Division des régions partielles par les frontières et des frontières par les points

par

B. Knaster et J. Mioduszewski (Wrocław)

Soient: R une région, $\Phi = \mathrm{Fr}(R)$ sa frontière et H une région partielle de $\bar{R}$, c'est-à-dire la partie commune et connexe d'un ensemble ouvert quelconque G et de la fermeture de R:

$$H = G\cdot\bar{R}\,. \tag{1}$$

Envisageons trois propriétés suivantes:

I. Tout ensemble fermé F qui divise R entre deux points (¹) divise aussi $\bar{R}$ entre ces points.

II. La frontière Φ de R ne divise aucune région partielle H de $\bar{R}$.

III. Aucun point de Φ n'en divise la composante sur laquelle il est situé.

Toutes ces propriétés se présentent en particulier pour les régions planes R qui sont des disques, c'est-à-dire dont les frontières Φ sont des courbes simples fermées. Par ailleurs, ces propriétés semblent de prime abord n'avoir rien de commun entre elles. Nous allons cependant établir leur équivalence dans des conditions bien générales, montrer par des exemples que ces conditions sont essentielles et noter des problèmes ouverts. Une des équivalences en question (théorème 1 qui suit) a été appliqué par l'un de nous (voir [3], p. 315) dans la démonstration d'un théorème sur l'accessibilité de points (solution d'un problème de Wolibner); sinon, il y aurait fallu établir cette équivalence spécialement pour les disques.

L'exemple fort simple d'une région R dépourvue des propriétés I-III à la fois est la partie du plan comprise entre deux circonférences tangentes intérieurement.

(¹) Expressions synonymes: sépare deux points dans R, est un séparateur de R (voir [2], p. 96).

Théorème 1. *I équivaut à II.*

Démonstration. On a l'implication I→II. En effet, $H\subset\bar{R}$ et $R = \bar{R}-\Phi$ entraînent

$$H-\Phi = H\cdot\bar{R}-\Phi = H\cdot(\bar{R}-\Phi) = H\cdot R = R-(\bar{R}-H)\,. \tag{2}$$

H divisé par Φ est donc la même chose que R divisé par l'ensemble fermé $F = \bar{R}-H$, qui ne divise cependant pas $\bar{R}$, puisque

$$\bar{R}-F = \bar{R}-(\bar{R}-H) = \bar{R}\cdot H = H$$

et H est connexe par définition.

On a l'implication II→I. En effet, $R = \bar{R}-\Phi$ entraîne

$$R-F = (\bar{R}-\Phi)-F = (\bar{R}-F)-\Phi\,.$$

R divisé par F sans que $\bar{R}$ le soit est donc la même chose que la région partielle $H = \bar{R}-F$ divisée par la frontière Φ.

Théorème 2. *II équivaut à III pour toute région R plane dont la frontière Φ est localement connexe.*

Démonstration. On a l'implication II→III. En effet, supposons qu'il existe une composante de Φ divisée par un de ses points p. Par suite de la connexité locale de Φ, il existe donc un arc $L\subset\Phi$ qui est divisé par p en deux arcs L_1 et L_2, situé chacun dans une autre composante de $\Phi-(p)$. Entourons p d'un disque D que L divise en deux disques D_1 et D_2. On peut évidemment admettre que L forme avec $\mathrm{Fr}(D)$ une courbe θ, c'est-à-dire que $L\subset\bar{D}$ et que les bouts de L seuls se trouvent sur $\mathrm{Fr}(D)$. La frontière Φ de R étant localement connexe, le continu $\bar{R}$ l'est également (voir [2], p. 170, 4). Soit H la composante de p dans $\bar{R}\cdot D$. En tant que composante d'un ensemble ouvert dans un continu localement connexe, H est une région partielle de $\bar{R}$.

Reste à montrer que Φ divise H, à savoir que

$$R\cdot D_1\cdot H\neq 0\neq R\cdot D_2\cdot H\,. \tag{3}$$

La connexité locale de $\bar{R}$ entraîne l'existence d'un disque Δ tel que $p\in\Delta$, $\bar{\Delta}\subset D$, que p se laisse lier à tout point q de $\bar{R}\cdot\Delta$ par un arc $\widehat{pq}\subset\bar{R}\cdot D$, d'où

$$\bar{R}\cdot\Delta\subset H\,, \tag{4}$$

et que L divise Δ en deux disques

$$\Delta_1\subset D_1 \quad \text{et} \quad \Delta_2\subset D_2\,, \tag{5}$$

en formant avec $\mathrm{Fr}(\Delta)$ une courbe θ. L'ensemble $L\cdot\mathrm{Fr}(\Delta)$ se compose donc de deux points situés sur L_1 et L_2 respectivement (plus précisément sur $L_1 \cdot \mathrm{Fr}(\Delta_1) \cdot \mathrm{Fr}(\Delta_2)$ et sur $L_2 \cdot \mathrm{Fr}(\Delta_1) \cdot \mathrm{Fr}(\Delta_2)$ respectivement), donc dans deux composantes différentes de $\Phi - (p)$. On a $R \cdot (\Delta_1 + \Delta_2) \neq 0$, car $p \in \bar{\Delta} = \overline{\Delta_1 + \Delta_2}$ et R est ouvert. On peut donc admettre l'inégalité $R \cdot \Delta_1 \neq 0$ (voir fig. 1).

Mais alors l'égalité $R \cdot \Delta_2 = 0$ est impossible, car elle aurait aussitôt pour conséquence que la frontière Φ de R coupe (²) le plan entre deux points quelconques $q_1 \in R \cdot \Delta_1$ et $q_2 \in \Delta_2 - \bar{R}$. Par suite de la connexité locale de Φ, il existerait donc (voir [2], p. 361, 5) une courbe simple fermée $\Gamma \subset \Phi$ coupant le plan entre ces points. Le complément de Γ au plan étant composé de deux disques, soit V celui qui contient R. Aucun des deux points de $L \cdot \mathrm{Fr}(\Delta)$ ne peut se trouver hors de $\bar{R}$, donc de $\bar{V}$, car $L \subset \Phi \subset \bar{R}$ par définition. Les deux se trouvent donc dans $\bar{V} = V + \Gamma$. Cependant, si les deux étaient sur Γ, ils s'y laisseraient unir par un arc ne passant pas par p, ce qui est impossible, puisqu'on a $\Gamma \subset \Phi$ et les deux points en question appartiennent à des composantes différentes de $\Phi - (p)$. Par conséquent, au moins un point de $L \cdot \mathrm{Fr}(\Delta)$, donc de $L \cdot \mathrm{Fr}(\Delta_2)$ se trouve dans V, d'où $\mathrm{Fr}(\Delta_2) \cdot V \neq 0$. On a en même temps $V - \Delta_2 \neq 0$, car $\Delta_2 \cdot \Delta_1 = 0$ et $R \cdot \Delta_1 \neq 0$ entraînent $R - \Delta_2 \neq 0$ et V contient R par définition. Il en résulte (³) que, réciproquement, $\mathrm{Fr}(V) \cdot \Delta_2 = \Gamma \cdot \Delta_2 \neq 0$, d'où $\Phi \cdot \Delta_2 \neq 0$, puisque $\Gamma \subset \Phi$. L'ensemble Δ_2 étant ouvert, on a donc finalement quand même $R \cdot \Delta_2 \neq 0$.

Il est ainsi démontré que $R \cdot \Delta_1 \neq 0 \neq R \cdot \Delta_2$. On a en outre $R \cdot \Delta_1 = R \cdot \Delta_1 \cdot H$ et $R \cdot \Delta_2 = R \cdot \Delta_2 \cdot H$, puisque $\Delta_1 + \Delta_2 \subset \Delta$, d'où $R \cdot (\Delta_1 + \Delta_2) \subset H$ en vertu de (4). Par conséquent, $R \cdot \Delta_1 \cdot H \neq 0 \neq R \cdot \Delta_2 \cdot H$, ce qui entraîne en vertu de (5) les inégalités (3) qu'il s'agissait d'établir.

On a l'implication III$\to$II. En effet, H étant ouvert dans $\bar{R}$, l'ensemble $\bar{R} - H$ y est fermé, donc fermé tout court:

$$\bar{R} - H = \overline{\bar{R} - H}\,. \tag{6}$$

$H \subset \bar{R}$ entraîne $H = \bar{R} - (\bar{R} - H) = \bar{R} - \overline{\bar{R} - H} \subset \overline{R - (\bar{R} - H)} = \overline{R \cdot H}$, d'où $H \subset H \cdot \overline{R \cdot H}$. L'inclusion inverse étant triviale, on a l'égalité $H = \dot{H} \cdot \overline{R \cdot H}$, qui peut être écrite dans la forme

$$H = H \cdot \overline{H - \Phi}\,, \tag{7}$$

puisque $H \cdot R = H - \Phi$ d'après (2).

(²) Les notions de coupure et de division (séparation) coïncident pour les ensembles fermés dans les continus localement connexes (bornés et non-bornés); voir [2], p. 187, 8.

(³) Nous appliquons ici le théorème tout à fait général suivant: *R_1 et R_2 étant des régions,* $\mathrm{Fr}(R_1) \cdot R_2 \neq 0$ *et* $R_2 - R_1 \neq 0$ *entraînent* $\mathrm{Fr}(R_2) \cdot R_1 \neq 0$. En effet, R_2 étant ouvert, la première inégalité entraîne $R_2 \cdot R_1 \neq 0$, d'où la troisième en vertu de la deuxième, R_2 étant connexe.

Supposons, contrairement à II, que l'on ait une décomposition

$$H - \Phi = M + N, \quad \text{où} \quad M \neq 0 \neq N \quad \text{et} \quad \bar{M} \cdot N + M \cdot \bar{N} = 0\,. \tag{8}$$

Il s'ensuit en vertu de (7) que $H = H \cdot (\overline{M + N}) = \bar{M} \cdot H + \bar{N} \cdot H$, d'où

$$\bar{M} \cdot \bar{N} \cdot H \neq 0 \tag{9}$$

par suite de la connexité de H. On a en outre d'après (8)

$$\bar{M} \cdot \bar{N} \cdot (H - \Phi) = \bar{M} \cdot \bar{N} \cdot (M + N) = 0\,,$$

d'où

$$\bar{M} \cdot \bar{N} \cdot H \subset \Phi\,. \tag{10}$$

Soit, conformément à (9), p un point quelconque de $\bar{M} \cdot \bar{N} \cdot H$. On a donc $p \in \Phi$ en vertu de (10). L'ensemble fermé Φ étant localement connexe par hypothèse et R étant par définition une composante de son complément au plan, l'ensemble $R + (p)$ est localement connexe (voir [2], p. 365, 11). Connexe et topologiquement complet, il est donc localement connexe par arcs (voir même page et p. 184, 1). Par conséquent, U étant un entourage ouvert de p, il existe dans U un entourage ouvert V de ce point, tel qu'en particulier tout $q \in V \cdot H \cdot [R + (p)]$ se laisse unir à p par un arc $\widehat{pq} \subset U \cdot H \cdot [R + (p)]$. Les deux ensembles sont ouverts dans $H \cdot [R + (p)]$ et ils contiennent des points de M et de N, car $p \in \bar{M} \cdot \bar{N} \cdot H$ et $M + N = H \cdot R$ d'après (2) et (8). Soient donc $m \in M \cdot V$ et $n \in N \cdot V$. En posant $q = m$ et puis $q = n$, il existe par conséquent des arcs $\widehat{mp}$ et $\widehat{np}$ dans $U \cdot H \cdot [R + (p)]$. Les ensembles $M \cdot U$ et $N \cdot U$ étant séparés en vertu de (8), on a nécessairement

$$\widehat{mp} \subset M + (p) \quad \text{et} \quad \widehat{np} \subset N + (p)\,. \tag{11}$$

Ainsi $A = \widehat{mp} + \widehat{pn}$ est un arc et $A \cdot \Phi = (p)$. Soit B un arc quelconque unissant m et n dans R. On détermine d'une manière usuelle dans $A + B$ l'unique courbe simple fermée C composée de deux arcs $A' \subset A$ et $B' \subset B$ unissant des points

$$m' \in M \cdot U \quad \text{et} \quad n' \in N \cdot U\,, \tag{12}$$

et desquels l'arc A' passe par p. Ainsi

$$C \cdot \Phi = (p)\,. \tag{13}$$

Reste à montrer que, contrairement à III, la courbe C, donc le point p, divise la composante Φ' de Φ sur laquelle p est situé.

Soient D_1 et D_2 les deux disques en lesquels C coupe le plan. Comme $p \in H$ et H est de la forme (1), il existe un disque Δ tel que $p \in \Delta$,

$$\bar{\Delta} \subset \dot{G} \tag{14}$$

et que l'intersection de $\mathrm{Fr}(\Delta)$ avec C se compose exactement de deux points de R:

$$\mathrm{Fr}(\Delta)\cdot C = (m'')+(n''), \quad \text{où} \quad m'' \in \widehat{m'p}-(p) \quad \text{et} \quad n'' \in \widehat{pn'}-(p) \tag{15}$$

(voir (12) et fig. 2). Alors la courbe C divise Δ en deux disques:

$$\Delta_1 \subset D_1 \quad \text{et} \quad \Delta_2 \subset D_2. \tag{16}$$

L'ensemble $\bar{\Delta}_1-\Phi$ ne contient aucun continu L contenant les points m'' et n'', car on aurait en cas contraire d'une part $L \subset R$, ces points étant situés dans la région R et L étant par définition disjoint de la frontière Φ de cette région, et d'autre part $L \subset \bar{\Delta}_1 \subset \bar{\Delta}$ entraînerait $L \subset G$ en vertu de (14). On aurait ainsi $L \subset R\cdot H = H-\Phi$ d'après (2), de sorte que les points m'' et n'' se trouveraient unis dans $H-\Phi$ par le continu L, ce qui est impossible en vertu de (8), puisque $m'' \in M$ et $n'' \in N$ d'après (11) et (15).

Il est ainsi établi que Φ est une coupure de $\bar{\Delta}_1$ entre les points m'' et n'' de $\mathrm{Fr}(\Delta_1)$. Il existe par conséquent (voir [2], p. 335, 1, 336, 3 et relativiser à $\bar{\Delta}_1$) une composante Φ_1 de Φ qui l'est également. En tant qu'un continu qui divise la fermeture de disque $\bar{\Delta}_1$ entre deux points m'' et n'' de la frontière $\mathrm{Fr}(\bar{\Delta}_1)$, la composante Φ_1 a au moins un point commun avec l'arc $\widehat{m''n''} \subset C$ de cette frontière et au moins un autre avec l'arc sans bouts $\mathrm{Fr}(\bar{\Delta}_1)-\widehat{m''pn''}$. Par conséquent, on a d'une part $\Phi_1\cdot C \neq 0$, d'où $p \in \Phi_1$, puisque $\Phi_1 \cdot C \subset \Phi\cdot C = (p)$ d'après (13), et d'autre part $\Phi_1\cdot D_1 \neq 0$, puisque $\mathrm{Fr}(\Delta_1)-C \subset D_1$ conformément à (16).

On établit pareillement l'existence d'une composante Φ_2 de Φ qui divise $\bar{\Delta}_2$ entre m'' et n'' et pour laquelle on a $p \in \Phi_2$ et $\Phi_2\cdot D_2 \neq 0$.

Nous concluons: les composantes Φ_1 et Φ_2 ne constituent qu'une seule composante, puisqu'elles ont un point commun. Désignons-la par Φ'. Ayant des points communs avec les deux régions D_1 et D_2 en lesquelles la courbe C coupe le plan, Φ' est coupée par C, donc par le point p en vertu de (13). Ce point la divise, la connexité locale de Φ entraînant celle de ses composantes (voir aussi le renvoi ([2]), p. 308).

Le théorème 2 étant ainsi démontré, envisageons-en les hypothèses.

Celle que la région R soit située sur le plan est essentielle (si l'on ne compte pas la droite, où théorème est trivial). L'exemple dans lequel R est la partie de l'espace comprise entre deux surfaces sphériques tangentes intérieurement montre que l'hypothèse de $n=2$ est essentielle pour l'implication II→III. Afin de montrer qu'elle l'est également pour l'implication inverse, soit R la région bornée par la surface du demi-tore $(\sqrt{x^2+z^2}-2)^2+y^2 \leqslant 1$, $z \leqslant 0$ et par celle de deux cônes ayant les cercles $(x\pm 2)^2+y^2 \leqslant 1$ pour bases et le point $(0,0,2)$ pour sommet commun. La frontière Φ de R coupe la région partielle H de $\bar{R}$ composée de deux cônes sans bases (puisque déjà leur sommet la coupe). Cependant, aucun point ne coupe Φ. Des exemples analogues peuvent être indiqués facilement dans les espaces euclidiens à $n>3$ dimensions.

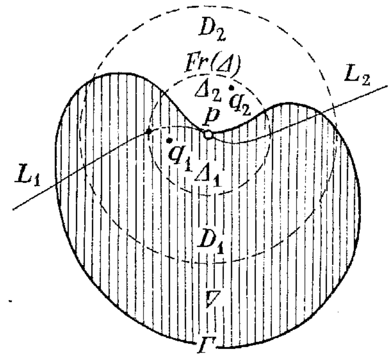

Fig. 1

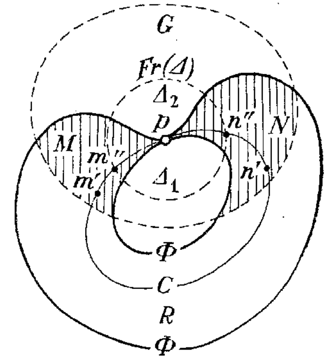

Fig. 2

L'hypothèse de la connexité locale de la frontière Φ de R est également essentielle. L'exemple suivant, dû à A. Lelek, le montre pour l'implication II→III. Soient sur le plan Oxy: D le cercle ouvert $\varrho<1$ et S la spirale $\varrho=\varphi/(\pi+\varphi)$ qui en approche indéfiniment la circonférence (ϱ désignant la distance entre le point (ϱ,φ) et l'origine O, et φ désignant l'angle compté de 0 à $+\infty$ à partir de l'axe Ox). Considérons les arcs de cette spirale, disjoints deux à deux,

$$S_n = \mathop{E}_{(\varrho,\varphi)\in S}[6n\pi \leqslant \varphi \leqslant (6n+4)\pi] \quad \text{où} \quad n=0,1,\ldots,$$

entourons-les de cercles généralisés fermés, encore disjoints deux à deux

$$Q_n = \sum_{p\in S_n} \mathop{E}_{q}[|p-q| \leqslant 1/54\,(n+1)^2]$$

(| | désignant ici la distance) et posons

$$P = D - \sum_{n=0}^{\infty} Q_n.$$

Ainsi défini, P est une région (et même un domaine ouvert, à savoir l'intérieur du continu $\bar{P}$), sa frontière $\mathrm{Fr}(P)$ n'est pas localement connexe, à savoir aux points de $\mathrm{Fr}(D)$, elle a $\aleph_0$ composantes, à savoir les courbes simples fermées $\mathrm{Fr}(Q_n)$ et la circonférence $\mathrm{Fr}(D)$, non-dense dans $\mathrm{Fr}(P)$. L'identification des points diamétralement opposés $(1, \pi/2)$ et $(1, 3\pi/2)$ de $\mathrm{Fr}(D)$ transforme $\bar{P}$ en une image homéomorphhe du continu plan qui est borné par une courbe C composée de deux circonférences tangentes intérieurement au point p (image des points identifiés) et par une infinité de courbes simples fermées situées entre elles. L'image R de P est une région (en même temps qu'un domaine ouvert), sa frontière Φ (l'image de celle de P) ne divise aucune région partielle du continu $\bar{R}$ et le point p divise la composante C de Φ. Or Φ n'est localement connexe en aucun point de C.

La connexité locale de Φ est essentielle aussi pour l'implication III$\rightarrow$II: il n'y suffit même pas que $\bar{R}$ soit localement connexe. Soit d'abord Φ le continu formé par la circonférence $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$ et par le continu indécomposable $\mathcal{B}$ (voir [1], p. 40), ayant avec elle la demi-circonférence supérieure commune. R étant la régionb ornée par Φ, le continu $\bar{R}$ est le cercle borné par la circonférence en question .Soit H le cercle ouvert $(x-\frac{1}{2})^2+y^2<\frac{1}{16}$. C'est donc bien une région partielle de $\bar{R}$. Elle est divisée par $\mathcal{B}$, donc à plus forte raison par Φ. Cependant, aucun point ne divise Φ.

Dans cet exemple, la région R n'est pas un domaine ouvert. Nous ajoutons donc ici un autre où R l'est et que nous croyons d'ailleurs intéressant plutôt pour d'autres raisons topologiques qu'à cause du détail si peu important par lui même. L'exemple en question a été également imaginé par A. Lelek.

Soient: $\mathcal{C}$ l'ensemble parfait non-dense de Cantor sur le segment $0\leqslant x\leqslant 1$ de l'axe d'abscisses, I_{ij} où $i=1,2,\ldots$ et $j=1,2,\ldots,2^{i-1}$, le segment $a_{ij}\leqslant x\leqslant b_{ij}$ contigu à $\mathcal{C}$ (fermeture du j-ième intervalle contigu de longueur $1/3^i$), I le segment $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{3}$ de l'axe d'ordonnées, D_{ijk} où $k=1,2,\ldots,3^{i-1}$ celui de deux demi-disques circulaires fermés de centre $(a_{ij},(k-\frac{1}{2})/3^i)$ et de rayon $1/2\cdot 3^i$ qui fait partie du rectangle $J_{ij}=I_{ij}\times I$, Q l'intérieur du carré aux sommets opposés $(0,0)$ et $(1,1)$, enfin

$$R=Q-\overline{\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{i-1}}\sum_{k=1}^{2^{i-1}}D_{ijk}}\,.$$

La soustraction n'intéresse donc que le tiers inférieur de Q. R est une région (et un domaine ouvert), le continu $\bar{R}$ est localement connexe, sa frontière Φ, qui est d'ailleurs aussi ~~un~~ continu, ne l'est pas au point $(0,\frac{1}{3})$ par exemple), aucun point ne divise Φ (bien que tout point $p\in C\times I$

le coupe) et enfin Φ divise la région partielle $H=G\cdot\bar{R}$ de $\bar{R}$ où G est l'ensemble des points du plan d'ordonnée inférieure à $\frac{1}{3}$.

Problèmes. Est-ce que la propriété III avec le mot „sous-continu" au lieu du mot „point" entraîne la propriété II sur le plan, en particulier lorsque Φ n'est pas localement connexe?

Est-ce que tout continu Φ qui n'est pas localement connexe, mais qui est la frontière d'une région plane R, contient un point qui le coupe (au sens de [2], p. 129)?

Est que la propriété III équivaut, et dans quelles conditions, à la suivante: aucun point ne divise Φ localement en plus de 2 composantes?

Travaux cités

[1] B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les continus non bornés*, Fundamenta Mathematicae 5 (1924), p. 23-58.

[2] C. Kuratowski, *Topologie II*, Monografie Matematyczne, tome XXI, Warszawa-Wrocław 1950.

[3] J. Mioduszewski, *Sur l'accessibilité des points d'ensembles fermés dans les espaces euclidiens*, Fundamenta Mathematicae, ce volume, p. 314-319.

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU WROCŁAWSKIEGO
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WROCŁAW

Reçu par la Rédaction le 13. 8. 1957