Sur l'accessibilité des points d'ensembles fermés dans les espaces euclidiens

par

J. Mioduszewski (Wrocław)

1. E étant un ensemble de points d'un espace topologique $\mathfrak{X}$, on appelle un point p de E *accessible* (de $\mathfrak{X}-E$), lorsqu'il existe un continu $K \subset \mathfrak{X}$ tel que (voir [1], p. 115) $K\cdot E=(p)$ et $K-E\neq 0$. En particulier, si $\mathfrak{X}$ est un continu localement connexe (c'est-à-dire image continue du segment de droite) et E est fermé, l'accessibilité de p entraîne (voir [1], p. 194, 7, 3°) l'existence d'un K qui est un *arc* (c'est-à-dire image biunivoque et bicontinue du segment de droite).

Soit $\mathcal{E}^n$ l'espace euclidien à n dimensions. W. Wolibner a énoncé l'hypothèse que toutes les composantes d'un ensemble fermé F situé dans $\mathcal{E}^2$ (et pas nécessairement borné) étant des segments rectilignes parallèles (et qui peuvent se réduire à des points), les bouts de toutes ces composantes (de même que toutes celles composées d'un point) sont accessibles (de $\mathcal{E}^2-F$). L'hypothèse est vraie.

Ce travail a pour but d'établir un théorème plus général, à savoir où l'ensemble fermé $F\subset\mathcal{E}^2$ ne satisfait qu'aux conditions:

(1) Les composantes de F sont des *dendrites*, c'est-à-dire des continus localement connexes sans courbes simples fermées, en particulier donc qui peuvent se réduire à des points.

(2) La connexité locale de ces dendrites est *uniforme*, c'est-à-dire qu'il existe pour tout $\varepsilon>0$ un $\eta>0$ tel que deux points p et q de F étant situés dans une même dendrite, $\varrho(p,q)<\eta$ entraîne l'existence d'un arc $\widehat{pq}\subset F$ de diamètre $\delta(\widehat{pq})<\varepsilon$.

La condition (2) est en particulier satisfaite lorsque F se réduit à une seule dendrite, la connexité locale d'un continu étant toujours uniforme (voir [1], p. 183, 4).

Le bout est entendu ici comme point d'*ordre* $r\leqslant 1$ (voir [1], p. 200); si une dendrite se réduit à un point, ce point est donc le bout.

Le théorème annoncé sera déduit de deux lemmes.

2. Lemme 1. *Si deux points a et b d'un disque* (¹) $G\subset\mathcal{E}^2$ *sont séparés dans sa fermeture $\overline{G}$ par une dendrite D, ils l'y sont aussi par un arc $L\subset D\cdot\overline{G}$ formant avec* $\mathrm{Fr}(G)$ *une courbe* θ (²).

Démonstration. D et $\mathrm{Fr}(G)$ étant des continus localement connexes, il en est de même du continu $D+\mathrm{Fr}(G)$, et comme ce continu coupe (³) $\mathcal{E}^2$ entre les points a et b (car D coupe $\overline{G}$ entre ces points par hypothèse), il existe une courbe simple fermée

$$C\subset D+\mathrm{Fr}(G) \tag{3}$$

qui coupe $\mathcal{E}^2$ entre eux (voir [1], p. 361, 5). Par conséquent l'ensemble $C\cdot G$ coupe G entre a et b. Comme $C\cdot G\subset C\cdot D$ (puisque (3) équivaut à $C=C\cdot D+C\cdot\mathrm{Fr}(G)$, d'où $C\cdot G=C\cdot D\cdot G+C\cdot\mathrm{Fr}(G)\cdot G=C\cdot D\cdot G$), l'ensemble $C\cdot D$ coupe G entre eux à plus forte raison. En vertu d'un théorème récent (voir [2], p. 307, théorème 1) l'ensemble $C\cdot D$, donc aussi $C\cdot D\cdot\overline{G}$, coupe la fermeture $\overline{G}$ de ce disque entre a et b, puisqu'il est compact et $\mathrm{Fr}(G)$ n'est coupé par aucun point. Une coupure de $\overline{G}$ entre les mêmes points est alors effectuée déjà par une composante de $C\cdot D\cdot\overline{G}$ (voir [1], p. 335, 1 et 336, 3). Cette composante ne peut pas se réduire à un point, car un point ne coupe pas $\overline{G}$. Elle ne peut être qu'un arc, soit A, en tant qu'un vrai sous-continu de la courbe simple fermée C. Reste à en désigner par L l'arc partiel qui est la fermeture de la composante M de $A\cdot G$ par laquelle les points a et b se trouvent séparés dans G (voir [1], p. 375, 2, en y substituant G à D, (a) et (b) à A et B et A à L; appliquer la prémisse „Évidemment, $\mathrm{Fr}(D)+M$ est une courbe θ", qui y est établie en ligne 9).

Lemme 2. *Le bout p d'une dendrite D, composante d'un ensemble fermé $F\subset\mathcal{E}^2$ assujetti aux conditions* (1) *et* (2), *étant couvert d'une suite $G_1, G_2, \ldots$ de disques qui réalisent son ordre $r\leqslant 1$ dans D, c'est-à-dire qui satisfont aux deux conditions*

$$(p)=\prod_{i=1}^{\infty}G_i \quad \textit{où} \quad G_1\supset G_2\supset\ldots, \tag{4}$$

$$\mathrm{Fr}(G_i)\cdot D \ \textit{ est vide ou se réduit à un point pour } i=1,2,\ldots, \tag{5}$$

il existe pour tout $i=1,2,\ldots$ un nombre $\eta_i>0$ tel que tout couple a,b de points de G_i-F situés à une distance de p inférieure à η_i peut être uni par un sous-continu de $\overline{G}_i-F$.

(¹) Pour la définition, voir [1], p. 358.

(²) Au sens de Kuratowski, voir [1], p. 249.

(³) Les notions de *séparation* et de *coupure* par des ensembles compacts coïncident dans les continus localement connexes (voir [1], p. 187, 8). Le passage de $\mathcal{S}_2$ à $\mathcal{E}^2$ est trivial.

Démonstration. Supposons par contre qu'il existe un $i=k$ tel que, pour tout $j=1,2,\ldots$, G_k-F contienne deux points a_j et b_j pour lesquels on ait

$$\varrho(a_j,p)<j^{-1}, \quad \varrho(b_j,p)<j^{-1} \tag{6}$$

et qui ne se laissent pas unir par aucun sous-continu de $\bar{G}_k-F$. Bref, supposons que F, donc aussi $F\cdot\bar{G}_k$, coupe $\bar{G}_k$ entre a_j et b_j pour $j=1,2,\ldots$ Une coupure de $\bar{G}_k$ entre a_j et b_j serait alors effectuée déjà par une composante de $F\cdot\bar{G}_k$ (voir [1], p. 335, 1 et 336, 3 et relativiser à $\bar{G}_k$), donc par un sous-continu de F, donc d'une composante de F, donc d'une dendrite. Ce sous-continu est donc lui-même une dendrite, soit D_j. En vertu du lemme 1, il existerait donc un arc $L_j\subset D_j\cdot\bar{G}_k$ qui coupe encore $\bar{G}_k$ entre a_j et b_j, et tel que $L_j+\mathrm{Fr}(G_k)$ est une courbe θ. Il en résulte en vertu de (6) que

$$\varrho(p,L_j)<j^{-1} \tag{7}$$

et que, p_j et q_j étant les bouts de L_j,

$$\mathrm{Fr}(G_k)\cdot L_j=(p_j)+(q_j). \tag{8}$$

On a

$$\varrho[p,\mathrm{Fr}(G_k)]-j_0^{-1}<\delta(L_j) \quad \text{pour tout} \quad j_0=1,2,\ldots \quad \text{et} \quad j>j_0. \tag{9}$$

En effet, il existe d'après (7) un point $x_j\in L_j$ tel que

$$\varrho(p,x_j)<j^{-1}<j_0^{-1}, \tag{10}$$

d'où, en appliquant (8),

$$\delta(L_j)\geqslant\varrho(x_j,p_j)\geqslant\varrho(p,p_j)-\varrho(x_j,p)$$
$$\geqslant\varrho[p,\mathrm{Fr}(G_k)]-\varrho(p,x_j)>\varrho[p,\mathrm{Fr}(G_k)]-j_0^{-1}.$$

Ce nombre est évidemment positif à partir d'un j_0. Il en résulte en vertu de (9) et (2) l'existence d'un $\eta>0$ tel que

$$\varrho(p_j,q_j)>\eta \quad \text{pour tout} \quad j>j_0. \tag{11}$$

En vertu de (8), les points $\lim\limits_{j\to\infty}p_j$ et $\lim\limits_{j\to\infty}q_j$ (j parcourant les indices des suites partielles convergentes des points p_j et q_j) appartiennent à $\mathrm{Fr}(G_k)\cdot\mathop{\mathrm{Ls}}\limits_{j\to\infty}L_j$ et, leur distance depassant $\eta>0$ en vertu de (11), il sont des points différents. Comme $p=\lim\limits_{j\to\infty}x_j$ d'après (10), on a aussi $p\in\mathop{\mathrm{Ls}}\limits_{j\to\infty}L_j$. En tant qu'un continu (puisque $p\in\mathop{\mathrm{Li}}\limits_{j\to\infty}L_j$, d'où $\mathop{\mathrm{Li}}\limits_{j\to\infty}L_j\neq0$), $\mathop{\mathrm{Ls}}\limits_{j\to\infty}L_j$ est donc contenu dans la composante D de F, car $p\in D$ par hypothèse. L'ensemble $\mathrm{Fr}(G_k)$ contiendrait ainsi au moins deux points différents, contrairement à (5).

THÉORÈME. *Si l'ensemble fermé $F\subset\mathcal{E}^2$ satisfait aux conditions* (1) *et* (2), *tout bout de chacune de ses composantes est accessible de $\mathcal{E}^2-F$.*

Démonstration. Conservons les notations des lemmes qui précèdent. Soit $\eta_1>\eta_2>\ldots$ et

$$a_0\in G_1-F, \quad a_1\in G_1-F,$$
$$\varrho(p,a_0)<\min(1,\eta_1), \quad \varrho(p,a_1)<\min(2^{-1},\eta_2),$$
$$a_0\in K_1, \quad a_1\in K_1,$$
$$K_1\subset\bar{G}_1-F,$$

K_1 étant un continu. Un tel continu existe en vertu du lemme 2.

Procédons par induction. Admettons que les points a_i et les continus K_i satisfont aux conditions

$$a_{i-1}\in K_i, \quad a_i\in K_i, \tag{12}$$
$$\varrho(p,a_i)<\min(2^{-1},\eta_{i+1}), \tag{13}$$
$$K_i\subset\bar{G}_i-F. \tag{14}$$

Soit alors

$$a_{i+1}\subset G_{i+1}-F, \quad \varrho(p,a_{i+1})<\min(2^{-i-1},\eta_{i+2}),$$
$$a_i\in K_{i+1}, \quad a_{i+1}\in K_{i+1},$$
$$K_{i+1}\subset\bar{G}_{i+1}-F,$$

K_{i+1} étant un continu qui existe en vertu du lemme 2.

La suite de points $\{a_i\}$ et celle des continus $\{K_i\}$ ainsi définies satisfont donc aux conditions (12)-(14) pour tout $i=1,2,\ldots$

L'ensemble $K=\sum\limits_{i=1}^{\infty}K_i+(p)$ est un continu, car $K_{i-1}\cdot K_i\neq0$ en vertu de (12) et $(p)=\mathop{\mathrm{Lim}}\limits_{i\to\infty}\bar{G}_i\supset\mathop{\mathrm{Ls}}\limits_{i\to\infty}K_i$ en vertu de (4) et (14). Enfin, $K-(p)\subset\sum\limits_{i=1}^{\infty}K_i\subset\bar{G}_1-F\subset\mathcal{E}^2-F$. L'accessibilité du bout p de D de l'ensemble $\mathcal{E}^2-F$ se trouve donc établie.

3. Remarques. Dans l'énoncé du théorème, l'ensemble F n'a pas été supposé borné. Mais aussi l'hypothèse que ses composantes soient bornées n'est pas essentielle. En effet, l'accessibilité d'un point $p\in F$ de $\mathcal{E}^2-F$ étant manifestement un invariant de l'homéomorphie, pour qu'un ensemble plan fermé satisfasse à la thèse du théorème, il faut et il suffit qu'une image F obtenue de lui par l'inversion d'un centre n'appartenant pas à lui satisfasse aux conditions (1) et (2). La démonstration est évidente.

Pour les F compacts, donc de diamètre fini, la condition (2) peut être remplacée également par celle de la similitude géométrique de toutes les composantes (à plus d'un point) de F, car elle implique, en effet, l'uniformité de la connexité locale.

Supposons, pour le montrer, que F contienne une suite infinie de couples $\{p_i, q_i\}$ tels que

$$\lim_{i\to\infty} \varrho(p_i, q_i) = 0\,, \tag{15}$$

$$\inf_{i\to\infty} \delta(\widehat{p_i q_i}) \geqslant \varepsilon \quad \text{pour un} \quad \varepsilon > 0\,. \tag{16}$$

Les arcs $L_i = \widehat{p_i q_i}$ ne sont donc pas semblables. Toute composante de F, en tant qu'une dendrite, contenant donc au plus un nombre fini des L_i, on peut admettre que ces arcs sont situés dans des composantes différentes de F, soit $L_i \subset D_i$ pour $i = 1, 2, \ldots$ Considérons une dendrite D quelconque, composante de F. Par suite de la similitude de toute composante (qui ne se réduit pas à un point) à D, cette dendrite contient une suite infinie d'arcs $L_i^* = \widehat{p_i^* q_i^*}$, semblables aux L_i. On a

$$\lim_{i\to\infty} \varrho(p_i^*, q_i^*) = 0\,, \tag{17}$$

car si la borne inférieure λ des $\varrho(p_i^*, q_i^*)$ pour $p_i^* \neq q_i^*$ était positive pour quelque suite partielle des p_i^*, q_i^*, le rapport $\varrho(p_i^*, q_i^*)/\varrho(p_i, q_i) \geqslant \lambda/\varrho(p_i, q_i)$, où $\lambda > 0$, tendrait à l'infini en vertu de (15) et il en serait de même à plus forte raison de celui des diamètres $\delta(L_i^*)/\delta(L_i) \leqslant \delta(L_i^*)/\varepsilon \leqslant \delta(D)/\varepsilon$ d'après (16). Or (17) entraîne $\lim_{i\to\infty} \delta(L_i^*) = 0$ par suite de l'uniformité de la connexité locale de D en tant que d'une dendrite et on a par raison de similitude $\delta(L_i)/\delta(L_i^*) = \delta(D_i)/\delta(D)$. Il en résulte que le diamètre $\delta(D_i)$ tend aussi à l'infini avec i. Le diamètre du sur-ensemble F des D_i ayant été supposé fini, on a ainsi une contradiction, ce qui prouve l'incompatibilité des formules (15) et (16), c'est-à-dire la condition (2).

Les conditions (1) et (2) sont, par contre, essentielles, comme le montrent les exemples suivants:

Ad (1). F compact se compose d'un segment rectiligne et d'une suite d'ellipses confocales dont les foyers sont les bouts de ce segment et dont le petit axe tend à zéro.

Ad (2). F compact se compose de l'une des moitiés de l'exemple précédent, symétriques par rapport au petit axe.

La dimension n de l'espace $\mathcal{E}^n$ contenant F est également essentielle. En effet, le théorème n'est pas vrai sur la droite (c'est-à-dire en remplaçant $\mathcal{E}^2$ par $\mathcal{E}^1$), comme le montre la partie commune de l'exemple

qui précède et de la droite contenant le grand axe des ellipses: le foyer n'est pas accessible.

Le théorème est cependant vrai dans tout $\mathcal{E}^n$ où $n > 2$, même sans hypothèses (1) et (2), pourvu que $\dim(F) < n-1$, ce qui est en particulier le cas de tous les F fermés dont les composantes sont des dendrites. Plus encore, on a le théorème suivant:

X étant un ensemble quelconque situé dans l'espace euclidien $\mathcal{E}^2$ où $n > 2$, l'inégalité $\dim(X) < n-1$ *entraîne l'accessibilité de tout point $x \in X$ de $\mathcal{E}^n - X$.*

En effet, l'ensemble $X-(x)$ de dimension au plus $n-2$ ne coupant pas l'espace $\mathcal{E}^n$ localement au point x en vertu d'un théorème de Mazurkiewicz (voir [1], p. 343, 1), l'ensemble $\mathcal{E}^n - X + (x)$ est localement connexe au point x. Il en résulte (voir [1], p. 194, 7) l'existence d'un arc simple $K \subset \mathcal{E}^n - X + (x)$ ayant le point x pour l'un des bouts.

Travaux cités

[1] C. Kuratowski, *Topologie II*, Warszawa-Wrocław 1950.

[2] B. Knaster et J. Mioduszewski, *Division des régions partielles par les frontières et des frontières par les points*, Fund. Math., ce volume, p. 306-313.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 13. 8. 1957