Invariante Metriken in homogenen Räumen *

von

A. Goetz (Wrocław)

1. Wir betrachten einen topologischen Raum $\mathcal{M}$, in dem eine topologische Gruppe G von homöomorphen Transformationen transitiv wirkt. Die Topologie in G ist derart, daß

1° die Funktion $\varphi_P(x)=xP$ $(x \in G,\ P \in \mathcal{M})$ stetig in den beiden Veränderlichen x und P ist und

2° bei fixiertem P, φ_P eine offene Abbildung der Gruppe G auf $\mathcal{M}$ ist.

Die Untergruppe, für welche der Punkt P invariant bleibt, bezeichnen wir mit H_P.

Eine Umgebung [1] $\mathcal{U}$ von $P \in \mathcal{M}$ heißt *kugelförmig in bezug auf* G, wenn $h\mathcal{U}=\mathcal{U}$ für jedes $h \in H_P$ gilt.

Eine kugelförmige Umgebung $\mathcal{U}$ von $P \in \mathcal{M}$ heißt *symmetrisch*, wenn $x^{-1}P \in \mathcal{U}$ aus $xP \in \mathcal{U}$ folgt.

Aus der Definition der Abbildung φ_P folgt, daß $\varphi_P^{-1}(Q)$ $(Q \in \mathcal{M})$ die linke Nebengruppe xH_P eines beliebigen Elementes x ist, für welches $xP=Q$, und deswegen besteht für jedes $\mathcal{U}\subset\mathcal{M}$ die Menge $\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})$ aus vollen linken Nebengruppen, dh.

$$\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})=\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})H\,. \tag{1}$$

Die Kugelförmigkeit der Umgebung $\mathcal{U}$ ist mit der Bedingung

$$H\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})=\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}) \tag{2}$$

und die Symmetrie mit der Bedingung

$$[\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})]^{-1}=\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}) \tag{3}$$

äquivalent.

Hilfssatz 1. *Gibt es ein vollständiges System Σ von kugelförmigen Umgebungen des Punktes $P \in \mathcal{M}$, so gibt es auch ein vollständiges System Σ' von kugelförmigen symmetrischen Umgebungen von P.*

---

* Die Folgenden Resultate wurden in Bull. Pol. Acad. Sci., Cl. III, 5 (1957), S. 139-140 ohne Beweis veröffentlicht.

[1] Wir betrachten immer nur offene Umgebungen.

Beweis. Die Mengen

$$\mathcal{U}'=\varphi_P\big(\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})\cap[\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})]^{-1}\big)\,,$$

wo $\mathcal{U} \in \Sigma$, bilden ein vollständiges System, weil die $\mathcal{U}'$ nach 1° offen sind und $\mathcal{U}'\subset\mathcal{U}$. Weiter haben wir $\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}')=\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})\cap[\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})]^{-1}$. Offensichtlich ist $[\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}')]^{-1}=\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}')$ und nach (2) und (3) ist

$$H\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}')=H\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})\cap H[\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})]^{-1}=\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})\cap[\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})]^{-1}=\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}')\,,$$

was die Kugelförmigkeit von $\mathcal{U}'$ bedeutet.

Hilfssatz 2. *Gibt es ein vollständiges System Σ von kugelförmigen Umgebungen von $P \in \mathcal{M}$, so gibt es für jede Umgebung $\mathcal{U}$ von P eine derartige kugelförmige $\mathcal{U}' \in \Sigma$, daß*

$$\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}')\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}')\subset\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})\,.$$

Beweis. Da $\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})$ eine offene Umgebung des Einheitselementes e der Gruppe G ist, gibt es eine solche Einheitselementsumgebung $W\subset G$, daß

$$WW\subset\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})\,. \tag{4}$$

Nach 2° ist $\varphi_P(W)$ eine offene Menge in $\mathcal{M}$, die P enthält, und deswegen gibt es in Σ eine Umgebung $\mathcal{U}'\subset\varphi_P(W)$. Es gilt dann

$$\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}')\subset WH\,. \tag{5}$$

Nun haben wir nach (5) und (4)

$$\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}')\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}')\subset WH\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}')=W\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}')\subset WWH\subset\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})H=\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})\,,$$

da $\mathcal{U}'$ kugelförmig ist und $H\varphi_P^{-1}(\mathcal{U}')=\varphi_P^{-1}(\mathcal{U})$.

Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

2. Eine Metrik $d(P,Q)$ in $\mathcal{M}$ heißt *ivariant in bezug auf* G, wenn für jedes $x \in G$

$$d(xP,xQ)=d(P,Q)$$

gilt.

Satz 1. *Eine in bezug auf G invariante Metrik in $\mathcal{M}$, die mit der gegebenen Topologie übereinstimmt, existiert dann und nur dann, wenn die beiden Bedingungen erfüllt sind:*

(K) *Es gibt ein vollständiges System von kugelförmigen Umgebungen eines Punktes $P_0 \in \mathcal{M}$;*

(A) *Es gilt in $\mathcal{M}$ das erste Abzählbarkeitsaxiom.*

Beweis. Gibt es eine invariante Metrik, so bilden die $1/n$-Kugeln um P_0 ein vollständiges System, das die Bedingungen (K) und (A) erfüllt. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingungen bewiesen.

Setzen wir jetzt (K) und (A) voraus. Nach den Hilfssätzen 1, 2 und nach (A) gibt es eine Folge $\{\mathcal{U}_n\}$ von P_0-Umgebungen, die ein vollständiges System bildet und die Eigenschaften

(6) $$\varphi_{P_0}^{-1}(\mathcal{U}_n)=[\varphi_{P_0}^{-1}(\mathcal{U}_n)]^{-1},$$

(7) $$\varphi_{P_0}^{-1}(\mathcal{U}_{n+1})\varphi_{P_0}^{-1}(\mathcal{U}_{n+1})\subset\varphi_{P_0}^{-1}(\mathcal{U}_n)$$

für jedes n hat.

Wir führen weiter die Bezeichnung

$$V_n=\varphi_{P_0}^{-1}(\mathcal{U}_n)$$

ein. Die Formeln (6), (7) können in der Form

(6′) $$V_n=V_n^{-1},$$

(7′) $$V_{n+1}V_{n+1}\subset V_n$$

geschrieben werden.

Für jede dyadischrationale Zahl

$$r=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_n}{2^n}\qquad (a_i=0,1)$$

aus dem Intervall (0,1) definierten wir eine offene Untermenge von G

(8) $$V(r)=V_1^{a_1}V_2^{a_2}\ldots V_n^{a_n},$$

wo unter $V_i^0=(e)$ zu verstehen ist.

Da alle V_i die Eigenschaften (1) und (2) haben, haben auch die $V(r)$ dieselben, dh.

(9) $$HV(r)=V(r),\qquad V(r)H=V(r).$$

Die $V(r)$ bilden eine monotone Familie von Mengen und man kann in G die Funktion

$$f(x)=\begin{cases}\inf\limits_{x\in V(r)} r & \text{für}\quad x\in\bigcup\limits_r V(r),\\ 1 & \text{für}\quad \text{übrige } x\end{cases}$$

einführen [2].

Die Funktion f hat die folgenden Eigenschaften:

(10) $$f(e)=0,\qquad 0\leqslant f(x)\leqslant 1;$$

(11) aus $f(x)\leqslant r$ folgt $x\in V(r)$, und aus $x^{-1}y\in V_n$ folgt $|f(x)-f(y)|\leqslant 1/2^n$;

(12) $f(x)$ ist konstant auf den linken und auf den rechten Nebengruppen xH_{P_0} und $H_{P_0}x$.

Das letztere folgt aus (9).

[2] Den Beweis der Monotonie von $V(r)$ und der erwähnten Eigenschaften von $f(x)$ kann man in Pontrjagin [4], S. 114-116, finden. Die Rolle der dortigen U_n spielen unsere V_n, und die der W_r spielen dank (3) unsere $V(r)$.

Jetzt definieren wir eine linksinvariante Pseudometrik in G:

$$\varrho(x,y)=\sup_{z\in G}|f(zx)-f(zy)|.$$

Aus der Definition folgen sofort die Eigenschaften

(13) $$\varrho(x,x)=0,$$

(14) $$\varrho(x,y)=\varrho(y,x),$$

(15) $$\varrho(x,y)+\varrho(y,z)\geqslant\varrho(x,z),$$

(16) $$\varrho(zx,zy)=\varrho(x,y).$$

Aus (11) und (12) folgt weiter

(17) aus $\varrho(x,y)<1/2^n$ folgt $x^{-1}y\in V$ und aus $x^{-1}y\in V_n$ folgt $\varrho(x,y)\leqslant 1/2^{n-1}$;

(18) $\varrho(x,y)$ ist konstant auf den linken Nebengruppen, dh. $\varrho(xh_1,yh_2)=\varrho(x,y)$ für $h_1,h_2\in H_{P_0}$.

Den Abstand $d(P,Q)$ in M von $P=xP_0$ und $Q=yP_0$ führen wir mittels der Formel

$$d(P,Q)=\varrho(x,y)$$

ein.

Aus (18) folgt, daß diese Definition von der Wahl der Transformationen x und y, die P_0 in P (bzw. in Q) überführen, unabhängig ist. Nach (13)-(17) ist $d(P,Q)$ eine invariante Pseudometrik und

(19) $$\{P:\ d(P_0,P)<1/2^n\}\subset\mathcal{U}_n\subset\{P:\ d(P_0,P)\leqslant 1/2^{n-1}\}.$$

Aus (19) und aus der Invarianz von d folgt, daß d eine invariante Metrik ist, die mit der Topologie in $\mathcal{M}$ übereinstimmt.

Aus dem Satz 1 folgt unmittelbar der Satz von Kakutani [3] über die Existenz einer invarianten Metrik in einer topologischen Gruppe mit dem ersten Abzählbarkeitsaxiom. In diesem Fall ist $\mathcal{M}=G$, G wird als Gruppe der linken Translationen betrachtet und da die nichtidentischen Transformationen fixpunktfrei sind, ist jede Umgebung kugelförmig und (K) immer erfüllt.

Aus diesem Satze folgt auch der Satz, den ich in [2] bewiesen habe.

Beispiel. Es sei G die Gruppe der Transformationen

$$x\to ax+b,\qquad a>0,$$

der Geraden R. Die Untergruppe H_0 ist die Gruppe der Transformationen $x\to ax$ und für jede Umgebung $\mathcal{U}$ von 0 ist $H_0\mathcal{U}=G$. Es gibt keine kugelförmige Umgebungen von 0 außer G. Dasselbe gilt für jeden anderen Punkt der Geraden und es gibt keine invariante Metrik.

3. Läßt man nun die Bedingung (A) fallen, so kann man einen ähnlichen Satz über invariante uniforme Strukturen beweisen.

Eine uniforme Struktur (siehe A. Weil [7]) in $\mathcal{M}$ ist dadurch bestimmt, daß man die Umgebungen aller Punkte mit Indizes $\tau \in T$ so numeriert ($\mathcal{U}_\tau(P)$ bedeutet die Umgebung von P mit Index τ), daß

(U.1) alle $\mathcal{U}_\tau(P)$ $(\tau \in T)$ ein vollständiges System von P-Umgebungen bilden,

(U.2) für jedes Paar $\varrho, \sigma \in T$ es ein $\tau \in T$ gibt, so daß für jedes $P \in \mathcal{M}$ $\mathcal{U}_\tau(P) \subset \mathcal{U}_\varrho(P) \cap \mathcal{U}_\sigma(P)$.

(U.3) für jedes $\sigma \in T$ es ein solches $\tau \in T$ gibt, daß aus $Q \in \mathcal{U}_\tau(P)$, $R \in \mathcal{U}_\tau(P)$ folgt $R \in \mathcal{U}_\sigma(Q)$.

Eine uniforme Struktur im $\mathcal{M}$ heißt invariant in bezug auf G, wenn für jede $x \in G$, $P \in \mathcal{M}$, $\tau \in T$

$$\mathcal{U}_\tau(xP) = x\mathcal{U}_\tau(P)\,. \tag{20}$$

Satz 2. *Die Bedingung* (K) *ist notwendig und hinreichend dafür, daß in $\mathcal{M}$ eine in bezug auf G invariante Struktur existiert.*

Beweis. Die Notwendigkeit ist offenbar, da nach (20) aus $hP_0 = P_0$, $h\mathcal{U}_\tau(P_0) = \mathcal{U}_\tau(hP_0) = \mathcal{U}_\tau(P_0)$ folgt.

Existiert ein vollständiges System von kugelförmigen Umgebungen von P_0 (nach Hilfssatz 2 kann man auch die Symmetrie voraussetzen), so numerieren wir diese mit irgendwelchen Indizes $\tau \in T$ und bezeichnen sie mit $\mathcal{U}_\tau(P_0)$. Für ein beliebiges $P = xP_0$ setzen wir

$$\mathcal{U}_\tau(P) = x\mathcal{U}_\tau(P_0)\,. \tag{21}$$

Diese Definition hängt von der Wahl von x nicht ab, weil $\mathcal{U}_\tau(P_0)$ kugelförmig ist. Wirklich, ist $xP_0 = yP_0$, so ist $y = xh$ $(h \in H_{P_0})$ und $y\mathcal{U}_\tau(P_0) = xh\mathcal{U}_\tau(P_0) = x\mathcal{U}_\tau(P_0)$.

Wir werden beweisen, daß $\mathcal{U}_\tau(P)$ in $\mathcal{M}$ eine invariante uniforme Struktur bestimmt. Die Bedingungen (U.1) und (U.2) und die Invarianz (20) sind evident, und es genügt (U.3) nur für $P = P_0$ zu zeigen.

Es sei $\sigma \in T$ gegeben. Nach dem Hilfssatz 2 kann man ein $\tau \in T$ finden, für welches gilt:

$$\varphi_{P_0}^{-1}\big(\mathcal{U}_\tau(P_0)\big)\,\varphi_{P_0}^{-1}\big(\mathcal{U}_\tau(P_0)\big) \subset \varphi_{P_0}^{-1}\big(\mathcal{U}_\sigma(P_0)\big)\,.$$

Ist jetzt $Q = xP_0$, $R = yP_0$ und $Q, R \in \mathcal{U}_\tau(P_0)$, so haben wir

$$x \in \varphi_{P_0}^{-1}\big(\mathcal{U}_\tau(P_0)\big), \qquad y \in \varphi_{P_0}^{-1}\big(\mathcal{U}_\tau(P_0)\big)$$

und da die Umgebungen nach Voraussetzung symmetrisch sind, ist folglich

$$x^{-1}y \in \varphi_{P_0}^{-1}\big(\mathcal{U}_\sigma(P_0)\big), \qquad x^{-1}yP_0 \in \mathcal{U}_\sigma(P_0), \qquad yP_0 \in x\mathcal{U}_\sigma(P_0), \qquad R \in \mathcal{U}_\sigma(Q)$$

w. z. b. w.

Bei dieser uniformen Struktur sind die Transformationen aus G gleichgradig stetig. Umgekehrt: sind die Transformationen aus G bei einer uniformen Struktur gleichgradig stetig, so gibt es in $\mathcal{M}$ ein äquivalente Struktur, die invariant ist. Deswegen kann Satz 2 auch folgendermaßen ausgesprochen werden:

Die Bedingung (K) *ist notwendig und hinreichend dafür, daß in $\mathcal{M}$ eine uniforme Struktur existiert, bei welcher die Transformationen aus G gleichgradig stetig sind.*

Man bemerke, daß die Bedingung 2° wesentlich ist. Ohne dieser Voraussetzung kann Satz 2 unrichtig sein, wie mann es an den Beispielen aus [5] sieht.

Setzt man Satz 2 mit einem Satz von Segal [6] zusammen, so bekommt man das

Korollar. *Ist $\mathcal{M}$ lokalkompakt, so ist die Bedingung* (K) *hinreichend dafür, daß in $\mathcal{M}$ ein invariantes, reguläres Maß existiert.*

Gilt in $\mathcal{M}$ auch das zweite Abzählbarkeitsaxiom, so kann man hier den Beweis von Banach [1] anwenden.

Zitate

[1] S. Banach, *On Haar's measure*, im Buche von S. Saks, Theory of the Integral, New York 1937, S. 314-319.

[2] A. Goetz, *Über eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer invarianten Metrik in homogenen Räumen*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 3 (1955), S. 467-469.

[3] S. Kakutani, *Über die Metrisation der topologischen Gruppen*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 12 (1936), S. 82-84.

[4] Л. С Понтрягин, *Непрерывные группы*, Москва 1954.

[5] J. E. Robinson, *Continuity of transformations groups in topological spaces*, Duke Math. J. 21 (1954), S. 337-348.

[6] J. E. Segal, *Invariant measures on locally compact spaces*, J. Indian Math. Soc. 13 (1949), S. 105-130.

[7] A. Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Paris 1937.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 14.12.1956