Der Mittelwertsatz für additive Intervallfunktionen

von

L. Mišík (Bratislava)

In dieser Arbeit wird die Gültigkeit des Mittelwertsatzes für diejenigen additiven Intervallfunktionen bewiesen, welche in jedem Punkte allgemeine Ableitung haben [1]. Außerdem beweist man hier folgenden Satz: *Die Ableitung jeder additiven Intervallfunktion ist eine Funktion, welche die Eigenschaft von Darboux hat* ([1], S. 272).

Es sei E_n ein n-dimensionaler euklidischer Raum und es sei $a_i < b_i$ für $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Unter einem Intervall verstehen wir hier die Menge aller Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ für welche die Ungleichungen $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gelten. Wir bezeichnen es durch

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle .$$

Den offenen Kern des Intervalls I bezeichnen wir durch $\operatorname{Int} I$ und die Begrenzung von I bezeichnen wir durch $\operatorname{Fr} I$. Eine Funktion φ ist eine additive Intervallfunktion auf dem Intervall I_0, wenn sie für jedes Intervall $I \subset I_0$ definiert ist und wenn für jede zwei Intervalle I_1 und I_2, für welche $I_1 \subset I_0$, $I_2 \subset I_0$, $\operatorname{Int} I_1 \cap \operatorname{Int} I_2 = \emptyset$ (1) gilt und für welche auch $I_1 \cup I_2$ ein Intervall ist, die Gleichung $\varphi(I_1 \cup I_2) = \varphi(I_1) + \varphi(I_2)$ gilt. Es sei $I \subset I_0$, und außerdem sei $r(I) = \inf(|I|/|S|)$ ([1], S. 106), wobei I ein Intervall, S ein Würfel in I ist und $|I|$ das n-dimensionale Lebesguesche Maß des Intervalls I in E_n bedeutet.

φ sei eine additive Intervallfunktion auf dem Intervall I_0 und $(x_1, \ldots, x_n) \in I_0$. $\bar{D}\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (bzw. $\underline{D}\varphi(x_1, \ldots, x_n)$) soll eine solche Zahl bedeuten, die folgende zwei Eigenschaften hat:

1. Es gibt eine derartige Folge $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Intervallen und eine solche Zahl $\alpha > 0$, daß $(x_1, \ldots, x_n) \in I_k \subset I_0$, $r(I_k) \geqslant \alpha$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$, $\lim_{k\to\infty} |I_k| = 0$ und

$$\bar{D}\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(I_k)}{|I_k|} \quad \left(\text{bzw. } \underline{D}\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(I_k)}{|I_k|}\right)$$

gilt.

2. Für jede Folge $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Intervallen, für welche für $k = 1, 2, 3, \ldots$ $(x_1, \ldots, x_n) \in I_k \subset I_0$ und $r(I_k) \geqslant \alpha > 0$ gilt und für welche $\lim_{k\to\infty} (\varphi(I_k)/|I_k|)$ existiert, gilt die Ungleichung

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(I_k)}{|I_k|} \leqslant \bar{D}\varphi(x_1, \ldots, x_n) \quad \left(\text{bzw. } \lim_{k\to\infty} \frac{\varphi(I_k)}{|I_k|} \geqslant \underline{D}\varphi(x_1, \ldots, x_n)\right).$$

Nimmt man in dieser Definition statt den Intervallen Würfel, dann bezeichnen wir diese Zahlen durch $\bar{D}_m\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (bzw. $\underline{D}_m\varphi(x_1, \ldots, x_n)$) Die Zahl $\bar{\varphi}'(x_1, \ldots, x_n)$ (bzw. $\underline{\varphi}'(x_1, \ldots, x_n)$) ist ähnlich definiert wie die Zahl $\bar{D}\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (bzw. $\underline{D}\varphi(x_1, \ldots, x_n)$), nur mit dem Unterschied, daß man die Bedingung $r(I_k) \geqslant \alpha > 0$ für $k = 1, 2, 3, \ldots$ ausläßt. Es ist klar, daß

$$\underline{\varphi}'(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \underline{D}\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \underline{D}_m\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \bar{D}_m\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \bar{D}\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \bar{\varphi}'(x_1, \ldots, x_n)$$

ist. Wenn in einem Punkte $(x_1, \ldots, x_n) \in I_0$

$$-\infty \neq \underline{D}\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \bar{D}\varphi(x_1, \ldots, x_n) \neq \infty$$

$$(\text{bzw. } -\infty \neq \underline{D}_m\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \bar{D}_m\varphi(x_1, \ldots, x_n) \neq \infty,$$

$$\text{bzw. } -\infty \neq \underline{\varphi}'(x_1, \ldots, x_n) = \bar{\varphi}'(x_1, \ldots, x_n) \neq \infty)$$

gilt, dann hat die Funktion φ im Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ die allgemeine Ableitung $D\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (bzw. die Ableitung $D_m\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, bzw. die Ableitung im strengen Sinne $\varphi'(x_1, \ldots, x_n)$), und diese ist $\underline{D}\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (bzw. $\underline{D}_m\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, bzw. $\underline{\varphi}'(x_1, \ldots, x_n)$).

Lemma 1. *φ sei eine additive Intervallfunktion auf dem Intervall I_0, es sei $-\infty < \underline{D}_m\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (bzw. $\bar{D}_m\varphi(x_1, \ldots, x_n) < 0$) für jedes $(x_1, \ldots, x_n) \in I_0$ und es sei $\underline{D}_m\varphi(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$ (bzw. $\bar{D}_m\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$) für jedes $(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Int} I_0$, dann gilt $\underline{D}_m\varphi(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$ (bzw. $\bar{D}_m\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0$) für jedes $(x_1, \ldots, x_n) \in \operatorname{Fr} I_0$.*

Beweis. Es sei I ein derartiger Würfel, daß $I \subset I_0$ und $\varphi(I) < 0$ ist. Wählen wir eine natürliche Zahl $s > 2$ so, daß $((s-2)/s)^n \geqslant \frac{1}{2}$ ist. Es sei $I = \langle c_1, \ldots, c_n; c_1 + l, \ldots, c_n + l \rangle$. Wir wollen folgende s^n Würfel

$$\left\langle c_1 + k_1 \frac{l}{s}, \ldots, c_n + k_n \frac{l}{s};\ c_1 + (k_1+1)\frac{l}{s}, \ldots, c_n + (k_n+1)\frac{l}{s} \right\rangle$$

betrachten, wobei $k_i = 0, 1, 2, \ldots, s-1$ für $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ist. In allen jenen Würfeln, in welchen $1 \leqslant k_i \leqslant s-2$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt, ist der Wert der Funktion φ sicher nicht negativ. Die Anzahl dieser Würfel beträgt

(1) $\emptyset$ ist die Bezeichnung der leeren Menge.

$(s-2)^n$. Unter den $s^n-(s-2)^n$ restlichen Würfeln existiert wenigstens ein Würfel $I'\subset I$ mit der Eigenschaft

$$\varphi(I') \leqslant \frac{\varphi(I)}{s^n-(s-2)^n}.$$

Daher gilt für den Würfel I folgendes: es existiert ein Würfel $I'\subset I$ mit der Seite kleiner als $l/2$ und mit der Eigenschaft

$$\frac{\varphi(I')}{|I'|} \leqslant \frac{\varphi(I)}{l^n}\cdot\frac{s^n}{s^n-(s-2)^n} \leqslant 2\,\frac{\varphi(I)}{|I|}.$$

Es sei $(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)}) \in \operatorname{Fr} I_0$ und $\underline{D}_m\varphi(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})<0$. Dann muß es einen Würfel I_1 mit $(x_1^{(0)},\dots,x_n^{(0)})\in I_1$ und $\varphi(I_1)<0$ geben. Aus der vorigen Betrachtung geht hervor, daß es eine solche Folge $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ von Würfeln gibt, daß $I_{k+1}\subset I_k$,

$$\frac{\varphi(I_{k+1})}{|I_{k+1}|}\leqslant 2\,\frac{\varphi(I_k)}{|I_k|}$$

und $l_{k+1}<l_k/2$ für $k=1,2,3,\dots$ gilt; l_k bedeutet dabei die Seitenlänge von I_k. Es sei $(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)\in\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$. Dann gilt

$$\underline{D}_m\varphi(\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)\leqslant \lim_{k\to\infty}\frac{\varphi(I_k)}{|I_k|}=-\infty,$$

was unmöglich ist.

Der Beweis des Lemmas für die Zahl $\overline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)$ ist ähnlich.

LEMMA 2. *φ sei eine additive Intervallfunktion auf dem Intervall I_0, es sei $-\infty<\underline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)\leqslant\overline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)<\infty$ für jedes $(x_1,\dots,x_n)\in I_0$ und es sei entweder $\underline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)>0$ oder $\overline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)<0$ für jedes $(x_1,\dots,x_n)\in\operatorname{Int}I_0$. Dann gilt entweder $\underline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)>0$ oder $\overline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)<0$ überall in $\operatorname{Int}I_0$.*

Beweis. Falls das Lemma nicht gilt, dann gibt es wenigstens zwei derartige Punkte $(\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_n)$ und $(\bar{d}_1,\dots,\bar{d}_n)\in\operatorname{Int}I_0$, daß $\underline{D}_m\varphi(\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_n)>0$ und $\overline{D}_m\varphi(\bar{d}_1,\dots,\bar{d}_n)<0$ ist. Betrachten wir die Punkte $(\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_i,\bar{d}_{i+1},\dots,\bar{d}_n)$ für $i=0,1,2,\dots,n$. Auf Grund der Voraussetzungen gibt es offensichtlich ein derartiges i, für welches $\underline{D}_m\varphi(\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_{i+1},\bar{d}_{i+2},\dots,\bar{d}_n)>0$ und $\overline{D}_m\varphi(\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_i,\bar{d}_{i+1},\dots,\bar{d}_n)<0$ gilt (²). Also gibt es sogar zwei derartige Punkte $(c_1,\dots,c_{i-1},c_i,c_{i+1},\dots,c_n)$ und $(c_1,\dots,c_{i-1},d_i,c_{i+1},\dots,c_n)$ aus $\operatorname{Int}I_0$, daß $\underline{D}_m\varphi(c_1,\dots,c_{i-1},c_i,c_{i+1},\dots,c_n)>0$, $\overline{D}_m\varphi(c_1,\dots,c_{i-1},d_i,c_{i+1},\dots,c_n)<0$ ist.

(²) Für den Fall $i=0$, nehmen wir statt des Punktes $(\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_i,\bar{d}_{i+1},\dots,\bar{d}_n)$ den Punkt $(\bar{d}_1,\dots,\bar{d}_n)$.

Es sei $c_i<d_i$ und $\varepsilon>0$. Für $a>0$, betrachten wir die Würfel

$$K_a=\Big\langle c_1-\frac{a}{2},\dots,c_{i-1}-\frac{a}{2},c_i,c_{i+1}-\frac{a}{2},\dots,c_n-\frac{a}{2};\; c_1+\frac{a}{2},\dots,c_{i-1}+\frac{a}{2},c_i+a,c_{i+1}+\frac{a}{2},\dots,c_n+\frac{a}{2}\Big\rangle$$

$$\Big(\text{bzw. } K'_a=\Big\langle c_1-\frac{a}{2},\dots,c_{i-1}-\frac{a}{2},d_i-a,c_{i+1}-\frac{a}{2},\dots,c_n-\frac{a}{2};\; c_1+\frac{a}{2},\dots,c_{i-1}+\frac{a}{2},d_i,c_{i+1}+\frac{a}{2},\dots,c_n+\frac{a}{2}\Big\rangle\Big),$$

welche im I_0 enthalten sind und für welche $\underline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)>0$ (bzw. $\overline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)<0$) für jedes $(x_1,\dots,x_n)\in\operatorname{Int}K_a$ (bzw. $(x_1,\dots,x_n)\in\operatorname{Int}K'_\beta$) gilt. Wenn es keinen solchen Würfel K_a (bzw. K'_a) gibt, dann wählen wir

$$(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_n)=(c_1,\dots,c_{i-1},c_i,c_{i+1},\dots,c_n)$$

$$\big(\text{bzw. } (\tilde{d}_1,\dots,\tilde{d}_n)=(c_1,\dots,c_{i-1},d_i,c_{i+1},\dots,c_n)\big).$$

Gibt es solche Würfel, dann ist ihre Vereinigung auch ein derartiger Würfel K_{a_0} (bzw. $K'_{a'_0}$). Also gilt $\underline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)>0$ (bzw. $\overline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)<0$) für jedes $(x_1,\dots,x_n)\in\operatorname{Int}K_{a_0}$ (bzw. $(x_1,\dots,x_n)\in\operatorname{Int}K'_{a'_0}$). Wenn $K_{a_0}\cap\operatorname{Fr}I_0\neq\emptyset$ (bzw. $K'_{a'_0}\cap\operatorname{Fr}I_0\neq\emptyset$) ist, dann gibt es in K_{a_0} (bzw. $K'_{a'_0}$) einen Punkt $(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_n)$ (bzw. $\tilde{d}_1,\dots,\tilde{d}_n$) mit $\underline{D}_m\varphi(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_n)>0$ (bzw. mit $\overline{D}_m\varphi(\tilde{d}_1,\dots,\tilde{d}_n)<0$), welcher ein Häufungspunkt der Menge aller Punkte $(x_1,\dots,x_n)$ mit $\overline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)<0$ (bzw. $\underline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)>0$) ist. Wenn $K_{a_0}\cap\operatorname{Fr}I_0\neq\emptyset$ (bzw. $K'_{a'_0}\cap\operatorname{Fr}I_0\neq\emptyset$) ist, dann wiederholen wir diese Betrachtung für den Punkt $(c_1,\dots,c_{i-1},c_i+a_0,c_{i+1},\dots,c_n)$ (bzw. $c_1,\dots,c_{i-1},d_i-a'_0,c_{i+1},\dots,c_n$). Jetzt ist es klar, daß man durch Wiederholung dieser Methode einen derartigen Punkt $(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_n)\in\operatorname{Int}I_0$ (bzw. $(\tilde{d}_1,\dots,\tilde{d}_n)\in\operatorname{Int}I_0$) mit $\underline{D}_m\varphi(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_n)>0$ (bzw. $\overline{D}_m\varphi(\tilde{d}_1,\dots,\tilde{d}_n)<0$) bekommen muß, welcher ein Häufungspunkt der Menge aller Punkte $(x_1,\dots,x_n)$ mit der Eigenschaft $\overline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)<0$ (bzw. $\underline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)>0$) ist. Aus $\underline{D}_m\varphi(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_n)>0$ (bzw. $\overline{D}_m\varphi(\tilde{d}_1,\dots,\tilde{d}_n)<0$) folgt, daß es einen solchen Würfel $K_1\subset\operatorname{Int}I_0$ (bzw. $K'_1\subset\operatorname{Int}I_0$) mit $(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_n)\in\operatorname{Int}K_1$ (bzw. $(\tilde{d}_1,\dots,\tilde{d}_n)\in\operatorname{Int}K'_1$) gibt, so daß für jeden Würfel $K\subset K_1$ (bzw. $K\subset K'_1$) mit $(\tilde{c}_1,\dots,\tilde{c}_n)\in K$ (bzw. $(\tilde{d}_1,\dots,\tilde{d}_n)\in K$) die Ungleichung $\varphi(K)>0$ (bzw. $\varphi(K)<0$) gilt. Man kann diesen Würfel so wählen, daß seine Seite kleiner als ε ist. Im $\operatorname{Int}K_1$ (bzw. $\operatorname{Int}K'_1$) müssen solche Punkte $(x_1,\dots,x_n)$ existieren für welche $\overline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)<0$ (bzw. $\underline{D}_m\varphi(x_1,\dots,x_n)>0$) ist.

Im Falle $c_i>d_i$ werden wir ähnlich vorgehen.

Aus diesen Betrachtungen folgt, daß man durch vollständige Induktion eine solche Folge $\{(c_1^{(i)},\dots,c_n^{(i)})\}_{i=1}^{\infty}$ von Punkten aus $\operatorname{Int}I_0$

und eine solche Folge $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ von Würfeln bekommt, für welche für $i=1,2,3,\ldots$ gilt:

1. $\underline{D}_m\varphi(c_1^{(2i-1)},\ldots,c_n^{(2i-1)})>0$ und $\overline{D}_m\varphi(c_1^{(2i)},\ldots,c_n^{(2i)})<0$;
2. $(c_1^{(i+1)},\ldots,c_n^{(i+1)})\in K_{i+1}\subset \operatorname{Int} K_i\subset \operatorname{Int} I_0$;
3. die Seite von K_i ist kleiner als $1/i$;
4. $\varphi(K_{2i-1})>0$ und $\varphi(K_{2i})<0$.

Es sei jetzt $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\in\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i$. Dann ist offensichtlich, daß $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\in\operatorname{Int} I_0$,

$$\underline{D}_m\varphi(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\leqslant\underline{\lim}_{i\to\infty}\frac{\varphi(K_{2i})}{|K_{2i}|}\leqslant 0\qquad\text{und}\qquad \overline{D}_m\varphi(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)\geqslant\overline{\lim}_{i\to\infty}\frac{\varphi(K_{2i-1})}{|K_{2i-1}|}\geqslant 0$$

ist. Aber das ist ein Widerspruch und damit ist das Lemma bewiesen.

Wir sagen, daß die Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ in der Menge M die Eigenschaft von Darboux in starkem Sinne hat, wenn für jede zwei Punkte $(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$ und $(x_1^{(2)},\ldots,x_n^{(2)})$ aus M und für jede Zahl c mit der Eigenschaft

$$[f(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})-c][f(x_1^{(2)},\ldots,x_n^{(2)})-c]<0$$

ein derartiger Punkt $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\operatorname{Int} M$ existiert, für welchen $f(\xi_1,\ldots,\xi_n)=c$ ist.

Satz 1. *φ sei eine derartige additive Intervallfunktion auf dem Intervall I_0, welche in jedem Punkt aus I_0 die Ableitung hat. Dann hat die Funktion $D_m\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ auf dem Intervall I_0 die Eigenschaft von Darboux in starkem Sinne.*

Beweis. Es sei $D_m\varphi(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})<c$ und $D_m\varphi(x_1^{(2)},\ldots,x_n^{(2)})>c$, wobei $(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$ und $(x_1^{(2)},\ldots,x_n^{(2)})$ aus I_0 sind. Wir betrachten die Funktion $\psi(I)=\varphi(I)-c|I|$ für jedes Intervall I, welches in I_0 enthalten ist. Diese Funktion ist eine additive Intervallfunktion auf dem Intervall I_0, für welche $D_m\psi(x_1,\ldots,x_n)=D_m\varphi(x_1,\ldots,x_n)-c$ für jedes $(x_1,\ldots,x_n)\in I_0$ gilt. Aus dem Lemma 1 und aus $D_m\psi(x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})<0$ und $D_m\psi(x_1^{(2)},\ldots,x_n^{(2)})>0$ folgt, daß es zwei Punkte $(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$ und $(\bar{\bar{x}}_1,\ldots,\bar{\bar{x}}_n)$ aus $\operatorname{Int} I_0$ mit $D_m\psi(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)<0$ und $D_m\psi(\bar{\bar{x}}_1,\ldots,\bar{\bar{x}}_n)>0$ geben muß. Aber aus dem Lemma 2 folgt dann die Existenz eines solchen Punktes $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\operatorname{Int} I_0$, daß $D_m\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0$ ist. Daraus folgt $D_m\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=c$. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus diesem Satz folgt, daß auch die allgemeine Ableitung $D\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ (bzw. die Ableitung in strengem Sinne $\varphi'(x_1,\ldots,x_n)$) der additiven Intervallfunktion φ auf dem Intervall I_0 die Eigenschaft von Darboux in starkem Sinne hat.

Satz 2. *φ sei eine additive Intervallfunktion auf dem Intervall I_0, und es sei $\varphi(I_0)=0$. Wenn die Funktion φ die allgemeine Ableitung in jedem Punkte des Intervalls I_0 hat, dann gibt es wenigstens einen Punkt $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\operatorname{Int} I_0$ für welchen $D\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0$ gilt.*

Beweis. Zuerst zeigen wir, daß nicht für jeden Punkt $(x_1,\ldots,x_n)\in\operatorname{Int} I_0$ $D\varphi(x_1,\ldots,x_n)>0$ sein kann. Wir nehmen an, es sei $D\varphi(x_1,\ldots,x_n)>0$ für jedes $(x_1,\ldots,x_n)\in\operatorname{Int} I_0$. Es sei $I_0=\langle a_1,\ldots,a_n;\ b_1,\ldots,b_n\rangle$, dann ist

$$\varphi\left(\left\langle a_1+\frac{b_1-a_1}{3},\ldots,a_n+\frac{b_n-a_n}{3};\ a_1+2\frac{b_1-a_1}{3},\ldots,a_n+2\frac{b_n-a_n}{3}\right\rangle\right)>0\,.$$

Also muß wenigstens ein Intervall $I_1=\langle c_1,\ldots,c_n;\ d_1,\ldots,d_n\rangle\subset I_0$ existieren für welches $\varphi(I_1)<0$. Wir betrachten alle Intervalle

$$\left\langle c_1+k_1\frac{d_1-c_1}{s},\ldots,c_n+k_n\frac{d_n-c_n}{s};\ c_1+(k_1+1)\frac{d_1-c_1}{s},\ldots,c_n+(k_n+1)\frac{d_n-c_n}{s}\right\rangle,$$

wobei $0\leqslant k\leqslant s-1$ für $i=1,2,3,\ldots$ und s eine natürliche Zahl mit der Eigenschaft $\big((s-2)/s\big)^n\geqslant\frac{1}{2}$ ist. Durch eine ähnliche Überlegung wie im Beweise des Lemma 1 beweisen wir die Existenz eines solchen Intervalls $I_2\subset I_1$, für welches $r(I_2)=r(I_1)$ und

$$\frac{\varphi(I_2)}{|I_2|}\leqslant 2\frac{\varphi(I_1)}{|I_1|}$$

ist. Analog wie wir im Beweise des Lemma 1 die Existenz eines Punktes $(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})\in I_0$ mit $\underline{D}_m\varphi(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})=-\infty$ bewiesen haben, beweisen wir jetzt die Existenz eines Punktes $(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})\in I_0$ mit der Eigenschaft $D\varphi(x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})=-\infty$. Das bedeutet aber einen Widerspruch zu der Existenzannahme der allgemeinen Ableitung der Funktion φ in jedem Punkt des Intervalls I_0.

Aus ähnlichen Gründen kann auch nicht $D\varphi(x_1,\ldots,x_n)<0$ für jedes $(x_1,\ldots,x_n)\in\operatorname{Int} I_0$ sein.

Aus Satz 1 folgt die Existenz wenigstens eines Punktes $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\operatorname{Int} I_0$ mit $D\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)=0$. Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Satz 3. *φ sei eine additive Intervallfunktion auf dem Intervall I_0. Wenn für jedes $(x_1,\ldots,x_n)\in I_0$ $D\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ (bzw. $\varphi'(x_1,\ldots,x_n)$) existiert, dann existiert für jedes Intervall $I\subset I_0$ ein Punkt $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\operatorname{Int} I$ für welchen $\varphi(I)=D\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)|I|$ (bzw. $\varphi(I)=\varphi'(\xi_1,\ldots,\xi_n)|I|$) ist.*

Beweis. Man braucht nur den Satz 2 auf die Funktion

$$\psi(\tilde{I})=\varphi(\tilde{I})-\frac{\varphi(I)}{|I|}|\tilde{I}|$$

und auf das Intervall I anzuwenden.

Satz 4. *Es seien φ und ψ zwei additive Intervallfunktionen auf dem Intervall I_0. Es bedeute $D\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ (bzw. $\varphi'(x_1,\ldots,x_n)$) die allgemeine Ableitung von φ (bzw. die Ableitung in strengem Sinne von φ) und $D\psi(x_1,\ldots,x_n)$ (bzw. $\psi'(x_1,\ldots,x_n)$) bedeute die allgemeine Ableitung von ψ (bzw. die Ableitung in strengem Sinne von ψ) welche in jedem Punkt von I_0 existieren. Es sei $D\psi(x_1,\ldots,x_n)\neq 0$ (bzw. $\psi'(x_1,\ldots,x_n)\neq 0$) für jedes $(x_1,\ldots,x_n)\in I_0$. Dann gibt es zu jedem Intervall $I\subset I_0$ wenigstens einen Punkt $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in \operatorname{Int} I$ für welchen*

$$\frac{\varphi(I)}{\psi(I)}=\frac{D\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)}{D\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)}\quad\left(\text{bzw. } \frac{\varphi(I)}{\psi(I)}=\frac{\varphi'(\xi_1,\ldots,\xi_n)}{\psi'(\xi_1,\ldots,\xi_n)}\right)$$

gilt.

Beweis. Betrachten wir die additive Intervallfunktion $\theta(\tilde{I})=\varphi(I)\psi(\tilde{I})-\varphi(\tilde{I})\psi(I)$ auf dem Intervall I, wobei $\tilde{I}$ ein Intervall ist, welches in I enthalten ist. Es ist leicht zu beweisen, daß $\psi(I)\neq 0$ ist. Nach Satz 3 gibt es einen Punkt $(\xi_1,\ldots,\xi_n)\in\operatorname{Int} I$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}0=\varphi(I)\psi(I)-\varphi(I)\psi(I)=\theta(I)&=D\theta(\xi_1,\ldots,\xi_n)|I|\\ &=[\varphi(I)D\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)-\psi(I)D\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)]|I|.\end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich die Gleichenheit

$$\frac{\varphi(I)}{\psi(I)}=\frac{D\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)}{D\psi(\xi_1,\ldots,\xi_n)}.$$

Ähnlich beweist man die Behauptung für die Ableitung in strengem Sinne.

Zitate

[1] S. Saks, *Theory of the integral*, New York 1937.

Reçu par la Rédaction le 4.12.1956

Les sous-groupes purs et leurs duals

par

S. Hartman (Wrocław) et **A. Hulanicki** (Wrocław)

G étant un groupe abélien localement compact G^* désignera le groupe *dual*, c'est-à-dire le groupe localement compact composé de tous les caractères continus χ de G. Si H est un sous-groupe fermé de G, on a $(G/H)^*=A\subset G^*$, où A (l'annulateur de H) se compose de tous les χ qui prennent la valeur 1 sur H.

Un sous-groupe H de G s'appelle *pur* si l'on a

$$nH=H\cap nG \tag{1}$$

pour tout n entier.

Le caractère χ d'un groupe G est d'ordre fini n si $\chi^n\equiv 1$ et si $\chi^m\not\equiv 1$ pour $m<n$. Nous dirons que le sous-groupe fermé H de G a la *propriété* (P) si tout caractère continu de H d'ordre fini se laisse prolonger sur le groupe G tout entier de façon qu'il y devienne un caractère continu du même ordre. Désormais le mot „caractère" désignera un caractère continu.

Théorème 1. *Pour que A soit pur, il faut et il suffit que H ait la propriété* (P).

Admettons que H jouisse de la propriété (P) et que l'équation

$$\chi^n=\chi_0\quad(\chi_0\in A) \tag{2}$$

ait une solution dans G^*. Si χ en est une, on a $\chi^n=1$ partout sur H. Prolongeons le caractère $\bar{\chi}$, considéré sur H, en un caractère χ_1 de G sans élever son ordre. Il vient

$$(\chi\chi_1)^n=\chi_0$$

et, comme pour les éléments de H on a $\chi\chi_1=\chi\bar{\chi}=1$, l'équation (2) se trouve satisfaite par un élément de A, ce qui prouve que le sous-groupe A est pur.

Réciproquement, soit A un sous-groupe pur de G^* et χ_0 un caractère de H d'ordre n. Nous le prolongeons d'abord d'une façon arbitraire en un caractère du groupe G tout entier, ce qui est toujours possible ([5], p. 258). Désignons le caractère ainsi obtenu encore par χ_0. L'équation

$$\chi^n=\chi_0^n$$