Sur l'unicohérence, les homéomorphies locales et les continus irréductibles

par

A. Lelek (Wrocław)

§ 1. Introduction. Soient X et Y deux espaces métriques compacts et f une fonction dont la variable x parcourt X et dont Y est l'ensemble des valeurs. Appelons f *homéomorphie locale au sens large* lorsqu'il existe, pour tout point $x \in X$, un entourage (ensemble ouvert contenant ce point) U_x tel que la fonction partielle $f|U_x$ est une homéomorphie. Lorsqu'il en existe, pour tout $x \in X$, dont les images $f(U_x)$ sont en outre ouverts (donc des entourages ouverts de $f(x)$ dans Y), la fonction f est dite (voir [2], p. 35) *homéomorphie locale* tout court. Appelons enfin la fonction f *recouvrement* de Y par X (voir le livre [11] de Pontriagin, p. 352, définition 45 [1]), lorsqu'il existe, pour tout point $y \in Y$, un entourage V_y tel que l'ensemble $f^{-1}(V_y)$, c'est-à-dire celui des x pour lesquels $f(x) \in V_y$, est somme d'une famille d'ensembles ouverts disjoints,

$$f^{-1}(V_y) = \sum_i U_i,$$

sur lesquels les fonctions partielles $f|U$ sont des homéomorphies et $f(U_i) = V_y$.

Les fonctions de ces trois classes sont donc continues par définition.

Toute homéomorphie locale en est trivialement une au sens large, mais pas réciproquement, même lorsque X et Y sont compacts. Par exemple, la fonction $f(x) = e^{ix}$ transforme le segment $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ en circonférence par l'homéomorphie locale au sens large, sans qu'elle soit une homéomorphie locale; en effet, aucun ensemble ouvert dans une circonférence n'est l'image homéomorphe d'un ensemble qui est ouvert dans le segment et en contient le bout $x = 0$.

Le même exemple montre qu'une homéomorphie locale au sens large peut augmenter l'*ordre* d'un point, à savoir transformer le bout (donc point d'ordre 1) d'un segment en un point de circonférence (donc point d'ordre 2); mais il sera démontré qu'elle ne peut le diminuer (voir § 3, théorème 2).

[1] Dans [9] et [11], c'est l'espace X qui est dit *recouvrement de l'espace* Y.

La relation entre l'homéomorphie locale tout court et celle au sens large sera précisée par le théorème 1 (voir § 3) caractérisant les homéomorphies locales comme des fonctions qui sont à la fois homéomorphies au sens large et *transformations intérieures* (dites aussi *ouvertes*), c'est-à-dire continues et transformant les ensembles ouverts en ensembles ouverts.

Tout recouvrement est trivialement une homéomorphie locale, mais pas réciproquement, pourvu que X ne soit pas compact. Par exemple, la projection orthogonale f de X composé de points (x,y), où $0=x\leqslant y<2$ et $1=x<y\leqslant 3$, sur le segment Y (aux bouts $y=0$ et $y=3$) de l'axe des ordonnées est une homéomorphie locale sans être un recouvrement.

Il résulte toutefois d'un théorème d'Eilenberg (voir [2], p. 37) que pour les X métriques compacts les deux notions coïncident. Comme il ne sera pas question dans la suite que des continus, l'usage ne sera fait que de l'une de ces notions, à savoir de l'homéomorphie locale, dont la définition est plus simple.

Un continu X est dit *unicohérent*, lorsque A et B étant deux continus tels que $X=A+B$, la partie commune $A\cdot B$ est un continu. Cette propriété topologique importante (qui est celle des sphères par exemple) est, pour les continus localement connexes (images continues du segment rectiligne), un invariant des transformations intérieures (voir [8], p. 333, 3°, et 336, 3), donc à plus forte raison des homéomorphies locales. Eilenberg a posé en 1935 (voir [3]) le problème, s'il en est de même de la non-unicohérence, à savoir: un continu localement connexe X n'étant pas unicohérent et f étant une homéomorphie locale, est-ce que le continu $Y=f(X)$ n'est pas unicohérent?

Un exemple donné par Marty en 1937 (voir [9], p. 171) résout ce problème par la négative. La dimension de X et de Y y dépasse 1 (on y a $\dim X=\dim Y=2$). Cependant une étude plus détaillée de la question — et tel est le sujet principal du présent travail — montre que la solution est affirmative lorsque $\dim Y=1$ (voir § 3, corollaire) et même que l'on a alors un théorème bien plus général (voir § 3, théorème 3).

L'exemple de Marty, précisé et complété d'une démonstration, est le suivant:

Le continu localement connexe X se compose de sphère S et d'ellipsoïde E aux équations $x^2+y^2+z^2=1$ et $x^2+2(y^2+z^2)=1$ respectivement, dont la partie commune $S\cdot E$ se compose de deux pôles $(1,0,0)$ et $(-1,0,0)$. Ainsi *X n'est pas unicohérent*. Décomposons S et E en couples de points symétriques par rapport à l'origine (antipodes). Ces décompositions étant continues (voir [8], p. 47), les fonctions f_s et f_e qui transforment S et E en espaces (métrisés selon Hausdorff) Y_s et Y_e des couples de leurs antipodes respectivement sont des transformations intérieures (voir [8], p. 48). Elles coïncident aux pôles des deux surfaces et les transforment en un élément commun unique de Y_s et Y_e. Il en résulte facilement que la réunion f des deux fonctions est une transformation intérieure de X en $Y=Y_s+Y_e$ et que, chacun des espaces Y_s et Y_e étant homéomorphe au plan projectif (voir [8], p. 46), qui est unicohérent (voir [8], p. 333), l'espace *Y est unicohérent* (voir [1], p. 197). Enfin, la transformation intérieure *f est une homéomorphie locale*, car elle l'est au sens large; en effet, tout entourage U_x d'un point arbitraire $x\in X$ qui ne contient que des points distants de x de moins que $\frac{1}{2}$ est dépourvu de points antipodes et se trouve en conséquence transformé en $f(U_x)$ par homéomorphie.

Le théorème annoncé pour les Y de dimension 1 n'exige de f que l'hypothèse plus faible, à savoir que f soit une homéomorphie au sens large, et comporte même une thèse plus forte, à savoir que f est alors une homéomorphie (²) (de sorte que X et Y ne peuvent être unicohérents que simultanément). Aussi l'hypothèse de connexité locale de X se montre superflue et celle de Y revient à ce que Y soit une dendrite (voir [8], p. 338).

C'est le § 3 qui sera consacré aux propriétés en question des homéomorphies locales au sens large. Il sera précédé du § 2 qui contient deux théorèmes généraux intervenant dans la suite en qualité de lemmes. Le reste du travail (§ 4 et § 5) est consacré l'analyse des hypothèses à l'aide des exemples et des théorèmes, dont ceux sur les continus irréductibles me semblent apporter quelque contribution nouvelle à leur théorie.

Parmi les hypothèses sur Y, ce n'est que celle de connexité locale qui sera examinée. Il sera démontré (voir § 3) qu'elle est essentielle même lorsque f est une homéomorphie locale tout court.

§ 2. Lemmes. Convenons de désigner par $\mathrm{Fr}_B(A)$ et $\mathrm{Int}_B(A)$ la frontière relative et l'intérieur relatif de A dans B respectivement. On a donc par définition

$$\mathrm{Fr}_B(A)=\mathrm{Fr}(A)\cdot B=\bar{A}\cdot\overline{B-A}\cdot B\,,\qquad \mathrm{Int}_B(A)=\mathrm{Int}(A)\cdot B=B-\overline{B-A}\,.$$

LEMME 1. *$\mathrm{Fr}_B(A)\cdot C=0$ entraîne $\mathrm{Fr}_B(A\cdot C)\subset\mathrm{Fr}(C)$ pour tout $A\subset B$.*

En effet,

$$\begin{aligned}\mathrm{Fr}_B(A\cdot C)&=\overline{A\cdot C}\cdot\overline{B-A\cdot C}\cdot B\subset\bar{A}\cdot\bar{C}\cdot(\overline{B-A}+\overline{B-C})\cdot B\\ &=\bar{A}\cdot[C+\mathrm{Fr}(C)]\cdot\overline{B-A}\cdot B+\bar{A}\cdot\bar{C}\cdot\overline{B-C}\cdot B\subset\bar{A}\cdot C\cdot\overline{B-A}\cdot B+\mathrm{Fr}(C)\\ &=\mathrm{Fr}_B(A)\cdot C+\mathrm{Fr}(C)=\mathrm{Fr}(C)\,,\end{aligned}$$

le sommande $\mathrm{Fr}_B(A)\cdot C$ étant vide par hypothèse.

(²) La situation s'avère donc (lorsque $\dim Y=1$) analogue à celle d'un autre théorème d'Eilenberg (voir [2], p. 42, théorème III), d'après lequel X étant un continu connexe par arcs, toute homéomorphie locale qui transforme X en un continu Y dont le groupe fondamental disparaît, est une homéomorphie. Il me semble que cette analogie explique l'origine du problème posé dans [3] et témoigne en faveur de l'intuition de son auteur.

Lemme 2. *A et B étant des continus, si $A\cdot B$ n'est pas connexe, $\overline{\mathrm{Int}_{A+B}(A)}\cdot\overline{\mathrm{Int}_{A+B}(B)}$ ne l'est non plus.*

En effet, on a d'abord la formule générale suivante pour tout couple d'ensembles A et B fermés:

$$A+B=\mathrm{Int}_{A+B}(A)+\overline{\mathrm{Int}_{A+B}(B)}\,. \tag{1}$$

Elle résulte de l'identité

$$\mathrm{Int}_{A+B}(A)=(A+B)-\overline{(A+B)-A}=(A-\overline{B-A})+(B-\overline{B-A})\,,$$

car $A\subset(A-\overline{B-A})+\overline{B-A}$, d'où $A+B=A+(B-A)\subset(A-\overline{B-A})+(\overline{B-A})+(B-A)\subset\mathrm{Int}_{A+B}(A)+\overline{\mathrm{Int}_{A+B}(B)}$, le premier sommande contenant $A-\overline{B-A}$ en vertu de cette identité et le second contenant $\overline{B-A}$ en vertu de la même identité écrite pour B, puisque $B-\overline{A}\subset B-\overline{A-B}$ et $A=\overline{A}$ par hypothèse; enfin, l'inclusion inverse est triviale.

Pour abréger l'écriture, omettons à présent les indices de relativisation, ce qui revient à considérer $A+B$ comme l'espace (pour la légitimité de cette substitution, voir par exemple [7], p. 23). On a donc par hypothèse une décomposition

$$A\cdot B=M+N\,, \tag{2}$$

$$M=\overline{M}\neq 0\neq N=\overline{N}\,, \tag{3}$$

$$M\cdot N=0\,, \tag{4}$$

et comme $\overline{\mathrm{Int}(A)}\cdot\overline{\mathrm{Int}(B)}\subset A\cdot B$, il s'agit d'établir les inégalités

$$\overline{\mathrm{Int}(A)}\cdot\overline{\mathrm{Int}(B)}\cdot M\neq 0\neq\overline{\mathrm{Int}(A)}\cdot\overline{\mathrm{Int}(B)}\cdot N\,; \tag{5}$$

par raison de symétrie, on peut se borner à en établir la première.

On a (d'après l'identité déjà appliquée) $A-B\subset\mathrm{Int}(A)$, d'où $A=A\cdot B+(A-B)=M+N+\overline{\mathrm{Int}(A)}$ en vertu de (2), donc $M\cdot[N+\overline{\mathrm{Int}(A)}]\neq 0$ vu (3) et la connexité de A. Par conséquent

$$M\cdot\overline{\mathrm{Int}(A)}\neq 0 \tag{6}$$

d'après (4). Comme $M\subset A\cdot B\subset A+B$, on a, en vertu de (1), $M=M\cdot\overline{\mathrm{Int}(A)}+M\cdot\overline{\mathrm{Int}(B)}$, d'où, en vertu de (2), $B=A\cdot B+(B-A)=M\cdot\overline{\mathrm{Int}(A)}+M\cdot\overline{\mathrm{Int}(B)}+N+\overline{\mathrm{Int}(B)}$, puisque $B-A\subset\overline{B-A}\subset\overline{\mathrm{Int}(B)}\subset\overline{B}=B$. Vu (3), (6) et la connexité de B, on a donc $M\cdot\overline{\mathrm{Int}(A)}\cdot(N+\overline{\mathrm{Int}(B)})\neq 0$, d'où la première des inégalités (5) en vertu de (4).

§ 3. Homéomorphies locales au sens large. Commençons par un théorème d'équivalence:

Théorème 1. *Pour que la fonction f soit une homéomorphie locale, il suffit et il faut qu'elle le soit au sens large et, simultanément, qu'elle soit une transformation intérieure.*

Démonstration. Il le suffit, car f transforme les entourages ouverts U_x de tout $x\in X$ en sur-ensembles $f(U_x)$ de $f(x)\in Y$ par homéomorphie, en tant qu'une homéomorphie locale au sens large, et ces sur-ensembles sont des ensembles ouverts, donc des entourages ouverts de $f(x)$, la fonction f étant une transformation intérieure.

Réciproquement, il le faut, car toute homéomorphie locale f l'étant à plus forte raison au sens large, il reste à montrer, que $G\subset X$ étant un ensemble ouvert, $f(G)\subset Y$ l'est également. En effet, l'identité $G=\sum_{x\in G}G\cdot U_x$, où U_x est un entourage ouvert arbitraire de x, entraîne $f(G)=\sum_{x\in G}f(G\cdot U_x)$, où chaque sommande est ouvert, car $f|U_x$ est une homéomorphie.

Pour passer aux théorèmes suivants, rappelons la notion *d'ordre* d'un point (voir par exemple [8], p. 200). Un point $x\in X$ est dit *d'ordre au plus* $\mathfrak{m}$, en formule $\mathrm{ord}_x X\leqslant\mathfrak{m}$, lorsque tout entourage U_x de x en contient un entourage U_x^* tel que $\mathrm{Fr}(U_x^*)$ se compose d'au plus $\mathfrak{m}$ points. Lorsque $\mathfrak{m}$ n'est pas limité, tout en restant fini, x est dit d'ordre ω, ce que l'on écrit $\mathrm{ord}_x X=\omega$. En interposant donc ω entre les cardinaux finis et infinis (dans leur ordre naturel de croissance), la relation $\leqslant$ se trouve définie entre les ordres de point quelconques.

Théorème 2. *Si X est compact et f est une homéomorphie locale au sens large, on a $\mathrm{ord}_x X\leqslant\mathrm{ord}_{f(x)}f(X)$.*

Démonstration. Soit $x\in G\subset X$, où G est un ensemble ouvert. Il existe par hypothèse un entourage ouvert U_x de x tel que la fonction partielle $f|U_x$ est une homéomorphie. Considérons un entourage ouvert U_x^* de x, tel que

$$\overline{U_x^*}\subset G\cdot U_x\,. \tag{7}$$

On a donc $\mathrm{Fr}(U_x^*)\subset U_x$ et $x\in X-\mathrm{Fr}(U_x^*)$, d'où

$$f(x)\in f(X)-f[\mathrm{Fr}(U_x^*)]=H\,. \tag{8}$$

L'ensemble $f[\mathrm{Fr}(U_x^*)]$ étant compact par suite de la compacité de X et de la continuité de f, l'ensemble H est un entourage ouvert du point $y=f(x)$ dans l'espace $Y=f(X)$.

Soit V_y un entourage ouvert de y, tel que $\overline{V_y}\subset H$ et que $\mathrm{Fr}(V_y)$ se compose d'au plus $\mathrm{ord}_{f(x)}f(X)$ points. L'ensemble $V_y\cdot f(U_x^*)$, contenu dans $f(U_x)$ en vertu de (7), étant ouvert dans $f(U_x)$ et $g=f|U_x$ étant une homéomorphie, l'ensemble

$$W_x=g^{-1}[V_y\cdot f(U_x^*)] \tag{9}$$

est ouvert dans U_x, donc dans X (puisque U_x est ouvert dans X) et

$y \in V_y$ entraîne $x = g^{-1}(y) \in W_x$. Ainsi $W_x \subset U_x^*$, d'où $\overline{W}_x \subset \overline{U}_x^* \subset U_x$ en vertu de (7) et par conséquent

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{Fr}_{U_x}(W_x) = \overline{W}_x \cdot \overline{U_x - W_x} \cdot U_x = \overline{W}_x \cdot \overline{X - W_x} = \operatorname{Fr}(W_x).$$

On montre de même que $\operatorname{Fr}_{U_x}(U_x^*) = \operatorname{Fr}(U_x^*)$, d'où $V_y \cdot \operatorname{Fr}_{g(U_x)}[g(U_x^*)] = V_y \cdot g[\operatorname{Fr}_{U_x}(U_x^*)] = V_y \cdot f[\operatorname{Fr}(U_x^*)] \subset H \cdot f[\operatorname{Fr}(U_x^*)] = 0$ en vertu de (8), puisque $V_y \subset H$ et $\operatorname{Fr}(U_x^*) \subset U_x$ d'après (7). En posant dans le lemme 1

$$A = g(U_x^*), \qquad B = g(U_x) \qquad \text{et} \qquad C = V_y,$$

il vient donc

$$\text{(11)} \qquad \operatorname{Fr}_{g(U_x)}[V_y \cdot g(U_x^*)] \subset \operatorname{Fr}(V_y).$$

Or, on a d'après (9), vu que g est une homéomorphie, $\operatorname{Fr}_{U_x}(W_x) = \operatorname{Fr}_{U_x}\{g^{-1}[V_y \cdot f(U_x^*)]\} = g^{-1}\{\operatorname{Fr}_{g(U_x)}[V_y \cdot f(U_x^*)]\}$, d'où

$$\operatorname{Fr}(W_x) \subset g^{-1}[\operatorname{Fr}(V_y)]$$

en vertu de (10), (11) et de l'égalité $f(U_x^*) = g(U_x^*)$, qui résulte de (7) et de la définition de g.

La frontière entre crochets étant composée, par hypothèse faite sur V_y, d'au plus $\operatorname{ord}_{f(x)} f(X)$ points et g^{-1} y étant biunivoque, la frontière $\operatorname{Fr}(W_x)$ ne peut contenir que tout au plus le même nombre de points. Comme $W_x \subset U_x^* \subset G$ d'après (8) et (9), la relation $\operatorname{ord}_x X \leqslant \operatorname{ord}_{f(x)} f(X)$ se trouve établie.

THÉORÈME 3. *Toute homéomorphie locale au sens large f qui transforme un continu X en une dendrite est une homéomorphie.*

Démonstration. Il suffit d'établir la biunivocité de f. Soient a et b deux points distincts dans X. D'après le théorème classique de Janiszewski et Mazurkiewicz (voir [8], p. 132), X contient un continu J *irréductible entre a et b* (c'est-à-dire contenant ces points sans qu'aucun de ses vrais sous-continus les contienne). Soit U_a l'entourage ouvert de a, tel que $f|U_a$ est une homéomorphie. Le vrai sur-ensemble $\overline{U}_a \cdot J$ de a est donc transformé par f en un vrai sur-ensemble de $f(a)$. Ainsi $f(J)$, qui est un continu (par suite de la continuité de f dans X), ne se réduit pas à un point. Comme sous-continu de la dendrite $f(X)$, il est une dendrite (voir [8], p. 226) et possède par conséquent au moins deux bouts (voir [8], p. 118 et 226) y_1 et y_2:

$$\text{(12)} \qquad y_1 \neq y_2, \qquad \operatorname{ord}_{y_1} f(J) = \operatorname{ord}_{y_2} f(J) = 1.$$

Il existe donc dans J deux points x_1 et x_2 tels que

$$\text{(13)} \qquad x_1 \neq x_2, \qquad f(x_1) = y_1, \qquad f(x_2) = y_2,$$

d'où selon (12) $\operatorname{ord}_{x_1} J = \operatorname{ord}_{x_2} J = 1$ en vertu du théorème 2 et par suite de la connexité de J qui y exclue la présence des points d'ordre 0. Il en

résulte donc (voir [8], p. 218) que l'on a soit $x_1 = a$ et $x_2 = b$, d'où, selon (13), $y_1 = f(a)$ et $y_2 = f(b)$, soit $x_1 = b$ et $x_2 = a$, d'où $y_1 = f(b)$ et $y_2 = f(a)$. On a donc en vertu de (12) $f(a) \neq f(b)$, c. q. f. d.

COROLLAIRE. *L'absence de l'unicohérence d'un continu X est un invariant de ses transformations par homéomorphie locale au sens large en continus localement connexes Y de dimension 1.*

L'exemple suivant montre que l'hypothèse de la connexité locale de Y est essentielle. Plus encore: sans elle, l'absence de l'unicohérence de X cesse d'être un invariant même des homéomorphies locales tout court.

Cet exemple repose sur certaines propriétés des continus irréductibles entre deux points. L'idée en consiste à transformer par une homéomor-

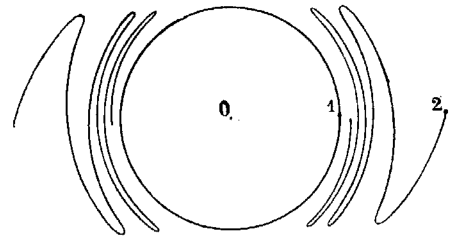

Fig. 1

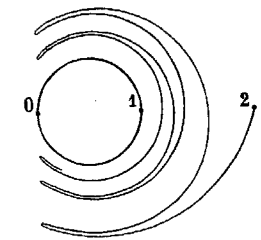

Fig. 2 .

phie locale f un continu irréductible X qui n'est pas unicohérent à cause de la présence dans lui d'une tranche d'adhésion (pour la définition voir plus loin § 4, p. 59) T_t avec $0 < t < 1$ non-unicohérente (voir fig. 1) en un continu irréductible Y (voir fig. 2) duquel $f(T_t)$ est une tranche terminale (c'est-à-dire avec $t = 0$), donc tranche de cohésion. L'irreductibilité de Y est due à ce que Y est fermeture d'une image homéomorphe du segment sans un bout $0 \leqslant t < 1$ (cas particulier du théorème 5, voir § 5) et l'unicohérence de Y résulte de la cohésion de toutes ses tranches (théorème 4, voir § 4).

Soient S la circonférence $x^2 + y^2 = 1$, C la courbe $y = \sin\big(\pi/(\varrho - 1)\big)$ où $x > 0$, $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $1 < \varrho \leqslant 2$, C^* la courbe symétrique à C par rapport à l'origine et $X = C + S + C^*$ (cf. [10], p. 22). Les ensembles $\overline{C}$ et $\overline{C^*}$ sont des continus et on a la décomposition $X = \overline{C} + \overline{C^*}$, où la partie commune $\overline{C} \cdot \overline{C^*}$ est composée de points $(0, -1)$ et $(0, 1)$. *Ainsi X n'est pas unicohérent.* Décomposons X en couples de points symétriques par rapport à l'origine (antipodes). Cette décomposition étant continue (voir [8], p. 47), la fonction f qui transforme l'espace X en celui Y de ses antipodes (métrisé selon Hausdorff) est une transformation intérieure (voir [8],

p. 48). Elle transforme S en circonférence S' de rayon deux fois plus petit et $C+C^*$ en une courbe C' homéomorphe à C: on a

$$Y=f(S)+f(C+C^*)=S'+C'=\overline{C}'$$

et les entourages circulaires suffisamment petits de tout point $x \in X$ se trouvent transformés par homéomorphie. La transformation intérieure f est donc en même temps une homéomorphie locale au sens large. Par conséquent, en vertu du théorème 1, *f est une homéomorphie locale* tout court. Enfin, en vertu du théorème 5 (voir p. 60), le continu Y est irréductible entre le point $f((2,0))$ et tout point de S', en tant que fermeture de l'image homéomorphe C' du composant $0 \leqslant t < 1$ du point 0 dans le continu $0 \leqslant t \leqslant 1$. Chacune des tranches non-extrêmes de Y étant donc de cohésion (comme composée d'un point), *Y est unicohérent* en vertu du théorème 4 (voir p. 59).

§ 4. Unicohérence et irréductibilité. Rappelons d'abord quelques définitions et notations de la théorie des continus irréductibles entre deux points (empruntées surtout à [7], p. 159-161 et [8], p. 135-160) et qui auront à intervenir dans la suite. Soit I le segment $0 \leqslant t \leqslant 1$. Étant donné un continu X irréductible entre a et b (qui est d'ailleurs désigné par 1 dans [8]), $\{D_t\}$, où $D_0=0$, $D_1=X$ et $t \in I$, désigne la famille strictement ascendante (avec t) des domaines fermés connexes contenus dans X qui (sauf D_0) contiennent a. L'indice t parcourt alors un sous-ensemble fermé F de I.

Si $F=I$, le continu X est dit *de type λ*.

Symétriquement, $\{E_t\}$, où $E_t=\overline{X-D_t}$, désigne la famille strictement descendante (avec t croissant) des domaines fermés connexes contenus dans X qui (sauf $E_1=0$) contiennent le point b.

Désignons par P le noyau parfait de F et par P^* l'ensemble des points de P qui ne sont pas des bouts d'intervalles contigus à lui. Considérons une fonction φ transformant P *en* I, continue et monotone dans P, et croissante, donc biunivoque, dans P^*. Quel que soit $t \in I$, il existe dans l'ensemble compact $\varphi^{-1}(t) \subset P$ un u_t le plus petit et un v_t le plus grand (désignés respectivement par $\gamma(t)$ et $\Gamma(t)$ dans [7], p. 160); si $P=0$, c'est-à-dire F au plus dénombrable, posons $u_0=0$ et $v_1=1$. On appelle alors *tranches* du continu irréductible X les ensembles

$$T_t=\prod_{\tau>v_t} D_\tau \cdot \prod_{\tau<u_t} E_\tau \tag{14}$$

où $0 \leqslant t \leqslant 1$, et on a la décomposition $X=\sum_{t \in I} T_t$ (se réduisant à $X=T_0$ lorsque $P=0$) qui est la plus fine parmi toutes les décompositions semi-continues linéaires de X en continus (voir [8], p. 139, 3) et qui caractérise topologiquement la structure de X par celle des T_t. Suivant les définitions de φ, u_t et v_t, deux cas peuvent se présenter pour tout $a \in F$: ou bien on a $a \in P^*$ et il existe alors un $t \in I$ tel que $\varphi^{-1}(t)$ se réduit au point a, de sorte que $u_t=a=v_t$, ou bien on a $a' \leqslant a \leqslant a''$, où $a' \in P$ et $a'' \in P$ sont des bouts d'un intervalle contigu à P, et il existe alors un $t \in I$ tel que $\varphi(a')=\varphi(a'')=t$, d'où $u_t \leqslant a' \leqslant a \leqslant a'' \leqslant v_t$. Un $t \in I$ pour lequel $u_t \leqslant a \leqslant v_t$ existe donc dans les deux cas. Il en résulte que $D_{u_t} \subset D_a \subset D_{v_t} \subset D_\tau$ pour tout $\tau > v_t$ et $E_{v_t} \subset E_a \subset E_{u_t} \subset E_\tau$ pour tout $\tau < u_t$ (voir [8], p. 136); on en conclut donc en vertu de (14) que

$$\textit{pour tout } a \in F, \textit{ il existe un } t \in I \textit{ tel que } D_a \cdot E_a \subset T_t. \tag{15}$$

Comme $\sum_{\tau<t} T_\tau \subset D_{u_t}$ et $\sum_{\tau>t} T_\tau \subset E_{v_t}$ pour tout $t \in I$ (voir [5], p. 252, lemme 1) et vu que $D_{u_t} \subset D_a$ et $E_{v_t} \subset E_a$, il vient, en passant aux fermetures et en appliquant (15),

$$\overline{\sum_{\tau<t} T_\tau} \cdot \overline{\sum_{\tau>t} T_\tau} \subset T_t \tag{16}$$

pour tout $t \in I$ (voir [5], p. 260). Les tranches pour lesquelles cette inclusion devient égalité, donc en particulier les tranches T_0 et T_1, sont dites *de cohésion*; les autres, dont l'ensemble est d'ailleurs au plus dénombrable, s'appellent *d'adhésion* (voir [4], p. 284).

Théorème 4. *Si toutes les tranches d'adhésion d'un continu X irréductible entre deux points a et b sont unicohérentes, X est unicohérent.*

Démonstration. Supposons par contre que $X=A+B$, où A et B sont des continus, et que $A \cdot B$ ne soit pas connexe. Il s'agit d'établir l'existence dans X d'une tranche d'adhésion T_t qui n'est pas unicohérente.

Par suite de l'irréductibilité de X, ni A, ni B ne contient à la fois les deux points a et b, car on aurait alors ou bien $A=X$, ou bien $B=X$, d'où ou bien $A \cdot B=B$, ou bien $A \cdot B=A$, et $A \cdot B$ serait connexe. Admettons donc que $a \in A-B$ et $b \in B-A$. Comme $\mathrm{Fr}(A) \subset \overline{X-A}=\overline{B-A} \subset B$, on a $a \in \mathrm{Int}(A)$ et, de même, $b \in \mathrm{Int}(B)$. Ces ensembles ouverts étant connexes (voir [8], p. 134, 5), leurs fermetures sont des domaines fermés connexes, donc de la forme (voir [8], p. 136)

$$D_a=\overline{\mathrm{Int}(A)} \quad \text{et} \quad E_\beta=\overline{\mathrm{Int}(B)}.$$

Il en résulte en vertu du lemme 2 que *$D_a \cdot E_\beta$ n'est pas connexe* et, en vertu de l'identité (1), que $X=D_a+E_\beta$, d'où $\beta \leqslant a$ (voir [8], p. 137, (2)). L'inégalité $\beta < a$ étant impossible lorsque $D_a \cdot E_\beta$ n'est pas connexe (voir [8], p. 138, 8), on a $a=\beta$, d'où $D_a \cdot E_\beta=D_a \cdot E_a$. Vu (15), il existe don un $t \in I$ pour lequel

$$D_a \cdot E_a \subset T_t. \tag{17}$$

Cette tranche n'est pas de cohésion, car l'égalité $T_t=\overline{\sum_{\tau<t} T_\tau}\cdot\overline{\sum_{\tau>t} T_\tau}$ entraînerait d'après (16) l'égalité impossible $T_t=D_a\cdot E_a$, son membre gauche étant connexe (voir [8], p. 139, 2) et son membre droit — comme il vient d'être démontré — ne l'étant pas. Ainsi T_t est une tranche d'adhésion.

Comme $X=D_a+E_a$, on a la décomposition $T_t=T_t\cdot D_a+T_t\cdot E_a$, où $(T_t\cdot D_a)\cdot(T_t\cdot E_a)=T_t\cdot D_a\cdot E_a=D_a\cdot E_a$ en vertu de (17). La partie commune des deux sommandes de T_t n'est donc pas connexe. Reste à montrer que ces sommandes sont des continus. En effet, $D_a\subset\prod_{\tau>v_t} D_\tau$ (voir [8], p. 136, 4), donc $T_t\cdot D_a=\prod_{\tau<u_t} D_a\cdot E_\tau$ d'après (14), où $D_a\cdot E_\tau$ sont des continus pour $\tau<u_t\leqslant a$ (voir [8], p. 138, 8) et leur famille est descendante (avec τ croissant vers u_t). Pour des raisons symétriques, $T_t\cdot E_a$ est un continu. Ainsi T_t n'est pas unicohérent, c. q. f. d.

Il est à remarquer que la réciproque du théorème 4 n'est pas vraie: le continu irréductible entre les points $(-1,0)$ et $(2,0)$ formé par le segment qui en unit le premier à l'origine et par le continu $\overline{C}'$ (voir fig. 2) est unicohérent bien qu'il contienne une tranche d'adhésion qui n'est pas unicohérente, à savoir la circonférence $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$.

§ 5. Homéomorphie des composants. On appelle *composant* d'un point a dans X l'ensemble $C_a(X)$ de tous les $x\in X$ qui se laissent unir à a par de vrais sous-continus de X. Lorsque X est un continu, on a $\overline{C_a(X)}=X$ pour tout $a\in X$; l'inégalité $X-C_a(X)\neq 0$ équivaut alors à l'irréductibilité de X entre a et tout point de cette différence; enfin, l'égalité $\overline{X-C_a(X)}=X$ équivaut à l'indécomposabilité de X (impossibilité de représenter X comme somme de deux vrais sous-continus).

THÉORÈME 5. *X étant un continu irréductible entre a et b et le composant $C=C_a(X)$ étant ouvert (dans X), soit φ une homéomorphie définie dans ce composant et le transformant en sous-ensemble d'un espace compact Y. Alors la fermeture $\overline{\varphi(C)}$ (dans Y) est un continu irréductible entre $\varphi(a)$ et tout point $q\in\overline{\varphi(C)}-\varphi(C)\neq 0$.*

Démonstration. L'hypothèse sur X entraîne que $X-C=\overline{C}-C\neq 0$; celles sur φ et Y entraînent donc que $\overline{\varphi(C)}-\varphi(C)\neq 0$. Soit

$$Q\subset\overline{\varphi(C)} \tag{18}$$

un continu unissant $\varphi(a)$ à q. Il suffit de montrer que $\varphi(C)\subset Q$.

Gardons les notations du § 4. L'idée de la démonstration est à montrer d'abord que

$$D_t\subset\varphi^{-1}[Q\cdot\varphi(C)]\quad\text{pour}\quad 0\leqslant t<1\,. \tag{19}$$

On a évidemment $D_t\subset C$ pour $0\leqslant t<1$ (sinon X serait réductible à son vrai sous-continu D_t), c'est-à-dire $C=D_t+(C-D_t)$, d'où $\varphi(C)=\varphi(D_t)+\varphi(C-D_t)$. Il en résulte en vertu de la conséquence $Q=Q\cdot\varphi(C)+Q\cdot[\overline{\varphi(C)}-\varphi(C)]$ de (18) que

$$Q=Q\cdot\varphi(D_t)+Q\cdot\{\varphi(C-D_t)+[\overline{\varphi(C)}-\varphi(C)]\}\,, \tag{20}$$

où $\varphi(a)\in Q\cdot\varphi(D_t)$ et $q\in Q\cdot[\overline{\varphi(C)}-\varphi(C)]$. Comme $\varphi(D_t)\cdot\varphi(C-D_t)=\varphi[D_t\cdot(C-D_t)]=0$ et $\varphi(D_t)\subset\varphi(C)$, la partie commune des deux sommandes de Q est égale d'après (20) à $Q\cdot\varphi(D_t)\cdot\{Q\cdot\varphi(C-D_t)+[Q-\varphi(C)]\}=Q\cdot\varphi(D_t)\cdot\varphi(C-D_t)=0$. En vertu de la connexité de Q, il en résulte donc que

$$Q\cdot\varphi(D_t)\cdot\overline{\varphi(C-D_t)+[\overline{\varphi(C)}-\varphi(C)]}\neq 0\,,$$

puisque le sommande $Q\cdot\varphi(D_t)$ est compact, car φ étant une homéomorphie et D_t étant par définition fermé dans $\overline{C}=X$, l'ensemble $\varphi(D_t)$ l'est dans $\overline{\varphi(C)}$, donc dans Y, et Q est un continu.

A plus forte raison

$$Q\cdot\varphi(D_t)\cdot\overline{\varphi(C-D_t)}\neq 0\,, \tag{21}$$

car $\overline{\varphi(D_t)}-\varphi(C)=\varphi(D_t)-\varphi(C)=0$ entraîne $\overline{\varphi(C)}-\overline{\varphi(C-D_t)}-\varphi(C)\subset\overline{\varphi(C)-\varphi(C-D_t)}-\varphi(C)=\overline{\varphi(D_t)}-\varphi(C)=0$, c'est-à-dire $\overline{\varphi(C)}-\varphi(C)\subset\overline{\varphi(C-D_t)}-\varphi(C)$, et l'inclusion inverse étant triviale, il vient

$$\overline{\varphi(C)}-\varphi(C)=\overline{\varphi(C-D_t)}-\varphi(C)\,. \tag{22}$$

De plus, φ étant une homéomorphie dans C, on a $\varphi(C)\cdot\overline{\varphi(C-D_t)}=\varphi(C\cdot\overline{C-D_t})$, car le membre gauche est la fermeture de l'ensemble $\varphi(C-D_t)$ dans $\varphi(C)$ et $C\cdot\overline{C-D_t}$ l'est de $C-D_t$ dans C. Comme $\varphi(D_t)\subset\varphi(C)$ et $D_t\cdot\overline{C-D_t}\subset D_t\cdot\overline{X-D_t}=\mathrm{Fr}(D_t)$, on a donc $\varphi(D_t)\cdot\overline{\varphi(C-D_t)}=\varphi(D_t)\cdot\varphi(C)\cdot\overline{\varphi(C-D_t)}=\varphi(D_t)\cdot\varphi(C\cdot\overline{C-D_t})=\varphi(D_t\cdot C\cdot\overline{C-D_t})=\varphi(D_t\cdot\overline{C-D_t})\subset\varphi[\mathrm{Fr}(D_t)]$, c'est-à-dire

$$\varphi(D_t)\cdot\overline{\varphi(C-D_t)}\subset\varphi[\mathrm{Fr}(D_t)]\,, \tag{23}$$

d'où en vertu de (21)

$$\varphi^{-1}[Q\cdot\varphi(C)]\cdot\mathrm{Fr}(D_t)\neq 0\,. \tag{24}$$

Considérons l'ensemble compact

$$P=\varphi^{-1}[Q\cdot\varphi(C)]\cdot D_t \tag{25}$$

et supposons qu'il ne soit connexe entre a et aucun point de $\mathrm{Fr}(D_t)$, c'est-à-dire qu'il y ait une décomposition de P

$$P=M+N,\qquad M=\overline{M},\qquad N=\overline{N},\qquad M\cdot N=0,\qquad a\in M\,,$$

$$P\cdot\mathrm{Fr}(D_t)\subset N\,, \tag{26}$$

d'où $N \neq 0$ en vertu de (24) et (25) On aurait donc $\varphi(P) = \varphi(M) + \varphi(N)$ et d'après (25) $\varphi(P) = \varphi(D_t) \cdot Q \cdot \varphi(C) = \varphi(D_t) \cdot Q$, puisque $D_t \subset C$. Par conséquent, l'égalité (20) deviendrait $Q = \varphi(P) + Q \cdot \{\varphi(C - D_t) + [\overline{\varphi(C)} - \varphi(C)]\} = \varphi(M) + \overline{\{\varphi(N) + Q \cdot \varphi(C - D_t) + Q \cdot [\overline{\varphi(C)} - \varphi(C)]\}}$, où $\varphi(a) \in \varphi(M)$ et $q \in Q \cdot [\overline{\varphi(C)} - \varphi(C)]$. Le premier sommande de cette décomposition de Q est fermé et il est disjoint de la fermeture du second; en effet, $M \subset P$ entraîne $\varphi(M) \subset Q \cdot \varphi(D_t)$ en vertu de (25), d'où en appliquant successivement (22), (23) et (26), il vient

$$\varphi(M) \cdot \overline{\{\varphi(N) + Q \cdot \varphi(C - D_t) + Q \cdot [\overline{\varphi(C)} - \varphi(C)]\}}$$
$$\subset \varphi(M) \cdot Q \cdot \varphi(D_t) \cdot [\varphi(N) + \overline{Q \cdot \varphi(C - D_t)}]$$
$$\subset \varphi(M) \cdot \{\varphi(N) + \varphi(P) \cdot \varphi[\mathrm{Fr}(D_t)]\} \subset \varphi(M) \cdot \varphi(N) = 0 .$$

Une telle décomposition de Q contredisant la connexité de ce continu, il est démontré que l'ensemble fermé P est connexe entre a et un point de $P \cdot \mathrm{Fr}(D_t)$, ou — ce qui revient au même — que P contient un sous-continu unissant ces points. Comme $P \subset D_t$ d'après (25) et comme D_t est un continu irréductible entre a et tout point de $\mathrm{Fr}(D_t)$ (voir [8], p. 135), ce sous-continu de P coïncide nécessairement avec D_t, d'où $D_t \subset P \subset \varphi^{-1}[Q \cdot \varphi(C)]$ en vertu de (25), ce qui achève la démonstration de (19).

C étant ouvert par l'hypothèse, $X - C$ est fermé, d'où $C = \sum_{0 \leqslant t < 1} D_t$ (voir [5], p. 237 et 238, Remarque). En vertu de (19), on a donc $C \subset \varphi^{-1}[Q \cdot \varphi(C)]$, d'où $\varphi(C) \subset Q \cdot \varphi(C)$, c'est-à-dire $\varphi(C) \subset Q$, c. q. f. d.

Il est à remarquer que dans le cas où X est de type λ, l'hypothese que le composan $C_a(X)$ soit un ensemble ouvert devient superflue parce qu'elle se trouve satisfaite dans tous les X de ce type. En effet, le complémentaire du composant en question coïncide alors avec la tranche terminale T_1 de X (voir [5], p. 262, (27), dernière formule) et toute tranche est un ensemble fermé par définition.

Par contre, la même hypothèse du théorème 5 est essentielle lorsque X n'est pas de type λ. Considérons, par exemple, le composant $C_a(X)$ du point $a = (\frac{1}{4}, 0)$, où $X = \mathcal{B}_0$ est le continu indécomposable connu (voir [6], p. 255, fig. 1) irréductible entre les points $a = (\frac{1}{4}, 0)$ et $b = (0, 0)$. Une image homéomorphe de ce composant étant dense dans une région R plane bornée (représentée *ibidem*, fig. 2; on y trouvera aussi la démonstration), sa fermeture n'est pas un continu irréductible entre aucun couple de points.

Il existe des exemples analogues aussi parmi des continus décomposables. Il suffit, en effet, d'ajouter à $\mathcal{B}_0$ le segment rectiligne L unissant les points $a' = (\frac{1}{4}, 0, 1)$ et $(\frac{1}{4}, 0, 0)$. Le continu $X' = L + \mathcal{B}_0$ est évidemment irréductible entre a' et b. En prolongeant l'homéomorphie définie dans $C_a(X)$ à $L + C_a(X)$, on obtient une image homéomorphe de $C_{a'}(X')$ dont la fermeture est un continu réductible entre tout couple de points (elle contient $\overline{R}$).

Le problème plus général suivant s'y rattache:

Est-ce que tout composant (de dimensions $n \geqslant 1$) d'un continu indécomposable quelconque est homéomorphe à un sous-ensemble dense d'une région euclidienne (de dimension $n+1$)?

Je dois au Professeur B. Knaster ce problème, la suggestion du lemme 2 et celle des théorèmes 4 et 5.

Travaux cités

[1] K. Borsuk, *Quelques théorèmes sur les ensembles unicohérents*, Fund. Math. 17 (1931), p. 171-209.

[2] S. Eilenberg, *Sur quelques propriétés des transformations localement homéomorphes*, Fund. Math. 24 (1934), p. 35-42.

[3] — *Problème 135*, Livre Écossais, Lwów 1935-1941 (non publié).

[4] B. Knaster, *Sur les ensembles connexes irréductibles entre deux points*, Fund. Math. 10 (1927), p. 276-297.

[5] C. Kuratowski, *Théorie des continus irréductibles entre deux points II*, Fund. Math. 10 (1927), p. 225-275.

[6] — *Sur un problème topologique concernant les systèmes „strictement transitifs"*, Fund. Math. 19 (1932), p. 252-256.

[7] — *Topologie I*, Warszawa 1952.

[8] — *Topologie II*, Warszawa 1952.

[9] F. Marty, *Quelques exemples simples relatifs à l'unicohérence de certaines variétés topologiques et de leurs recouvrements*, Bull. Sciences Math., II série, 61 (1937), p. 169-172.

[10] S. Nikodym, *Sur les coupures du plan faites par les ensembles connexes et les continus*, Fund. Math. 7 (1925), p.15-23.

[11] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, Москва 1954.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 26.10.1956