Sur les ensembles $\{f'(x) > a\}$

par

J. S. Lipiński (Łódź)

Dans le travail [2] j'ai établi une propriété des ensembles $\{f'(x) > a\}$. J'y ai admis que la fonction $f(x)$, non nécessairement continue, avait en tout point une dérivée finie ou infinie. Si l'on admet, de plus, que la fonction $f(x)$ soit continue, on peut obtenir un résultat plus précis, à savoir une condition nécessaire qui implique la propriété donnée dans [2], mais non vice-versa. Cette condition, jointe à la condition nécessaire qui dit que les ensembles $\{f'(x) > a\}$ doivent appartenir à la classe F_σ, entraîne la condition M_2 que Z. Zahorski a énoncée et dont il a établi la nécessité dans le travail [5]. Dans la preuve de cette nouvelle condition je profite des propositions démontrées par Z. Zahorski sur les ensembles $\{\varphi'(x) > a\}$, où $\varphi(x)$ est une fonction satisfaisant à la condition de Lipschitz et différentiable en tout point.

THÉORÈME. *Si $f(x)$ est une fonction continue admettant en tout point une dérivée finie ou infinie, alors pour tout ensemble $E = \{f'(x) > a\}$ non vide il existe un ensemble A de mesure nulle et une fonction $\varphi(x)$ différentiable et satisfaisant à la condition de Lipschitz tels que*

(1) $A \subset E$,

(2) $A = A_1 \cdot A_2$, *où* $A_1 \in F_\sigma$ *et* $A_2 \in G_\delta$,

(3) $\overline{E - \overline{A}} = \overline{E}$ *(c'est-à-dire l'ensemble A est non dense dans E)*

(4) *dans tout voisinage unilatéral du point $x \in \overline{A} \cdot E$ il existe des points de l'ensemble $E - \overline{A}$,*

(5) $E - A = \{\varphi'(x) > 0\}$.

Démonstration. Soit B en ensemble arbitraire et $x \in \overline{B}$. Je pose

$$f_B^*(x) = \max[f'(x), \overline{\lim_{\substack{t \to x \\ t \in B}}} f'(t)], \qquad f_{*B}(x) = \min[f'(x), \underline{\lim_{\substack{t \to x \\ t \in B}}} f'(t)].$$

Si la différence $f_B^*(x) - f_{*B}(x)$ est déterminée, je pose $\omega_B(x) = f_B^*(x) - f_{*B}(x)$, si elle est indéterminée je prends $\omega_B(x) = 0$. La fonction $\omega_B(x)$ est dite oscillation de la dérivée $f'(x)$ sur l'ensemble B au point x. Si l'ensemble B

est la droite entière, nous écrirons $f^*(x)$ au lieu de $f_B^*(x)$. Nous ferons de même pour $f_{*B}(x)$ et $\omega_B(x)$.

Je désignerai l'ensemble $\{f^*(x) = +\infty\} - \mathrm{int}\, E$ par F. Je vais prouver qu'il possède toutes les propriétés que la conclusion du théorème attribue à l'ensemble $\overline{A}$. On vérifie aisément que l'ensemble $\{f^*(x) = +\infty\}$ est fermé, donc l'ensemble F est aussi un ensemble fermé. Je dis que

$$F \subset \{\omega_E(x) = \infty\}. \tag{6}$$

En effet, si $x \in F$ et $f'(x) < +\infty$, alors $\overline{\lim_{t \to x}} f'(t) = +\infty$. Pour un nombre arbitraire $b > a$ il existe donc dans tout voisinage du point x des points y tels que $f'(y) > b > a$, c'est-à-dire des points de l'ensemble E. Comme le nombre b est arbitraire, nous avons

$$\overline{\lim_{\substack{t \to x \\ t \in E}}} f'(t) = +\infty.$$

Puisque la dérivée d'une fonction continue possède la propriété de Darboux, dans tout voisinage du point x il existe des points w tels que $f'(w) = \max[f'(x), a] + 1 < +\infty$. Comme $w \in E$, on a

$$\underline{\lim_{\substack{t \to x \\ t \in E}}} f'(t) < +\infty.$$

Dans le cas considéré nous obtenons ainsi $\omega_E(x) = \infty$. Si $x \in F$ et $f'(x) = +\infty$, on ne peut avoir $f_*(x) = +\infty$. Sinon il existerait un voisinage du point x tel que, pour les points z de ce voisinage, on aurait $f'(z) > a$ et le point x appartiendrait avec ce voisinage à l'intérieur de l'ensemble E, ce qui est impossible vu la définition de l'ensemble F. Donc, si $x \in F$ et $f'(x) = +\infty$, on a $f_*(x) < +\infty$. La propriété de Darboux permet encore de conclure que, dans tout voisinage du point x, il existe des points u tels que $f'(u) = \max[f_*(x), a] + 1 < +\infty$. Ainsi $u \in E$ et $\underline{\lim_{\substack{u \to x \\ u \in E}}} f'(u) < +\infty$, donc $f_{*E}(x) < +\infty$. De $f'(x) = +\infty$ il s'ensuit que $x \in E$ et $f_E^*(x) = +\infty$. Dans ce cas on a donc aussi $\omega_E(x) = \infty$ et la relation (6) se trouve ainsi établie.

Supposons maintenant que l'ensemble E ne satisfasse pas à l'égalité $\overline{E - F} = \overline{E}$, bien que la conclusion du théorème attribue à l'ensemble $\overline{A}$ la propriété (3). Autrement dit, supposons qu'il existe un intervalle $\langle b, c\rangle$ tel que $(b, c) \cdot \overline{E} \neq 0$ et que l'ensemble F soit dense dans l'ensemble $\langle b, c\rangle \cdot \overline{E}$. Alors nous aurions $\langle b, c\rangle \cdot \overline{E} = \langle b, c\rangle \cdot F$ et pour $x \in (b, c) \cdot \overline{E} \subset F$ il viendrait $\omega_{\langle b,c\rangle \overline{E}}(x) \geqslant \omega_E(x) = +\infty$. Dans l'ensemble $(b, c) \cdot \overline{E}$ il n'existerait donc pas de points de continuité relative de la dérivée $f'(x)$ par rapport à l'ensemble $\langle b, c\rangle \cdot \overline{E}$. Cela est pourtant impossible, puisque la dérivée, en tant que fonction de première classe de Baire, est ponctuellement discontinue par rapport à tout ensemble fermé. Nous avons donc prouvé que

(7) $$\overline{E-F} = \overline{E}\,.$$

Soit maintenant $x_0 \in F\cdot E$. L'ensemble F est non dense dans E, il l'est donc a fortiori sur la droite et il existe, dans un voisinage arbitraire à droite du point x_0, un point x_1 tel que $x_1 \notin F$. Si $f'(x_1) > a$, alors $x_1 \in E-F$. Si $f'(x_1) \leqslant a$, puisque $x_0 \in E$, c'est-à-dire $f'(x_0) > a$, et que la dérivée possède la propriété de Darboux, il existe dans l'intervalle (x_0, x_1) un point ξ tel que $a < f'(\xi) < f'(x_0)$. Nous avons donc $(x_0, x_1)\cdot E \neq 0$. En vertu de (7) l'ensemble $(x_0, x_1)\cdot E$ ne peut être composé uniquement de points de l'ensemble F. Donc, il existe dans $(x_0, x_1)\cdot E$ un point $x_2 \notin F$ et, par conséquent $x_2 \in E-F$. En faisant un raisonnement analogue pour un voisinage à gauche du point x_0 nous voyons que, dans chaque voisinage unilatéral de tout point $x \in F\cdot E$, il existe des points de l'ensemble $E-F$. Nous obtenons ainsi pour l'ensemble F une propriété qui correspond à la propriété (4) de l'ensemble A.

Z. Zahorski a établi une condition nécessaire et suffisante pour l'existence, pour un ensemble H, d'une fonction $\varphi(x)$ différentiable et satisfaisant à la condition de Lipschitz, telle que $H = \{\varphi'(x) > 0\}$. C'est la condition appelée M_4 (cf. [5], p. 3 et 43. La condition M_4 est aussi citée dans le travail [3] p. 95). Sans l'énoncer ici je me bornerai à formuler les théorèmes suivants, dont je ferai usage dans la suite, sur les ensembles de la classe M_4, c'est-à-dire les ensembles satisfaisant à la condition M_4.

(8) *Si la dérivée $f'(x)$ est bornée supérieurement, tous les ensembles $\{f'(x) > a\}$ appartiennent à la classe M_4.*

(9) *Le produit d'un intervalle ouvert et d'un ensemble appartenant à la classe M_4 appartient à la classe M_4.*

(10) *La some d'une infinité dénombrable d'ensembles de classe M_4 appartient à la classe M_4.*

(11) *Si un ensemble de la classe F_σ est composé uniquement de ses points d'épaisseur il appartient à la classe M_4.*

L'ensemble $E \in F_\sigma$, puisque $E = \{f'(x) > a\}$, et la dérivée est une fonction de première classe de Baire. L'ensemble F est fermé, donc l'ensemble $E-F \in F_\sigma$. Soit $E-F = \sum_{n=1}^{\infty} F_n$, où F_n sont des ensembles fermés et — on peut l'admettre sans diminuer la généralité — bornés. Soit $x \in F_n$. Je vais montrer qu'il existe alors un voisinage $(x-\delta_x, x+\delta_x)$ tel que

(12) $$(E-F)(x-\delta_x,\ x+\delta_x) \in M_4\,.$$

Je distinguerai deux cas: 1° $f^*(x) = +\infty$, 2° $f^*(x) < +\infty$.

Dans le premier cas on a $x \in \operatorname{int} E$. Soit $\delta_1 > 0$ un nombre tel que $(x-\delta_1, x+\delta_1) \subset \operatorname{int} E$. Soit $\delta_2 = \varrho(x, F)$. L'ensemble F étant fermé, on a $\delta_2 > 0$. En posant $\delta_x = \min(\delta_1, \delta_2)$ j'obtiens $(x-\delta_x, x+\delta_x) \subset \operatorname{int} E - F \subset E-F$. De là $(x-\delta_x, x+\delta_x) = (x-\delta_x, x+\delta_x)\cdot(E-F)$. En vertu de (11) nous avons $(x-\delta_x, x+\delta_x) \in M_4$ et de la dernière égalité nous tirons (12) dans ce cas.

Dans le second cas la dérivée $f'(x)$ est localement bornée supérieurement au point x, donc il existe un nombre $\delta_x > 0$ et un nombre $M_x < +\infty$ tels que pour $y \in (x-\delta_x, x+\delta_x)$ on a $f'(y) < M_x$. Il est évident que le nombre δ_x peut être choisi de sorte que $\delta_x < \varrho(x, F)$. Soient $\{a_n\}$ et $\{\beta_n\}$ des suites telles que $\lim_{n\to\infty} a_n = x-\delta_x$, $\lim_{n\to\infty}\beta_n = x+\delta_x$, $x-\delta_x < a_n < a_{n-1} < \beta_n < \beta_{n+1} < x+\delta_x$. Comme l'ensemble $\{f'(x) = -\infty\}$ est de mesure nulle ([4] chap. IX, Thèse 4,4), on peut choisir les nombres β_n et a_n de sorte que l'on ait $f'(a_n) > -\infty$, $f'(\beta_n) > -\infty$. La fonction

(13) $$f_n(x) = \begin{cases} f'(a_n) & \text{pour} \quad x \leqslant a_n\,, \\ f'(x) & \text{pour} \quad a_n < x < \beta_n\,, \\ f'(\beta_n) & \text{pour} \quad x \geqslant \beta_n \end{cases}$$

est aussi une dérivée bornée supérieurement et, d'après (8), les ensembles $\{f_n(x) > a\}$ appartiennent à la classe M_4. En vertu de (13) et de la définition de l'ensemble E nous avons $(a_n, \beta_n)\cdot\{f_n(x) > a\} = (a_n, \beta_n)\cdot E$. De là on tire, en tenant compte de (9), $(a_n, \beta_n)\cdot E \in M_4$. Ensuite, on a $(x-\delta_x, x+\delta_x)\cdot E = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n, \beta_n)\cdot E$ et, en vertu de (10), on obtient $(x-\delta_x, x+\delta_x)\cdot E \in M_4$. Le nombre δ_x étant choisi de sorte que $(x-\delta_x, x+\delta_x)\cdot F = 0$, on a $(x-\delta_x, x+\delta_x)\cdot E = (x-\delta_x, x+\delta_x)(E-F)$, d'où résulte (12). La famille d'intervalles $(x-\delta_x, x+\delta_x)$ recouvre chacun des ensembles F_n. En vertu du théorème de Heine-Borel chacun des ensembles F_n peut être recouvert par un nombre fini de tels intervalles, et l'ensemble $E-F$ peut l'être par une infinité dénombrable de ceux-ci. Désignons ces intervalles par des indices: $(x-\delta_x, x+\delta_x)_n$. Nous avons $E-F \subset \sum_{n=1}^{\infty}(x-\delta_x, x+\delta_x)_n$. De là on tire $E-F \subset \sum_n (x-\delta_x, x+\delta_x)_n(E-F)$. L'inclusion $E-F \supset \sum_n (x-\delta_x, x+\delta_x)_n(E-F)$ est triviale. Nous obtenons ainsi $E-F = \sum_n (x-\delta_x, x+\delta_x)_n(E-F)$. En tenant compte de (12) et (10) ceci donne

(14) $$E-F \in M_4\,.$$

Soit D l'ensemble des points où l'épaisseur de l'ensemble $E\cdot F$ est égale à 1. On sait que

(15) $$|E\cdot F-D| = 0\,.$$

L'ensemble $E\cdot F\cdot D$, étant mesurable, contient un ensemble $G\in F_\sigma$ tel que

$$|E\cdot F\cdot D-G|=0\,. \tag{16}$$

L'ensemble G est composé exclusivement de points de pleine épaisseur de l'ensemble $E\cdot F$. L'ensemble G diffère de l'ensemble $E\cdot F$ d'un ensemble de mesure nulle. Il résulte de là que l'ensemble G est composé exclusivement de ses points d'épaisseur. En vertu de (11) nous avons

$$G\in M_4\,. \tag{17}$$

Je pose $A=E\cdot F\cdot CG$. La relation (1) est évidente. Posons $A_1=E\cdot F$, $A_2=CG$. Il est évident que $A_1\in F_\sigma$, $A_2\in G_\delta$ et $A=A_1\cdot A_2$. On a donc (2). Puisque $G\subset D$, il vient $A=(E\cdot F-D)+(E\cdot F\cdot D-G)$, d'où, en tenant compte de (15) et (16), nous avons $|A|=0$. L'ensemble A est un sous-ensemble de l'ensemble F, donc, compte tenu de (7), on a (3). Nous avons obtenu pour l'ensemble F une propriété qui correspond à la propriété (4) de l'ensemble A. Puisque $A\subset F$, il vient $\bar{A}\subset\bar{F}=F$, d'où nous avons (4). Enfin $E-A=(E-F)+G$ et, en vertu de (14), (17) et (10), nous avons $E-A\in M_4$. C'est la condition suffisante pour l'existence de la fonction $\varphi(x)$ ayant les propriétés énoncées dans la conclusion du théorème.

Dans le théorème que nous venons d'établir l'hypothèse relative à la continuité de la fonction $f(x)$ ne saurait être rejetée. On le voit à l'exemple de la fonction $f(x)=x^{-1}$ pour $x\neq 0$ et $f(0)=0$. Pour cette fonction nous avons $E=\{f'(x)>0\}=\{0\}$. Si l'on suppose l'existence de l'ensemble A et de la fonction $\varphi(x)$ ayant les propriétés énumérées dans le théorème, on a ou bien $0\in A$ ou bien $0\notin A$. Dans le premier cas l'ensemble $E-\bar{A}$ serait vide. Dans aucun voisinage du point $0\in E\cdot\bar{A}$ il n'y aurait de points de l'ensemble $E-\bar{A}$, on ne pourrait donc avoir (4). Dans le second cas on aurait $A=0$, donc $E-A=E=\{0\}=\{\varphi'(x)>0\}$, ce qui est aussi impossible, puisque l'ensemble $\{\varphi'(x)>0\}$ doit être ou bien vide ou bien de mesure positive (cf. [1] ou [5], p. 24).

Supposons maintenant que l'ensemble $E\in F_\sigma$ ait les propriétés énoncées dans la conclusion du théorème, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble A de mesure nulle et une fonction $\varphi(x)$ différentiable et satisfaisant à la condition de Lipschitz tels que l'on ait (1), (2), (3), (4) et (5). Nous allons prouver que l'ensemble E a alors la propriété M_2, c'est-à-dire que $E\in F_\sigma$ et que tout voisinage unilatéral de tout point $x\in E$ contient une partie de l'ensemble E de mesure positive. En effet, en vertu de (4) il existe dans tout voisinage unilatéral G du point $x\in E\cdot\bar{A}$ des points de l'ensemble $E-\bar{A}$. En tenant compte de (5) et du fait que le complément de l'ensemble fermé $\bar{A}$ a une quantité tout au plus dénombrable de composantes qui sont des intervalles ouverts, et en appliquant (9) et (10) nous obtenons $E-\bar{A}\in M_4$. Prenons maintenant le voisinage $G_1\subset G$ du point $y\in G(E-\bar{A})$. De la définition des ensembles de classe M_4 il résulte que chaque voisinage du point $y\in E-\bar{A}\in M_4$ contient une partie, de mesure positive, de l'ensemble $E-\bar{A}$, donc a fortiori une partie de l'ensemble E de mesure positive. Le voisinage G_1 contient donc une partie de l'ensemble E de mesure positive et, comme $G_1\subset G$, il en est de même de G. Pour $x\in E-\bar{A}\in M_4$ il résulte immédiatement de la définition des ensembles de classe M_4 que tout voisinage unilatéral du point x contient une partie de l'ensemble E de mesure positive. Tout voisinage unilatéral de tout point $x\in E$ contient dont une partie de l'ensemble E de mesure positive. Comme nous avons supposé $E\in F_\sigma$, nous avons donc $E\in M_2$.

Dans le travail [2] j'ai introduit, pour les points appartenant à l'ensemble B, la notion de points ayant la propriété W_B. En s'appuyant sur cette définition on voit aisément que l'ensemble E satisfaisant aux conditions énoncées dans la conclusion de notre théorème ne peut avoir de points ayant la propriété W_E en dehors de l'ensemble $E\cdot A$. Ce dernier est non dense sur E, donc a fortiori sur la droite. Dans le travail [2] j'ai démontré que si la fonction $f(x)$, non nécessairement continue, a en tout point une dérivée finie ou infinie et si $H=\{f'(x)>a\}$, alors l'ensemble des points ayant la propriété W_H est non dense. Par conséquent, l'ensemble E ayant les propriétés énoncées dans le présent théorème doit avoir la propriété donnée dans le théorème du travail [2]. Il convient pourtant de rappeller que dans notre dernier théorème es hypothèses sont plus fortes, la fonction $f(x)$ étant supposée continue.

Dans le travail [2], j'ai montré que la propriété dont il y est question et la propriété M_2 sont indépendantes. Je vais donner maintenant un exemple d'ensemble $K\in M_2$ ayant la propriété énoncée dans le travail [2] et ne satisfaisant pas aux conditions du théorème établi dans le présent travail. Soit E un ensemble parfait, non dense, tel que pour tout intervalle (a,b) l'inégalité $(a,b)\cdot E\neq 0$ implique $|(a,b)\cdot E|>0$. Il existe alors un ensemble $E^*\subset E$ tel que $E^*\in F_\sigma$ et que pour tout intervalle (a,b) l'inégalité $(a,b)E\neq 0$ implique $|(a,b)\cdot E|>|(a,b)\cdot E^*|>0$. Les ensembles E^* et $E-E^*$ sont alors denses dans E et pour tout intervalle (a,b) l'inégalité $(a,b)\cdot E\neq 0$ implique $|(a,b)\cdot(E-E^*)|>0$. Soit E_1 l'ensemble des points de pleine épaisseur de l'ensemble E^*, et E_2 celui des points de pleine épaisseur de l'ensemble $E-E^*$. Je désigne par K_1 l'ensemble de classe F_σ contenu dans $E^*\cdot E_1$ tel que pour tout intervalle (a,b) on a $|(a,b)\cdot E^*\cdot E_1|=|(a,b)\cdot K_1|$. Je désigne ensuite par K_2 un ensemble dénombrable dense dans $(E-E^*)\cdot E_2$. L'ensemble $K=K_1+K_2$ est de classe F_σ et on vérifie aisément que tout voisinage unilatéral du point $x\in K$ contient une partie de l'ensemble K de mesure positive. L'ensemble K est donc un ensemble de classe M_2. Aux points de l'ensemble K_2 l'épaisseur de l'ensemble $E-E^*$ est égale à 1, donc l'épaisseur de l'ensemble E^* et de l'ensemble K_1 qui y est contenu est nulle. La différence des ensembles K et K_1 étant un ensemble K_2 de mesure nulle, l'épaisseur de l'ensemble K aux points appartenant à K_2 est nulle. Si l'ensemble K avait les propriétés énoncées dans le théorème du présent travail, il devrait exister un ensemble A tel que

$$K-\bar{A}\neq 0 \tag{18}$$

et $K-A\in M_4$, donc, en tenant compte de (9) et (10), aussi $K-\bar{A}\in M_4$. De la définition des ensembles de classe M_4 il résulte qu'il ne peut contenir de points où son épaisseur serait nulle. L'ensemble $K-\bar{A}$ ne pourrait donc pas contenir de points de l'ensemble K_2. De là $K_2\subset\bar{A}\cdot K\subset\bar{A}$. Evidemment $\bar{K}_2\subset\bar{A}$. L'ensemble K_2 est dense dans K, donc $K\subset\bar{K}_2$ et, par suite, $K\subset\bar{A}$. Nous obtenons ainsi $K-\bar{A}=0$, en contradiction avec (18).

Considérons maintenant l'ensemble des points ayant la propriété W_K. Il constitue un sous-ensemble de l'ensemble non dense K, il est donc lui-même non dense. L'ensemble K a donc la propriété énoncée dans la conclusion du travail [2].

Travaux cités

[1] A. Denjoy, *Sur une propriété des fonctions dérivées*, L'Enseignement Mathématique 18 (1916), p. 320-328.

[2] J. Lipiński, *Une propriété des ensembles* $\{f'(x)>a\}$, Fund. Math. 42 (1955), p. 399-402.

[3] — *Sur certains problèmes de Choquet et de Zahorski concernant les fonctions dérivées*, Fund. Math. 44 (1957), p. 94-102.

[4] S. Saks, *Theory of the integral*, Warszawa 1937.

[5] Z. Zahorski, *Sur la premiere dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), p. 1-54.

UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ

Reçu par la Rédaction le 17. 6. 1957

Some consequences of the Vietoris Mapping Theorem

by

J. W. Jaworowski (Warszawa)

1. We know several generalizations of theorems concerning continuous mappings in the case of multi-valued mappings, *i. e.*, of mappings which take each point of a space X into a non-empty closed subset of a space Y. The continuity of a multi-valued mapping $F\colon X\to Y$ is defined as the upper semi-continuity of the mapping F regarded as a single-valued mapping of X into the space 2^Y of non-empty closed subsets of Y. For instance, S. Eilenberg and D. Montgomery have extended in this way the Lefschetz formula concerning fixed points of mappings (see [3]); in [4] a similar generalization of Borsuk's theorem on antipodes is given. The Vietoris Mapping Theorem is an important tool in such generalizations. It ensures that a multi-valued continuous mapping F from X to Y, such that the sets $F(x)$ are acyclic, induces a homomorphism of homology groups of X into those of Y.

W. L. Strother studied in [7] the multi-valued mappings which are continuous as mappings from X to 2^Y. The author introduced the notion of multi-valued homotopy of such mappings. However, the identity mapping of the sphere S_n is "multi-homotopic" to zero in this sense, so that the "multi-homotopy groups" based on this notion of homotopy are trivial. We consider in this paper a similar notion of homotopy for multi-valued mappings $F\colon X\to Y$ which are continuous in the previous sense (*i. e.*, upper semi-continuous). We show (Theorem 3) that if two multi-valued mappings $F, G\colon X\to Y$ are homotopic and if during such a multi-valued homotopy $\Phi\colon X\times I\to Y$ the sets $\Phi(x,\tau)$ are acyclic, then F and G induce the same homomorphism of homology groups. It follows, in particular, that there exists no acyclic homotopy joining the identity mapping of the sphere with the constant mapping. Moreover, this theorem and the above mentioned formula of Lefschetz for multi-valued mappings yield a generalization of the classical theorem of Poincaré-Brouwer concerning vector fields on the sphere.

2. Let X be a compact metric space and let $\varepsilon>0$. By a k-dimensional ε-simplex of X we understand a set $\{p_0, p_1, \ldots, p_k\}$ of k points