Les sous-groupes purs et leurs duals

par

S. Hartman (Wrocław) et **A. Hulanicki** (Wrocław)

G étant un groupe abélien localement compact G^* désignera le groupe *dual*, c'est-à-dire le groupe localement compact composé de tous les caractères continus χ de G. Si H est un sous-groupe fermé de G, on a $(G/H)^* = A \subset G^*$, où A (l'annulateur de H) se compose de tous les χ qui prennent la valeur 1 sur H.

Un sous-groupe H de G s'appelle *pur* si l'on a

$$nH = H \cap nG \tag{1}$$

pour tout n entier.

Le caractère χ d'un groupe G est d'ordre fini n si $\chi^n \equiv 1$ et si $\chi^m \not\equiv 1$ pour $m < n$. Nous dirons que le sous-groupe fermé H de G a la *propriété* (P) si tout caractère continu de H d'ordre fini se laisse prolonger sur le groupe G tout entier de façon qu'il y devienne un caractère continu du même ordre. Désormais le mot „caractère" désignera un caractère continu.

THÉORÈME 1. *Pour que A soit pur, il faut et il suffit que H ait la propriété* (P).

Admettons que H jouisse de la propriété (P) et que l'équation

$$\chi^n = \chi_0 \qquad (\chi_0 \in A) \tag{2}$$

ait une solution dans G^*. Si χ en est une, on a $\chi^n = 1$ partout sur H. Prolongeons le caractère $\overline{\chi}$, considéré sur H, en un caractère χ_1 de G sans élever son ordre. Il vient

$$(\chi\chi_1)^n = \chi_0$$

et, comme pour les éléments de H on a $\chi\chi_1 = \chi\overline{\chi} = 1$, l'équation (2) se trouve satisfaite par un élément de A, ce qui prouve que le sous-groupe A est pur.

Réciproquement, soit A un sous-groupe pur de G^* et χ_0 un caractère de H d'ordre n. Nous le prolongeons d'abord d'une façon arbitraire en un caractère du groupe G tout entier, ce qui est toujours possible ([5], p. 258). Désignons le caractère ainsi obtenu encore par χ_0. L'équation

$$\chi^n = \chi_0^n$$

étant résoluble dans G, elle est résoluble dans A. Si $\chi \in A$ en est une solution, on a

$$(\bar{\chi}\chi_0)^n \equiv 1$$

et $\bar{\chi}=1$ sur H, donc le caractère $\bar{\chi}\chi_0$ est un prolongement de χ_0 qui est du même ordre que χ_0.

LEMME 1. *Si un sous-groupe fermé H d'un groupe localement compact G est pur, chacune des deux hypothèses suivantes suffit pour que H ait la propriété* (P): (α) *le groupe nG est ouvert quel que soit n entier ou bien* (β) *nG est fermé pour tout n et le groupe H est compact.*

Évidemment, le cas (α) se présente, en particulier, quand le groupe G est discret, le cas (β) quand il est compact.

LEMME 2. *Si G est un groupe discret et H est un sous-groupe de G ayant la propriété* (P), *alors H est pur.*

Ce lemme est une conséquence du théorème 1 et du lemme 1 (cas (β)) puisque le groupe G^* est compact. Passons à la démonstration du lemme 1.

Comme le groupe nG est fermé, le groupe nH l'est également, en vertu de (1). Par conséquent, le groupe quotient H/nH est un groupe topologique localement compact. A cause de (1) il existe un isomorphisme algébrique $H/nH \xrightarrow[\varphi]{} (H+nG)/nG$ tel que

$$\varphi(a+nH) = a+nG \quad \text{pour tout} \quad a \in H. \tag{3}$$

Cet isomorphisme est donc continu. L'application inverse φ^{-1} l'est également, ce qui résulte, pour le cas (α), de ce que le groupe $(H+nG)/nG$ est discret et, pour le cas (β), de ce que le groupe H/nH est compact en même temps que H.

Soit χ un caractère de H d'ordre n. Puisque $\chi(nH)=1$, on peut considérer χ comme un caractère de H/nH. Alors $\chi\varphi^{-1}$ est un caractère du groupe $(H+nG)/nG$ et on peut le prolonger en un caractère χ_0 du groupe G/nG. Le caractère χ_0 est évidemment d'ordre n. En le superposant avec l'homomorphisme naturel $G \to G/nG$ on obtient un caractère d'ordre n du groupe G qui coïncide sur H avec χ en vertu de (3). Par conséquent, le groupe H a la propriété (P) et le lemme 1 se trouve démontré.

Maintenant, nous allons nous borner à une classe partielle K de groupes abéliens localement compacts. En particulier, soit K_1 la classe composée de tous les groupes qui sont engendrés par un entourage compact de l'élément neutre, et soit K_2 la classe des groupes qui sont leurs duals; soit enfin $K=K_1 \cup K_2$. Ainsi, la classe K est close par rapport à la relation de dualité, c'est-à-dire si $G \in K$, on a $G^* \in K$.

Tout groupe $G \in K_1$ est la somme directe d'un groupe compact Z, d'un groupe vectoriel V et d'un nombre fini de groupes cycliques infinis L ([5], p. 274). Par conséquent, tout groupe $G \in K_2$ est une somme directe

$$G = D \dotplus M \tag{4}$$

où D est un groupe discret et M est un groupe connexe-somme directe d'un groupe vectoriel et d'un groupe toroïdal de dimension finie. On en conclut que, pour $G \in K$, le groupe nG est fermé quel que soit n entier, puisque

$$nG = nZ \dotplus nV \dotplus nL \dotplus \ldots \dotplus nL$$

ou bien

$$nG = nD \dotplus nM$$

et que les sommandes à droite sont fermés dans Z, V, L, D et M respectivement. De plus, pour $G \in K_2$ le groupe nG est toujours ouvert, car D est discret et $nM = M$.

THÉORÈME 2. *H étant un sous-groupe pur fermé de $G \in K$, l'annulateur $A=(G/H)^*$ de H est un sous-groupe pur de G^*.*

Notons qu'en y remplaçant la classe K par celle de tous les groupes qui sont discrets ou compacts on obtient un théorème connu et facile à démontrer (cf [3]).

La démonstration du théorème 2 va mettre en évidence aussi sa réciproque, en vertu du théorème sur la réciprocité des annulateurs ([5], p. 257): A étant l'annulateur de H, celui de A est égal à H

THÉORÈME 3. *Pour qu'un sous-groupe fermé de $G \in K$ soit pur, il faut et il suffit qu'il jouisse de la propriété* (P).

La deuxième partie du théorème 3 et le théorème 2 résultent immédiatement du théorème 1 et de la proposition suivante qui constitue la première partie du théorème 3:

(A) *Si un sous-groupe fermé de $G \in K$ est pur, il a la propriété* (P).

Démonstration Au lieu de démontrer (A) directement pour tous les groupes $G \in K$ nous n'allons considérer que les groupes $G \in K_2$ et nous prouverons pour ceux-ci non seulement (A), mais encore la proposition réciproque: si le groupe H a la propriété (P), il est pur. De cette manière, la proposition (A) se trouvera démontrée complètement, vu le théorème 1.

Or, soit d'abord H un sous-groupe fermé pur d'un groupe $G \in K_2$. Le groupe nG étant ouvert dans G, quel que soit n entier, l'hypothèse (α) du lemme 1 se trouve satisfaite, donc le sous-groupe H a la propriété (P).

Soit à présent H un sous-groupe fermé de $G \in K_2$ ayant la propriété (P). En vertu de (4) tout élément de H peut être écrit sous la forme (x,ξ) où $x \in D$ et $\xi \in M$. Soit Ξ le sous-groupe de H composé d'éléments $(0,\xi)$. Comme Ξ est un sous-groupe fermé de M, c'est un groupe (abélien) de Lie, donc il est la somme directe d'un groupe vectoriel, d'un groupe toroïdal connexe de dimension finie et d'un groupe discret. Il en résulte que la composante C_0 de l'élément neutre de Ξ est ouverte dans Ξ. La marche du raisonnement exige que l'on démontre que pour tout n entier le groupe nH est fermé. Or, $\mathrm{pr}\,E$ désignant la projection de l'ensemble E sur D, il suffit de prouver que pour tout $x \in \mathrm{pr}\,H$ l'ensemble

$$\{(y,\beta)\colon\ (y,\beta)\in nH,\ y=x\}=\mathrm{pr}_x^{-1}nH$$

est fermé. Si $(x,a)\in H$ on a $\mathrm{pr}_x^{-1}H=\Xi+(x,a)$ et comme Ξ est une somme de composantes ouvertes, on n'a qu'à vérifier que pour chaque composante C de l'ensemble $\mathrm{pr}_x^{-1}H$ l'ensemble $C\cap nH$ est fermé dans C. Soit $(x,\beta)\in C\cap nH$ et soit, par exemple, pour $(y,\gamma)\in H$,

$$ny=x,\qquad n\gamma=\beta. \tag{5}$$

On a

$$C=C_0+(x,\beta). \tag{6}$$

Soit $P=\mathrm{pr}_y^{-1}H$; alors $P=\Xi+(y,\gamma)$. Comme le groupe C_0 est connexe, il est divisible. Donc, en vertu de (5) et (6) on a

$$nP\supset C_0+(x,\beta)=C.$$

Ainsi, il vient $C\subset nH$, ce qui montre que toute composante de $\mathrm{pr}_x^{-1}H$, pour un $x\in\mathrm{pr}\,H$ quelconque, est ou bien totalement contenue dans nH ou bien disjointe de nH. En tout cas, $C\cap nH$ est fermé, ce qu'il fallait démontrer.

Montrons à présent que $\mathrm{pr}\,H$ est un sous-groupe pur de D. En effet, dans le cas contraire $\mathrm{pr}\,H$ serait privé de la propriété (P) en vertu du lemme 2, il existerait donc un caractère χ de $\mathrm{pr}\,H$ d'ordre n qui ne serait pas prolongeable en un caractère de D du même ordre. Cependant le caractère $\chi(x,\xi)=\chi(x)$ $((x,\xi)\in H)$ du groupe H est prolongeable en un caractère χ_1 d'ordre n du groupe G tout entier, H ayant la propriété (P); alors le caractère $\chi_1(x,0)$ $(x\in D)$ d'ordre n est un prolongement de χ sur D et nous sommes conduits à une contradiction.

Maintenant il est facile d'achever la démonstration, en prouvant que le sous-groupe H est pur. Admettons le contraire. Alors il existe un élément $(x,a)\in H\cap nG$ qui n'est pas contenu dans nH. L'élément $x\in\mathrm{pr}\,H$ est divisible par n dans D, et comme $\mathrm{pr}\,H$ est pur dans D, x est divisible dans $\mathrm{pr}\,H$: $ny=x$, $y\in\mathrm{pr}\,H$. On a $n\,\mathrm{pr}_y^{-1}H\subset\mathrm{pr}_x^{-1}H$, donc l'ensemble $\mathrm{pr}_x^{-1}H$ contient au moins un élément de nH, (x,β) par exemple, tout en contenant un élément qui n'appartient pas à nH, à savoir (x,a). Le sous-groupe nH de H étant fermé, le groupe H/nH est localement compact; par conséquent, il existe un caractère χ de ce groupe qui sépare les éléments $(x,\beta)+nH=nH$ et $(x,a)+nH$: $1=\chi(nH)\neq\chi\big((x,a)+nH\big)$. Bien entendu, c'est un caractère dont l'ordre ne surpasse pas n (car il n'y en a pas d'autres). En superposant χ à l'homomorphisme naturel de H sur H/nH, on obtient un caractère de H qui n'est pas constant sur $\mathrm{pr}_x^{-1}H$ et dont l'ordre est au plus égal à n. Un tel caractère ne peut pas être prolongé en un caractère de G d'ordre fini, car l'ensemble $\mathrm{pr}_x^{-1}G\supset\mathrm{pr}_x^{-1}H$ est connexe, vu qu'il est congruent à M. Nous avons ainsi une contradiction avec l'hypothèse que H jouit de la propriété (P).

D'après un résultat de Łoś [4] chaque groupe abélien qui admet une topologie compacte représente un sommande direct de tout groupe qui le contient en qualité de sous-groupe pur. Pour cette raison les sous-groupes purs fermés d'un groupe compact G sont précisément ses sommandes directs (au point de vue algébrique), fermés comme sous-ensembles de G (¹). Ainsi, le théorème 2 donne lieu au corollaire suivant:

Corollaire. *H étant un sous-groupe d'un groupe discret G, la condition nécessaire et suffisante pour que $A=(G/H)^*$ soit un sommande direct fermé du groupe (compact) G^* est que H soit pur.*

Si H est pur sans être un sommande direct, A n'est pas un sommande direct au point de vue algébro-topologique, ce qui veut dire qu'on ne peut pas trouver dans ce cas un sommande complementaire qui soit fermé. Sinon on aurait une décomposition de G en deux sommandes directs, dont l'un serait H. I. Kaplansky ([2], p. 55) a remarqué que la composante de l'élément neutre, qui est toujours un sommande direct fermé, ne constitue un sommande topologique que dans le cas où le sous-groupe composé de tous les éléments d'ordre fini dans G est un sommande direct de G, ce qui n'a pas lieu en général. Ainsi, il peut arriver qu'un sommande direct fermé A d'un groupe abélien compact G soit dépourvu de sommandes complémentaires fermés. Le colloraire ci-dessus montre que cette circonstance peut aussi se présenter dans les groupes connexes, à savoir, si l'on prend pour G un groupe sans torsion ([5], p. 262) ayant des sous-groupes purs qui ne sont pas des sommandes directs, et pour H un de ces sous-groupes.

Théorème 4. *Les théorèmes 2 et 3 subsistent si l'on y remplace la classe K par la classe N composée de tous les groupes sommes directes d'un groupe localement compact et connexe et d'un groupe discret sans torsion.*

Pour la démonstration il suffit de tenir compte de ce que nG est ouvert et d'appliquer le lemme 1.

Remarquons que la classe N est close par rapport à la dualité; on le déduit facilement des théorèmes connus, tout $G\in N$ étant somme di-

(¹) Ce résultat se trouve formulé et démontré dans [3].

recte d'un groupe compact et connexe, d'un groupe vectoriel et d'un groupe discret sans torsion.

D'après Vilenkine ([6], p. 146), la classe K dans le théorème 2 peut être remplacée aussi par la classe P, composée de tous les groupes séparables, de dimension 0, primaires par rapport à un nombre premier p, ce qui veut dire qu'on a $\lim\limits_n p^n x = 0$ pour tout $x \in G$.

L'hypothèse que $G \in K$ ou $G \in N$ est essentielle pour les théorèmes 2 et 3. Voici un exemple qui le prouve:

Le groupe G sera composé de toutes les suites $(x_1, x_2, \ldots)$ de nombres rationnels mod 1, dont presque tous les termes sont égaux à l'un des nombres $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$. L'opération définie dans G est l'addition terme à terme mod 1. Définissons U_n comme l'ensemble des suites de G pour lesquelles $x_1 = \ldots = x_n = 0$ et $x_k = 0$ ou $\frac{1}{2}$, si $k > n$. En considérant U_n comme entourages de l'élément neutre on a introduit dans G une topologie localement compacte. Soit $H \subset G$ le sous-groupe composé des suites dont presque tous les termes sont égaux à 0 ou à $\frac{1}{2}$. Le sous-groupe H est alors fermé dans G. Il n'est pas pur puisque l'élément $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots) \in H$ est divisible par 2 dans G, mais non dans H. Cependant H a la propriété (P), réalisée dans le vide, H étant dépourvu de caractères continus d'ordre fini positif. M. Freudenthal s'en est justement servi en qualité d'exemple de groupe abélien localement compact, non divisible et n'admettant pas de caractères continus d'ordre fini ([1], surtout p. 173). La simple démonstration de cette dernière propriété se ramène à ce que H contient un sous-groupe divisible dense, à savoir le groupe somme directe $\sum_{i=1}^{\infty} R_i$, où R_i sont isomorphes au groupe additif des nombres rationnels mod 1; or, un groupe divisible est dépourvu de caractères d'ordre fini, ce qui est élémentaire et bien connu.

Ainsi, le théorème 3 ne subsiste plus pour G. C'est également le cas pour le théorème 2, puisque, en vertu du théorème 1, l'annulateur A de H est pur comme sous-groupe de G^* et que H est exactement l'annulateur de A.

M. S. Balcerzyk nous a communiqué un exemple de groupe localement compact G contenant un sous-groupe pur *fini*, privé de la propriété (P).

Il serait désirable de savoir si les théorèmes 2 et 3 subsistent si l'on y remplace la classe K par celle de tous les groupes sommes directes d'un groupe discret et d'un groupe engendré par un entourage compact de l'élément neutre. Cette classe est close par rapport à la dualité et elle contient les classes K et N. C'est peut-être la classe la plus large de groupes abéliens localement compacts qui se laisse déterminer d'une façon assez naturelle et pour laquelle nos résultats pourraient ensore être valables.

Travaux cités

[1] S. Hartman und C. Ryll-Nardzewski, *Zur Theorie der lokal-kompakten abelschen Gruppen*, Coll. Math. 4 (1956), p. 157-188.

[2] I. Kaplansky, *Infinite abelian groups*, University of Michigan Press 1954.

[3] H. Leptin, *Eine Kennzeichnung der reinen Untergruppen abelscher Gruppen*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 7 (1956), p. 169-171.

[4] J. Łoś, *Abelian groups that are direct summands of every abelian group which contains them as a pure subgroup*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4 (1956), p. 73.

[5] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Москва 1954.

[6] Н. Виленкин, *Прямые разложения топологических групп*, Мат. Сборн. 19 (1946), p. 85-149.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 12.12.1956