуги $\widehat{p_ip_i'}$ и $\widehat{q_iq_i'}$ и для длин будем иметь тогда соотношение $\mathrm{s}\,l_i'(r)-\mathrm{s}\,l_i(r)=\mathrm{s}\widehat{p_ip_i'}+\mathrm{s}\widehat{q_iq_i'}$. Займемся приближенным выражением длин этих дуг через приращение радиуса $r-r_0$ и углы α_i и β_i. Рассмотрим напр. первую из них, $\widehat{p_ip_i'}$. Взяв на биссектрисе угла α_i вспомогательную точку p_i'' так, чтобы треугольник $\Delta p_i^0p_i'p_i''$ имел прямой угол в вершине p_i', получим $\mathrm{s}\overline{p_i'p_i''}=(r-r_0)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\alpha_i$ [7]. Далее, имеют место, как легко видеть, следующие неравенства: $\mathrm{s}\overline{p_ip_i'}<\mathrm{s}\widehat{p_ip_i'}<\mathrm{s}\overline{p_i'p_i''}+\mathrm{s}\overline{p_i''p_i}$. Из них и из соотношения $\mathrm{s}\overline{p_i'p_i''}-\mathrm{s}\overline{p_i'p_i}<\mathrm{s}\overline{p_i''p_i}=o(r-r_0)$ (здесь $\mathrm{s}\overline{p_i''p_i}=o(r-r_0)$ следует из того, что при $r\to r_0$ направление $\overrightarrow{p_i'p_i}$ стремится к направлению $\overrightarrow{p_i'p_i''}$ — касательному к $l_i(r)$), получаем $\mathrm{s}\overline{p_ip_i'}<\mathrm{s}\widehat{p_ip_i'}<\mathrm{s}\overline{p_ip_i'}+2\mathrm{s}\overline{p_i''p_i}=\mathrm{s}\overline{p_ip_i'}+o(r-r_0)$, значит, окончательно,

$$\mathrm{s}\widehat{p_ip_i'}=(r-r_0)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\alpha_1+o(r-r_0).$$

---

[7] Знаком — над парой точек обозначаем соответствующий отрезок.

Совершенно аналогично для другой из дуг получаем $\mathrm{s}\widehat{q_iq_i'}=(r-r_0)\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\beta_i+o(r-r_0)$. Учтя, что $l_i(r_0)=r_0\Phi_i$ и $\mathrm{s}\,l_i'(r)=r\Phi_i$, и используя выведенные выше соотношения, получим

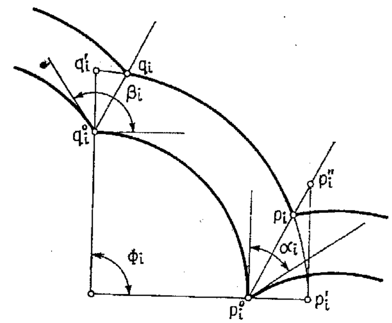
$$\begin{aligned}\mathrm{s}\,l_i(r)-\mathrm{s}\,l_i(r_0)&=\big(\mathrm{s}\,l_i(r)-\mathrm{s}\,l_i'(r)\big)+\big(\mathrm{s}\,l_i'(r)-\mathrm{s}\,l_i(r_0)\big)=\\&=-\mathrm{s}\widehat{p_ip_i'}-\mathrm{s}\widehat{q_iq_i'}+(r-r_0)\,\Phi_i=(r-r_0)\big((\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\alpha_i-\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\beta_i+\Phi_i)+o(r-r_0)\big).\end{aligned}$$

Просуммируем полученные равенства по $i=1,2,\dots,\nu$ возвращаясь одновременно к однообразным обозначениям γ_i, $i=1,2,\dots,\nu$, вместо α_i и β_i получим

$$\mathrm{s}F_r-\mathrm{s}F_{r_0}=(r-r_0)\Big(\sum_{i=1}^{\nu}\Phi_i+\sum_{i=1}^{\nu}(-2\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\gamma_i)\Big)+o(r-r_0).$$

Здесь первая из сумм стоящих справа распространена на все составляющие дуги, а вторая на все вершины F_{r_0}.

Последнее равенство было нами выведено при предположении $r>r_0$. Но наше построение целиком повторяемо для $r<r_0$ и оно приводит к точно такому



Черт. 3

же равенству. Таким образом, равенство верно для r из некоторой окрестности значения r_0, а это значит попросту, что $\mathrm{s}F_r$ дифференцируемо по r в точке r_0 и справедливо утверждение леммы.

Из лемм 1 и 2 для функции $\varphi_R(r)$, учитывая ее определение, получаем, что она двухкратно дифференцируема при всяком неисключительном значении $r=r_0$, а на ее вторую производную получаем выражение

$$(1)\qquad \frac{d^2}{dr^2}\varphi_R(r)|_{r=r_0}=\sum_{i=1}^{\nu}\Phi_i-2\sum_{i=1}^{\nu}\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\gamma_i-2\pi .$$

Из неравенств $0 \leqslant \gamma_i < \pi$, которым, конечно, удовлетворяют углы γ_i [8] следует неравенства $\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\gamma_i > \frac{1}{2}(\pi-\gamma_i)$, после применения которых в (1) получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{\nu}\Phi_i - 2\sum_{i=1}^{\nu}\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}\gamma_i \leqslant \sum_{i=1}^{\nu}\Phi_i - \sum_{i=1}^{\nu}(\pi-\gamma_i) \tag{2}$$

(в котором знак равенства достигается лишь в крайнем случае, когда углы γ_i отсутствуют, т. е., когда F_{r_0} — окружность).

Нижеследующая лемма дает нам другое выражение на правую сторону неравенства (2), раскрывая заодно ее простой геометрический смысл, что сделает возможным оценить ее соответствующим образом сверху.

Лемма 3. *Пусть r_0 — попрежнему неисключительное значение. Если N — число компонент у F_{r_0}, то*

$$\sum_{i=1}^{\nu}\Phi_i - \sum_{i=1}^{\nu}(\pi-\gamma_i) = (2-N)\,2\pi \text{ [9]}. \tag{3}$$

Доказательство. Примем обычную ориентировку плоскости, т. е. будем считать положительное направление изменения углов противоположным движению часовой стрелки. На каждой из компонент множества F_{r_0}, которые, как знаем из предыдущего, при неисключительном r_0 оказываются простыми замкнутыми кривыми, выберем, как на части границы множества R_{r_0}, положительное направление обхода (в известном из топологии смысле). Легко замечаем, что когда точка проходит одну из дуг $l_i(r_0)$ в положительном направлении, то касательная взятая в этой движущейся точке поворачивается в положительном направлении на угол Φ_i; если же точка перейдет через вершину с углом γ_i, то направление касательной испытает скачок на отрицательный угол $-(\pi-\gamma_i)$. Отсюда получается, что сумма тех слагаемых правой стороны нашего неравенства, которые относятся к данной компоненте, равна величине угла оборота касательной, когда движущаяся точка касания пробегает всю компоненту в положительном направлении. Целая же правая сторона неравенства равна сумме таких величин по всем компонентам. Но угол полного оборота касательной для внешней компоненты (т. е. той, которая ограничивает бесконечную компоненту дополнения множества R_{r_0}) равен 2π, а для всякой другой компоненты он равен -2π. Итак, правая сторона нашего неравенства оказывается равной $\big(1-(N-1)\big)2\pi = (2-N)\,2\pi$, что требовалось доказать.

[8] В условно введенной вершине, о которой говорилось выше, внешний угол, правда, равен π, но ею можем пренебречь, поскольку соответствующее ей слагаемое по правой стороне (1) равно нулю.

[9] В этой статье использовано лишь некоторое следствие из леммы 3. Дальнейшее ее использование наступит в части II настоящей работы ([1]).

Теперь мы уже легко выведем наше вспомогательное предложение: из леммы 3, учтя, что всегда $N \geqslant 1$ и из (1) и (2) получаем, что для $r > \varrho$, за исключением самое большее конечного числа значений r (исключительных) справедливо неравенство $d^2\varphi_R(r)/dr^2 \leqslant 0$. Так как функция $\varphi_R(r)$ обладает непрерывной производной (равной $\mathrm{s}F_r - 2\pi r$), то это неравенство является достаточным условием выпуклости вверх этой функции.

Возвращаясь к доказательству теоремы, заметим, что континуум M, являясь ограниченным множеством, содержит для каждого натурального числа n конечную $(1/n)$-сеть, т. е. конечное множество R^n, удовлетворяющее условию $M \subset R^n_{1/n}$. Можем, конечно, принять, что последовательность $\{R^n\}$ восходящая: $R^n \subset R^{n+1}$.

По второму из определений обобщенного круга, данных в начале работы, имеем $M_r = \overline{\sum_{p\in M}(p)_r}$. Очевидно, имеем

$$\sum_{p\in M}(p)_r = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} R^n_r}$$

следовательно,

$$M_r = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} R^n_r}.$$

Из очевидного соотношения $\{p\colon\ d(p,M)=r\} \subset M_{r+\varepsilon} - M_{r-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ и из непрерывности $\mathrm{m}M_r$ как функции от r (см. сноску [6] на стр. 127) следует $\mathrm{m}\{p\colon\ d(p,M)=r\}=0$. Далее, если для некоторой точки $p \in M_r$, $d(p,M) < r$, то для достаточно больших n будет $d(p,R^n) < r$, значит, $p \in R^n_r$ для этих n. Но это дает, что

$$M_r - \sum_{n=1}^{\infty} R^n_r \subset \{p\colon\ d(p,M)=r\}.$$

Отсюда

$$\mathrm{m}M_r - \mathrm{m}\sum_{n=1}^{\infty} R^n_r = \mathrm{m}\Big(M_r - \sum_{n=1}^{\infty} R^n_r\Big) = \mathrm{m}\{p\colon\ d(p,M)=r\} = 0.$$

Далее, так как из $R^n \subset R^{n+1}$ следует $R^n_r \subset R^{n+1}_r$, то

$$\mathrm{m}M_r = \mathrm{m}\sum_{n=1}^{\infty} R^n_r = \lim_{n\to\infty}\mathrm{m}R^n_r.$$

Отсюда сейчас же получается равенство

$$\varphi_M(r) = \lim_{n\to\infty}\varphi_{R^n}(r).$$

Фиксируем некоторое $\varrho > 0$. Для $n > 1/\varrho$ будем иметь $M \subset R^n_{1/n} \subset R^n_\varrho$, а так как M по предположению связно (континуум), то связным является и содержащее его множество R_ϱ^n (так как по построению, каждая из возможных компонент последнего множества должна, очевидно, содержать точку из связного множества M).

Итак, мы находимся в условиях применимости вспомогательного предложения к множеству $R=R^n$ с тем же ϱ. Из этого предложения следует, что для $n>1/\varrho$ и $r>\varrho$ функция $\varphi_{R^n}(r)$ является выпуклой вверх. Отсюда вытекает выпуклость вверх для $r>\varrho$ функции $\varphi_M(r)$, как предела функций $\varphi_{R^n}(r)$ когда $n\to\infty$. Но ϱ было произвольным положительным числом и поэтому функция $\varphi_M(r)$ выпукла вверх для $r>0$. Теорема доказана.

В частности, когда рассматриваемый континуум есть простая дуга L из доказанной теоремы получаем как следствие, что $(\mathrm{m}L_r-\pi r^2)/2r$ убывающая функция от r; вышеупомянутый результат Гросса-Фавара даст тогда $(\mathrm{m}L_r-\pi r^2)/2r<\mathrm{s}L\leqslant\infty$.

Это именно следствие находит применение в исследованиях Ю. Пэркаля [5].

Цитированная литература

[1] Г. Фаст, *Площадь обобщенного круга как функция его радиуса (II)*, Fund. Math. этот том, стр. 147-163.

[2] J. Favard, *La longueur et l'aire d'après Minkowski*, Bull. Soc. Math. France 61 (1933), стр. 63-84.

[3] W. Groß, *Über das lineare Maß von Punktmengen*, Monatshefte f. Math. u. Phys. 29 (1918), стр. 177-193.

[4] M. Kneser, *Über den Rand von Parallelkörpern*, Math. Nachrichten 5 (1951), стр. 241-254.

[5] Ю. Пэркаль, *Об ε-длине*, Бюлл. Польской Ак. Наук, отд. III, 7 (1956), стр. 391-395.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Reçu par la Rédaction le 18. 5. 1957

Площадь обобщенного круга как функция его радиуса (II)

Г. Фаст (Вроцлав)

Настоящая вторая часть работы посвященной изучению площади обобщенного круга как функции его радиуса содержит дальнейшую разработку тематики первой части, опубликованной под тем же заглавием с номером (I) на стр. 137-146.

В дальнейшем мы будем первую часть работы обозначать кратко символом (I) и пользоваться без особых оговорок (за исключением лишь нескольких мест) употребленными в ней обозначениями, определениями понятий и полученными в ней результатами.

В (I) была доказана теорема о том, что для множества M, являющегося континуумом, функция $\varphi_M(r)$ выпукла вверх. Выпуклость подразумевалась в слабом смысле (т. е. в том обычном смысле, когда равенство характеризующее выпуклость пишется со знаком $\leqslant$). Поэтому теоремой допущена линейность функции $\varphi_M(r)$ как крайний случай выпуклости, а приведенная в (I) формула Минковского показывает, что случай линейности этой функции на целой полупрямой $r>0$ фактически осуществляется, именно, для выпуклых континуумов M.

Естественно возникает вопрос о поведении $\varphi_M(r)$ с точки зрения ее строгой выпуклости (конечно, вверх) — для каких континуумов M функция $\varphi_M(r)$ является строго выпуклой на целой числовой полупрямой $r>0$, а также для каких M и на какой части числовой полупрямой $r>0$ она может оказаться линейной. Решению этих вопросов и посвящена в основном настоящая вторая часть работы.

Начнем с введения двух новых понятий: множества $B^{(r,M)}$ и радиуса внешней достижимости данного множества (необязательно континуума) M.

Пусть M — заданное ограниченное множество и пусть дано число $r>0$. Рассмотрим класс $\mathfrak{B}^{(r,M)}$ всех неограниченных связных множеств B обладающих свойством $B_r\subset CM$ (¹) (этот класс, очевидно, не пуст, так как он содержит в качестве элемента внешность достаточно большого круга содержащего множество M). Множество $B^{(r,M)}$ определим формулой

$$B^{(r,M)}=\overline{\sum_{B\in\mathfrak{B}^{(r,M)}} B}.$$

(¹) Символ C обозначает переход к дополнению.