Coutures et tapis

par

B. Knaster et **A. Lelek** (Wrocław)

1. Introduction. Nous appelons *couture* („simple mapping" au sens de Borsuk et Molski [1], p. 84) toute fonction continue f prenant chacune de ses valeurs au plus pour deux valeurs distinctes de sa variable.

Nous appelons *tapis* tout continu T localement connexe (image continue du segment de droite) situé sur la surface sphérique S_2, étant une courbe (c'est-à-dire de dimension 1) et dont le complémentaire se compose d'une suite de disques (c'est-à-dire de régions ayant pour frontières des courbes simples fermées) aux fermetures disjointes. Soient $D_1, D_2, \ldots$ ces disques et $C_1, C_2, \ldots$ leurs frontières: $C_m = \mathrm{Fr}(D_m)$. Par suite de la connexité locale du tapis, le diamètre de D_m, donc aussi celui de C_m, tend en vertu du théorème de Schönflies (voir [3], II, p. 363) à zéro:

$$\lim_{m\to\infty} \delta(D_m) = 0 = \lim_{m\to\infty} \delta(C_m). \tag{1}$$

Tout tapis a évidemment une image homéomorphe sur le plan: *tapis plan* (¹). La dénomination est due, en fait, à l'aspect d'une courbe plane de Sierpiński [7], dite universelle (car contenant des images homéomorphes de toutes les courbes planes) et connue par ses nombreuses applications. D'après un théorème de Whyburn (voir [8] et [9]), dont la démonstration va paraître prochainement (voir ce volume trois propriétés suivantes des ensembles plans X sont équivalentes:

(i) X est un tapis;

(ii) X est in courbe localement connexe qu'aucun point ne coupe localement;

(iii) X est homéomorphe à la courbe universelle de Sierpiński.

Nous allons montrer que t o u s les points d'un tapis sont des points de ramification d'ordre $2^{\aleph_0}$ (au sens de Menger; voir [6], p. 97) et définir un tapis $\mathcal{T}$ qui sera obtenu du segment de droite par une couture. C'est la solution du problème 2 de Borsuk et Molski ([1], p. 91) (²). Elle sera

(¹) par projection stéréographique par exemple.

(²) Il suffirait d'ailleurs que c e r t a i n s de ses points soient d'ordre indénombrable, car il s'agit du problème, si l'ordre au plus dénombrable de tous les points d'une courbe est un invariant des coutures.

précédée par un théorème d'après lequel une couture de $\mathcal{T}$ peut fournir un carré ou une surface de sphère, de sorte que les deux derniers continus (de dimension 2) se laissent obtenir du segment rectiligne par superposition de deux coutures. Les autres résultats établis dans la suite ne sont qu'accessoires.

2. Préliminaires. Fixons les notations: I désignera le segment $0 \leqslant x \leqslant 1$, E^2 le plan $z = 0$, I^2 le carré au côté I sur E^2, S_2 la surface sphérique $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$, p_+ le point $(0, 0, 2)$ de S_2 (son pôle nord), s: $S_2-(p_+)\to E^2$ la projection stéréographique de S_2 sur E^2 du point p_+, enfin R l'ensemble des points de E^2 aux deux coordonnées rationnelles. Les notations plus générales seront empruntées à [3].

$\mathfrak{X}$ étant un espace métrique (avec la distance ϱ) et compact, nous entendrons ici par *décomposition* $\boldsymbol{F}$ *de* $\mathfrak{X}$ toute famille $\boldsymbol{F} \subset 2^{\mathfrak{X}}$ d'ensembles T_ξ compacts, non-vides, disjoints deux à deux — dits *tranches* de la décomposition $\boldsymbol{F}$ — et tels que $\mathfrak{X} = \bigcup_{T_\xi \in \boldsymbol{F}} T_\xi$. La *semicontinuité supérieure* d'une décomposition $\boldsymbol{F}$ sera entendue comme dans [3], II, p. 42, à savoir que F étant un ensemble fermé quelconque dans l'espace $\mathfrak{X}$, la somme $\bigcup_{T_\xi \cap F \neq 0} T_\xi$ y est aussi un ensemble fermé.

LEMME 1. *$X_m \subset \mathfrak{X}$ étant des ensembles fermés, disjoints et tels que*

$$\lim_{m\to\infty} \delta(X_m) = 0, \tag{2}$$

et $\boldsymbol{F}_m$ étant une décomposition supérieurement semicontinue de X_m, la décomposition $\boldsymbol{F}$ de $\mathfrak{X}$ en tranches des décompositions $\boldsymbol{F}_m$ pour $m = 1, 2, \ldots$ et en points individuels de l'ensemble $\mathfrak{X} - \bigcup_{m=1}^{\infty} X_m$ est supérieurement semicontinue.

D é m o n s t r a t i o n. Soit $\{T_n\}$ une suite convergente de tranches de la décomposition $\boldsymbol{F}$ de $\mathfrak{X}$.

Si une infinité des T_n appartient à une même décomposition $\boldsymbol{F}_m$, la limite de ces tranches, qui est en même temps celle de la suite $\{T_n\}$, est contenue dans une seule tranche de la même décomposition $\boldsymbol{F}_m$ en raison de la semicontinuité supérieure de cette décomposition (voir [3], II, p. 45), donc aussi dans une seule tranche de la décomposition $\boldsymbol{F}$, car $\boldsymbol{F}_m \subset \boldsymbol{F}$.

S'il n'y a, par contre, qu'un nombre fini des T_n dans chaque $\boldsymbol{F}_m$ pour $m = 1, 2, \ldots$, il résulte de (2) et de l'hypothèse d'après laquelle les tranches de $\boldsymbol{F} - \bigcup_{m=1}^{\infty} \boldsymbol{F}_m$ se réduisent à des points qu'il en est de même de la limite de la suite $\{T_n\}$; cette limite est donc encore contenue dans une seule tranche de $\boldsymbol{F}$. La condition précitée, équivalente à la semicontinuité supérieure de la décomposition $\boldsymbol{F}$ (voir [3], II, p. 45, (ii)), est ainsi satisfaite dans les deux cas possibles.

Lemme 2. *Tout ensemble dénombrable P dense dans S_2 équivaut topologiquement à l'ensemble $s^{-1}(R)$.*

Démonstration. Il s'agit d'établir une homéomorphie $h\colon S_2\to S_2$ telle que $h(P)=s^{-1}(R)$.

On peut évidemment admettre que $p_+\in S_2-P$. Comme dénombrable et dense dans E^2, l'ensemble $s(P)$ équivaut topologiquement à R (voir [5], p. 264); c'est-à-dire qu'il existe une homéomorphie $g\colon E^2\to E^2$ telle que $g\big(s(P)\big)=R$. La fonction $h=s^{-1}gs$ est donc une homéomorphie transformant l'ensemble $S_2-(p_+)$ en lui-même et l'on a $h(P)=s^{-1}(R)$. Or, $S_2-(p_+)$ étant une région et son complémentaire (p_+) étant de dimension 0, cette homéomorphie se laisse prolonger en celle de S_2 en S_2 (voir [3], II, p. 386).

3. Partie irrationnelle du tapis. T étant un tapis, appelons ses sous-ensembles $N=T-\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}C_m$ et $T-N=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}C_m$ partie *irrationnelle* et *rationnelle* de T respectivement. Evidemment,

$$N=S_2-\bigcup_{m=1}^{\infty}\overline{D_m}\,. \tag{3}$$

Théorème 1. *T étant un tapis, il existe une fonction continue $\varphi\colon S_2\to S_2$ satisfaisant aux conditions:*

(4) *la fonction partielle $\varphi|N$ est une homéomorphie,*

(5) $\varphi(N)=S_2-s^{-1}(R)$,

(6) $\varphi(T-N)=\varphi(S_2-N)=s^{-1}(R)$.

Démonstration. On a $S_2=N\cup\overline{D_1}\cup\overline{D_2}\cup\ldots$ en vertu de (3). Considérons la décomposition $\boldsymbol{F}$ de S_2 en continus disjoints $\overline{D_m}$, où $m=1,2,\ldots$, et en points individuels de N. En posant $\boldsymbol{F}_m=(\overline{D_m})$ et en tenant compte de (1), les hypothèses du lemme 1 se trouvent satisfaites, d'où la semicontinuité supérieure de $\boldsymbol{F}$. Soit donc $f\colon S_2\to f(S_2)=Y$ la fonction continue de laquelle les ensembles $f^{-1}(y)$, où $y\in Y$, sont précisément les tranches de la décomposition $\boldsymbol{F}$:

$$f^{-1}(y)\in\boldsymbol{F}\quad\text{pour tout}\quad y\in f(S_2)\,. \tag{7}$$

Toutes ces tranches étant des continus (à savoir des fermetures de disques et des points) qui ne coupent pas S_2, l'ensemble $f(S_2)$ est homéomorphe à S_2 en vertu d'un théorème de Moore (voir [3], II, p. 380). Soit $h_1\colon f(S_2)\to S_2$ cette homéomorphie.

N est un ensemble frontière dans S_2 en tant que sous-ensemble de l'ensemble T, qui est de dimension 1. Par conséquent, S_2-N est dense dans S_2 et il en est de même de l'ensemble $f(S_2-N)=f(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\overline{D_m})=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}f(\overline{D_m})$ dans $f(S_2)$ par suite de la continuité de f. En outre, $f(S_2-N)$ est dénombrable, les ensembles $f(\overline{D_m})$ se réduisant à des points. L'ensemble $h_1f(S_2-N)$ est donc à la fois dense dans S_2 et dénombrable, ce qui entraîne en vertu du lemme 2 l'existence d'une homéomorphie $h_2\colon S_2\to S_2$ telle que

$$h_2h_1f(S_2-N)=s^{-1}(R)\,. \tag{8}$$

Posons

$$\varphi=h_2h_1f\,. \tag{9}$$

Les points de N étant autant des tranches de la décomposition $\boldsymbol{F}$, la fonction partielle $f|N$ est une homéomorphie, d'où (4) en vertu de (9). Comme $C_m\neq 0$ et $C_m\subset\overline{D_m}$ par définition, il vient

$$f(S_2-N)=f(\bigcup_{m=1}^{\infty}\overline{D_m})=f(\bigcup_{m=1}^{\infty}C_m)=f(T-N)\,,$$

d'où (6) en vertu de (8). Enfin, on a (5), car $f(N)\cap f(S_2-N)=0$, donc en vertu de (8) et (9)

$$\begin{aligned}\varphi(N)&=h_2h_1[f(S_2)-f(S_2-N)]\\&=h_2h_1f(S_2)-h_2h_1f(S_2-N)=S_2-s^{-1}(R)\,.\end{aligned}$$

Corollaire. *Tout ensemble frontière $X\subset S_2$ est homéomorphe à un sous-ensemble de N.*

Il existe, en effet, un P dénombrable, dense dans S_2 et tel que $X\subset S_2-P$. En vertu du lemme 2, il existe donc une homéomorphie $h\colon S_2-P\to S_2-s^{-1}(R)$. Posons $h'=h|X$ et $\psi=\varphi^{-1}|h(X)$, où φ est la fonction (9). En vertu de (4) et (5), la fonction $\psi h'$ est une homéomorphie et $\psi h'(X)\subset N$.

En particulier, *la partie irrationnelle de tout tapis contient des images homéomorphes de toutes les courbes planes.*

Ces corollaires sont des généralisations de la propriété mentionnée dans l'Introduction et qui a été établie pour la courbe universelle de Sierpiński toute entière (voir [7], p. 629 et [6], p. 354).

Lemme 3. *Si $C\subset S_2$ est un ensemble connexe ne se réduisant pas à un point, l'ensemble $C\cap N$ est dense en soi.*

Démonstration. On peut admettre que $C\cap N\neq 0$. Si un point $p\in C\cap N$ était isolé, il existerait un entourage ouvert G de p, tel que

$$[G-(p)]\cap C\cap N=0\,. \tag{10}$$

La composante C_p du point p dans l'ensemble $C \cap G$ est donc un ensemble connexe ne se réduisant pas au point p et l'on a $C_p-(p) \subset [G-(p)] \cap C$. Il en résulte d'après (10) que $[C-(p)] \cap N = 0$, c'est-à-dire $C_p-(p) \subset S_2 - N$. La fonction continue (9) transforme par conséquent C_p en un ensemble connexe $\varphi(C_p)$ tel que

$$\varphi[C_p-(p)] \subset s^{-1}(R) \tag{11}$$

et que $\varphi(p) \in S_2 - s^{-1}(R)$ d'après (6), donc qui ne se réduit pas à un point, puisque $\varphi(p)$ n'appartient pas à $\varphi[C_p-(p)]$. Or, l'ensemble $s^{-1}(R)$ étant dénombrable, il en serait de même, en vertu de (11), de l'ensemble

$$\varphi(C_p) = \varphi[C_p-(p)] \cup \varphi(p),$$

ce qui en contredit la connexité.

Lemme 4. *Si $C \subset S_2$ est un continu ne se réduisant pas à un point, l'ensemble $C \cap N$ est vide ou de puissance $2^{\aleph_0}$.*

Démonstration. N étant un G_δ d'après (3), $C \cap N$ est aussi un G_δ, donc topologiquement complet (en vertu d'un théorème de P. Alexandroff; voir [3], I, p. 316). En outre, il est dense en soi d'après le lemme 3 et composé par conséquent de points de condensation (voir [3], I, p. 321). Il est donc de puissance du continu, en tant qu'ensemble borelien indénombrable.

Théorème 2. *Tout point d'un tapis est d'ordre $2^{\aleph_0}$.*

Démonstration. T étant un tapis, considérons deux points, $a \in T \cap G$ et $b \in T - \overline{G}$, où G est un entourage ouvert de a dans S_2. La frontière $\mathrm{Fr}(G)$ coupe donc S_2 entre a et b. L'ensemble N étant dense dans T en vertu du théorème 1, il existe deux points, $a' \in N$ et $b' \in N$, tels que $\mathrm{Fr}(G)$ coupe S_2 également entre a' et b'. Soit $C \subset \mathrm{Fr}(G)$ une coupure irréductible de S_2 entre ces points. C est donc un continu ne se réduisant pas à un point et, N étant connexe en vertu du théorème 1 (en tant qu'image continue, à savoir projection stéréographique de l'ensemble connexe $E_2 - R$), on a nécessairement $C \cap N \neq 0$. En vertu du lemme 4, l'ensemble $C \cap N$, et à plus forte raison son sur-ensemble $\mathrm{Fr}(G) \cap T$, est donc de puissance $2^{\aleph_0}$. Tel est par conséquent l'ordre du point $a \in G$ dans T, l'entourage G étant arbitraire.

4. Surface sphérique et domaines fermés plans comme coutures des tapis. Toute composante D_m du complémentaire $S_2 - T$ d'un tapis T étant un disque (voir la définition, p. 186), il existe pour tout $m = 1, 2, \ldots$ une homéomorphie h_m transformant le cercle $Q = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leqslant 1\}$ en $\overline{D_m}$. En particulier, on a donc

$$h_m(\mathrm{Fr}(Q)) = \mathrm{Fr}(\overline{D_m}) = C_m. \tag{12}$$

La décomposition de Q en tranches $T_\xi = \{(x,y)\colon x = \xi,\ y^2 \leqslant 1-\xi^2\}$ où $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$ étant évidemment semicontinue supérieurement (même continue), nous concluons que

(13) *la décomposition $\boldsymbol{F}_m$ de $\overline{D_m}$ en tranches $h_m(T_\xi)$* — qui sont d'ailleurs des arcs simples pour $|\xi| < 1$ et des points pour $|\xi| = 1$ — *est semicontinue supérieurement* $(m = 1, 2, \ldots)$.

L'ensemble $T_\xi \cap \mathrm{Fr}(Q)$ n'étant composé, pour $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$, que d'un ou de deux points, il en est de même de $h_m(T_\xi) \cap h_m[\mathrm{Fr}(Q)]$, qui coïncide avec $h_m(T_\xi) \cap C_m$ d'après (12), donc avec $h_m(T_\xi) \cap T$, puisque le sur-ensemble $\overline{D_m}$ de $h_m(T_\xi)$ est disjoint de N en vertu de (3). Notons donc que

(14) *pour $m = 1, 2, \ldots$ et $-1 \leqslant \xi \leqslant 1$, tout $h_m(T_\xi) \cap T$ se compose de deux points au plus.*

Théorème 3. *Tout continu $\Gamma \subset S_2$ dont le complémentaire $S_2 - \Gamma$ se compose de n (nombre fini) disques aux fermetures disjointes $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ se laisse obtenir par couture de n'importe quel tapis T.*

Démonstration. En tenant compte de (3) et (13), soit $\boldsymbol{F}$ la décomposition de S_2 en tranches $h_m(T_\xi)$ des décompositions $\boldsymbol{F}_m$ des $\overline{D^m}$ pour $m = n+1, n+2, \ldots$ et en points individuels de l'ensemble $N \cup \bigcup_{m=1}^{n} \overline{D_m}$ (le sommande droit étant considéré constamment comme vide dans le cas de $n = 0$). D'après (1) et (13), la décomposition $\boldsymbol{F}$ est semicontinue supérieurement en vertu du lemme 1. Soit donc f la fonction continue satisfaisant à (7). Les tranches de $\boldsymbol{F}$ étant, conformément à (13), des continus qui ne coupent pas S_2 (en tant que des arcs simples et des points), il existe, en vertu du théorème précité de Moore (voir [3], II, p. 380), une homéomorphie $h_1\colon f(S_2) \to S_2$ en S_2.

En vertu de (14), la fonction partielle $f_1 = f|T$ est une couture et l'on a

$$f_1(T) = f(T) = f(T \cup \overline{D_{n+1}} \cup \overline{D_{n+2}} \cup \ldots) = f(S_2 - \bigcup_{m=1}^{n} D_m). \tag{15}$$

La fonction f étant évidemment une homéomorphie de $\bigcup_{m=1}^{n} \overline{D_m}$, il en est de même de $h_1 f$. Par conséquent $h_1 f(\bigcup_{m=1}^{n} D_m)$ est une somme de n disques aux fermetures disjointes (sinon vide). Deux sous-continus quelconques de la sphère qui en diffèrent par un même nombre (nul ou fini) de disques aux fermetures disjointes étant notoirement homéomorphes (voir [3], II, p. 382), il existe une homéomorphie $h_2\colon S_2 - h_1 f(\bigcup_{m=1}^{n} D_m) \to S_2$ telle que

$$h_2[S_2 - h_1 f(\bigcup_{m=1}^{n} D_m)] = \Gamma. \tag{16}$$

Toute tranche de la décomposition $\boldsymbol{F}$ étant contenue soit dans $\bigcup_{m=1}^{n} D_m$, soit dans $S_2-\bigcup_{m=1}^{n} D_m$, on a $f(\bigcup_{m=1}^{n} D_m) = f(S_2)-f(S_2-\bigcup_{m=1}^{n} D_m)$, d'où

$$\begin{aligned} S_2-h_1f(\bigcup_{m=1}^{n} D_m) &= S_2-h_1[f(S_2)-f(S_2-\bigcup_{m=1}^{n} D_m)] \\ &= S_2-[h_1f(S_2)-h_1f(S_2-\bigcup_{m=1}^{n} D_m)] \\ &\doteq S_2-[S_2-h_1f(S_2-\bigcup_{m=1}^{n} D_m)] \\ &= h_1f(S_2-\bigcup_{m=1}^{n} D_m) = h_1f_1(T) \end{aligned}$$

en vertu de (15). Ainsi $h_2h_1f_1(T)=I^2$ d'après (16). Enfin, f_1 étant une couture de T, il en est de même de $h_2h_1f_1$, puisque h_1 et h_2 sont des homéomorphies.

COROLLAIRE. *La surface sphérique S_2, de même que le carré plan I^2 se laissent obtenir par couture de tout tapis T.*

En effet, pour S_2 c'est le cas particulier où $n=0$ et pour I^2 c'est celui où $n=1$, puisque S_2 sans un disque est une fermeture de disque (en vertu du théorème de Jordan), donc un continu homéomorphe à I^2.

5. Tapis comme coutures du segment de droite. La courbe $\mathcal{T}$ que nous allons définir par une couture de I sera un tapis plan; il suffit donc de le soumettre à la projection s^{-1} pour en obtenir par homéomorphie un tapis $T\subset S_2$.

Nous definirons d'abord une opération Ω portant sur les carrés. Soient: Q un carré, L sa diagonale ayant ses bouts aux sommets a et b, J un segment $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$, où $\alpha<\beta$, et f la fonction transformant linéairement J en L de manière que $f(\alpha)=a$ et $f(\beta)=b$.

Divisons Q en 7^2 carrés égaux à l'aide des droites parallèles aux côtés de Q, rejetons-en 8, à raison de 4 formant un carré à chacun des deux sommets opposés autres que a et b, et numérotons les carrés qui restent comme à la fig. 1. Soit $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{41}$ la suite qu'ils forment. Divisons ensuite J en 41 segments égaux à l'aide des points $\alpha_i=\alpha+(\beta-\alpha)i/41$ et transformons linéairement chaque segment $\alpha_{i-1}\leqslant x\leqslant\alpha_i$ en diagonale L_i du carré Q_i (à savoir en celles marquées à la fig. 1), de façon que le segment J se trouve transformé en ligne brisée $B=L_1\cup L_2\cup\ldots\cup L_{41}$ aux bouts a et b (passant d'ailleurs deux fois par plusieurs de ses sommets).

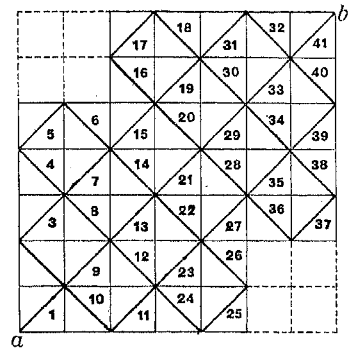

Fig. 1

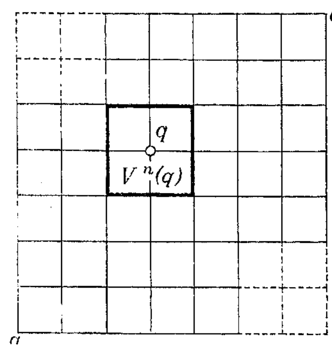

Fig. 2

Soit Ω_f la transformation de J en B ainsi définie. Elle est bien une couture, elle est biunivoque sur le contour du carré Q et en outre

(17) $$f(J)\subset\Omega_f(J),$$

(18) *les fonctions f et Ω_f coïncident aux bouts du segment J.*

THÉORÈME 4. *Il existe une couture τ du segment I telle que le continu $\mathcal{T}=\tau(I)$ est un tapis.*

Démonstration. Posons $Q=I^2$; c'est donc le carré-unité aux sommets opposés $a=(0,0)$ et $b=(1,1)$. L étant sa diagonale aux bouts a et b, soit f_0 une fonction linéaire telle que

$$f_0(I)=L,\quad f_0(0)=(0,0)\quad \text{et}\quad f_0(1)=(1,1).$$

Posons $f_1=\Omega_{f_0}$ et désignons par Q_i^1 et L_i^1 respectivement le carré au côté $1/7$, analogue du carré Q_i, et sa diagonale, analogue de L_i. La fonction f_1 est donc une couture et transforme le segment $I_i^1=\{x\colon (i-1)/41\leqslant x\leqslant i/41\}$ en diagonale L_i^1 de Q_i^1, pour $i=1,2,\ldots,41$. Appelons les carrés $Q_1^1, Q_2^1, \ldots, Q_{41}^1$ et les segments $I_1^1, I_2^1, \ldots, I_{41}^1$ respectivement carrés et segments *de première approximation* et posons $B_1=L_1^1\cup L_2^1\cup\ldots\cup L_{41}^1$. On a donc $f_1\colon I\to B_1\subset I^2$.

Admettons qu'une couture $f_{n-1}\colon I\to B_{n-1}\subset I^2$ se trouve définie qui transforme linéairement le segment $I_i^{n-1}=\{x\colon (i-1)/41^{n-1}\leqslant x\leqslant i/41^{n-1}\}$ en diagonale L_i^{n-1} du carré Q_i^{n-1} au côté $1/7^{n-1}$ où $i=1,2,\ldots,41^{n-1}$. Définissons alors la fonction f_n par les conditions:

(19) $$f_n^i=\Omega_{f_{n-1}|I_i^{n-1}},$$

(20) $$f_n|I_i^{n-1}=f_n^i,$$

où $i=1,2,\dots,41^{n-1}$. Ainsi définie, la fonction f_n est une couture en vertu de (18) et chacune des fonctions f_n^i transforme d'après (19) les 41 segments

$$J_{ij}=\{x\colon (i-1)/41^{n-1}+(j-1)/41^n\leqslant x\leqslant (i-1)/41^{n-1}+j/41^n\},$$

où $j=1,2,\dots,41$, en diagonales des carrés aux côtés $1/7^n$, analogues des carrés $Q_1,Q_2,\dots,Q_{41}$, contenus dans le carré Q_i^{n-1}. Rangeons tous les segments J_{ij}, où $i=1,2,\dots,41^{n-1}$ et $j=1,2,\dots,41$, d'après leur ordre de succession sur I en une suite $\{I_i^n\}$, où $i=1,2,\dots,41^n$. Les carrés aux côtés $1/7^n$, qui leur correspondent, et leur diagonales respectives forment alors les suites $\{Q_i^n\}$ et $\{L_i^n\}$. Appelons les 41^n carrés Q_i^n et les segments I_i^n carrés et segments *de n-ième approximation* et posons $B_n=L_1^n\cup L_2^n\cup\dots\cup L_{41^n}^n$. On a alors $f_n\colon I\to B_n\subset I^2$ et tout segment $I_i^n=\{x\colon (i-1)/41^n\leqslant x\leqslant i/41^n\}$ où $i=1,2,\dots,41^n$ se trouve transformé par f_n linéairement (à savoir par similitude) en diagonale L_i^n du carré Q_i^n au côté $1/7^n$.

La suite infinie $\{f_n\}$ de coutures de I étant ainsi définie par induction, posons

$$\tau=\lim_{n\to\infty}f_n. \tag{21}$$

Montrons que cette limite existe et qu'elle est continue. Si $x\in I_i^{n-1}$, on a $f_{n-1}(x)\in Q_i^{n-1}$ et aussi $f_n(x)\in Q_i^{n-1}$ en vertu de (19) et (20). Par conséquent (ϱ désignant la distance dans E^2),

$$\varrho[f_n(x),f_{n-1}(x)]\leqslant\sqrt{2}/7^{n-1}\quad\text{pour}\quad x\in I\ \text{et}\ n=1,2,\dots$$

La suite $\{f_n\}$ est donc uniformément continue dans I, d'où l'existence et la continuité de sa limite τ.

Envisageons l'ensemble $\tau(I)$. On a d'après (17)

$$f_0(I)\subset f_1(I)\subset\dots\subset f_n(I)\subset\dots, \tag{22}$$

d'où

$$\tau(I)=\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty}f_n(I)}. \tag{23}$$

En même temps,

$$Q\supset\bigcup_{i=1}^{41}Q_i^1\supset\dots\supset\bigcup_{i=1}^{41^n}Q_i^n\supset\dots \tag{24}$$

et comme $f_n(I)=B_n\subset\bigcup_{i=1}^{41^n}Q_i^n$ par définition, il vient $f_m(I)\subset\bigcup_{i=1}^{41^n}Q_i^n$ pour $m=0,1,\dots$ et $n=1,2,\dots$ d'après (22), donc $f_m(I)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{41^n}Q_i^n$ pour

$m=0,1,\dots$ et, le membre droit de cette inclusion étant fermé, on conclut de (23) que

$$\tau(I)\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{41^n}Q_i^n.$$

Réciproquement, on a pour tout $i=1,2,\dots,41^n$ et pour tout $m=n+1,n+2,\dots$ $f_m(I)\cap Q_i^n\neq 0$ et

$$\lim_{n\to\infty}\delta(Q_i^n)=0, \tag{25}$$

d'où

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{41^n}Q_i^n\subset\tau(I)$$

en vertu de (23). Les deux inclusions établies donnent donc l'égalité

$$\tau(I)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=1}^{41^n}Q_i^n. \tag{26}$$

Nous pouvons montrer à présent que τ est une couture. Soit $y\in\tau(I)$. Posons, pour abréger, $F_n=\bigcup_{i=1}^{41^n}Q_i^n$ et considérons les trois cas possibles:

1° Il existe, pour tout $n=1,2,\dots$, un indice i_n tel que y est *à l'intérieur de $Q_{i_n}^n$ relativement à la somme F_n*:

$$y\in F_n-\overline{F_n-Q_{i_n}^n}. \tag{27}$$

Faisons alors correspondre à tout $Q_{i_n}^n$ le segment $I_{i_n}^n$ de n-ième approximation, donc de longueur $1/41^n$, pour lequel $f_n(I_{i_n}^n)=L_{i_n}^n\subset Q_{i_n}^n$. On a donc $I_{i_1}^1\supset I_{i_2}^2\supset\dots$ et la partie commune $\bigcap_{n=1}^{\infty}I_{i_n}^n$ se réduit à un point, soit à ξ. Par conséquent $\tau(\xi)=y$.

Or $x\neq\xi$ entraîne $\tau(x)\neq y$. En effet, il existe pour $x\neq\xi$, à partir d'un n suffisamment élevé, un numéro $j_n\neq i_n$ tel que $x\in I_{j_n}^n$, d'où $f_m(x)\in Q_{j_n}^n$ pour $m\geqslant n$ et par conséquent $\tau(x)\in Q_{j_n}^n$ en vertu de (21). Comme $Q_{i_n}^n\cap Q_{j_n}^n\subset\overline{F_n-Q_{i_n}^n}$, il en résulte d'après (27) que $\tau(x)\neq y$. Ainsi $\tau^{-1}(y)$ se réduit dans ce cas au seul point ξ.

2° Il existe, à partir d'un n_0, deux suites infinies $\{i_n\}$ et $\{j_n\}$ d'indices, telles que

$$y\in Q_{i_n}^n\cap Q_{j_n}^n\quad\text{et}\quad y\ \text{non}\in Q_{k_n}^n\quad\text{pour}\quad i_n\neq k_n\neq j_n. \tag{28}$$

Posons

$$(\xi_1)=\bigcap_{n=n_0}^{\infty}I_{i_n}^n\quad\text{et}\quad(\xi_2)=\bigcap_{n=n_0}^{\infty}I_{j_n}^n.$$

Par conséquent, $f_n(\xi_1)\in Q_{i_n}^n$ et $f_n(\xi_2)\in Q_{j_n}^n$ pour tout $n>n_0$, d'où $\tau(\xi_1)=\tau(\xi_2)=y$ en vertu de (21) et (28). Or $\xi_1\neq x\neq\xi_2$ entraîne $\tau(x)\neq y$.

En effet, si x diffère de ξ_1 et de ξ_2, il existe pour un n suffisamment élevé un indice k_n, distinct de i_n, et j_n et tel que $x \in I^n_{k_n}$, d'où $f_m(x) \in Q^n_{k_n}$ pour $m \geqslant n$ et par conséquent $\tau(x) \in Q^n_{k_n}$ en vertu de (21). Il en résulte d'après (28) que $\tau(x) \neq y$. Ainsi $\tau^{-1}(y)$ se réduit dans ce cas au couple de points ξ_1, ξ_2.

3° Il existe, pour un n_0, au moins trois indices distincts i_{n_0}, j_{n_0} et k_{n_0} tels que

$$y \in Q^{n_0}_{i_{n_0}} \cap Q^{n_0}_{j_{n_0}} \cap Q^{n_0}_{k_{n_0}}. \tag{29}$$

Le point y est donc un *sommet* du réseau quadratique au côté $1/7^{n_0}$, à savoir sommet commun de plus de deux carrés de n_0-ième approximation. Il en résulte que

$$y \in f_{n_0}(I), \tag{30}$$

car en cas contraire y serait (vu (19), (20) et la définition de l'opération Ω) l'un des sommets des carrés au côté $1/7^{n_0+1}$, rejeté avec eux à l'approximation immédiatement suivante, d'où $y \in E^2 - \bigcup_{i=1}^{41^{n_0+1}} Q_i^{n_0+1}$, et y ne saurait appartenir à $\tau(I)$ en vertu de (26).

Nous allons montrer que, dans le cas considéré, y est un point intérieur d'une somme de quatre carrés d'une autre approximation (il est donc leur sommet commun).

La fonction f_{n_0} étant une couture et y appartenant, en vertu de (29) et (30), à plus de deux segments de B_{n_0}, l'ensemble $f^{-1}_{n_0}(y)$ se compose exactement de deux points, soit ξ_1 et ξ_2, dont chacun est un bout de deux segments de n_0-ième approximation, transformés par f_{n_0} en diagonales de deux carrés de n_0-ième approximation. Mais alors il en est de même des points ξ_1 et ξ_2 dans toutes les approximations ultérieures. Soit pour tout $n = n_0+1, n_0+2, \ldots$

$$(\xi_1) = I^n_{i_n} \cap I^n_{l_n}, \quad (\xi_2) = I^n_{j_n} \cap I^n_{m_n}, \quad i_n \neq l_n \quad \text{et} \quad j_n \neq m_n,$$

d'où

$$y = \tau(\xi_1) = \tau(\xi_2) \in F_n - \overline{F_n - (Q^n_{i_n} \cup Q^n_{l_n} \cup Q^n_{j_n} \cup Q^n_{m_n})}. \tag{31}$$

Or $\xi_1 \neq x \neq \xi_2$ entraîne $\tau(x) \neq y$. En effet, si x diffère de ξ_1 et ξ_2, il existe pour un $n > n_0$ suffisamment élevé un indice h_n tel que $1 \leqslant h_n \leqslant 41^n$, que

$$h_n \text{ diffère de } i_n, \text{ de } j_n, \text{ de } l_n \text{ et de } m_n \tag{32}$$

et que $x \in I^n_{h_n}$, d'où $f_k(x) \in Q^n_{h_n}$ pour $k \geqslant n$, d'où $\tau(x) \in Q^n_{h_n}$ en vertu de (21). On a $Q^n_{h_n} \cap (Q^n_{i_n} \cup Q^n_{l_n} \cup Q^n_{j_n} \cup Q^n_{m_n}) \subset \overline{F_n - (Q^n_{i_n} \cup Q^n_{l_n} \cup Q^n_{j_n} \cup Q^n_{m_n})}$ en vertu de (32). Le point $\tau(x)$ ne peut donc coïncider avec y en vertu de (31). Ainsi $\tau^{-1}(y)$ se réduit à deux points également dans le dernier cas.

Reste à démontrer que le continu $\mathcal{T} = \tau(I)$ est un tapis (plan). Comme image continue de I, il est localement connexe. Tout carré Q^n_i, où $n = 1, 2, \ldots$ et $i = 1, 2, \ldots, 41^n$, contenant des points rejetés au passage à la $(n+1)$-ième approximation, le continu $\tau(I)$ est non-dense dans E^2 en vertu de (25) et (26); il est donc une courbe (voir [3], II, p. 353, 12).

Pour montrer que les frontières C_m des composantes D_m de $E^2 - \tau(I)$ sont des courbes simples fermées, il suffit (voir [3], II, p. 360) de montrer qu'aucun point ne coupe $\tau(I)$. Désignons par U^n l'ensemble de tous les sommets q communs d'au moins trois carrés de n-ième approximation et par $V^n(q)$, pour $q \in U^n$, la somme des carrés de n-ième approximation au sommet q. L'ensemble $\bigcup_{i=1}^{41^n} Q^n_i - V^n(q)$ est connexe pour tout $q \in U^n$ (voir fig. 2). En multipliant les deux membres de (26) par Q^n_i, on constate que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, 41^n$, l'ensemble $Q^n_i \cap \tau(I)$ est semblable, donc homéomorphe, à $\tau(I)$. Il est par conséquent un continu, d'où la connexité de l'ensemble $\tau(I) - V^n(q) = \tau(I) \cap \big[\bigcup_{i=1}^{41^n} Q^n_i - V^n(q)\big] = \bigcup_{i=1}^{41^n} Q^n_i \cap \tau(I) - V^n(q)$. Ainsi

$$\overline{\tau(I) - V^n(q)} \quad \text{est un continu pour tout} \quad q \in U^n. \tag{33}$$

Soient maintenant y_1, y_2 et z trois points distincts appartenant à $\tau(I)$. Pour conclure que z ne coupe pas $\tau(I)$ entre y_1 et y_2, il s'agit de lier les points y_1 et y_2 par un sous-continu de $\tau(I) - (z)$. En désignant par n l'entier positif le plus petit pour lequel on a

$$2\sqrt{2}/7^n < \min[\varrho(z, y_1);\ \varrho(z, y_2)], \tag{34}$$

il existe un point $q \in U^n$ tel que

$$z \in F_n - \overline{F_n - \overline{V^n(q)}}. \tag{35}$$

En effet, si $z \in U^n$, on n'a qu'à poser $q = z$; si $z \in F_n - \overline{F_n - Q^n_i}$ pour un $i = 1, 2, \ldots, 41^n$, on a $Q^n_i \subset V^n(q)$ pour un sommet q de Q^n_i, ce qui entraîne (35), et si z est situé sur le côté commun d'un Q^n_i et d'un autre carré de n-ième approximation, un des deux bouts de ce côté satisfait à (35) pour la même raison.

Or $\delta(V^n(q)) = 2\sqrt{2}/7^n$ et $z \in V^n(q)$ entraînent l'appartenance de y_1 et y_2 à $\tau(I) - V^n(q)$ en vertu de (34). On a aussi $\overline{\tau(I) - V^n(q)} \subset \overline{F_n - V^n(q)}$, donc z non $\in \overline{\tau(I) - V^n(q)}$ en vertu de (35). L'ensemble $\overline{\tau(I) - V^n(q)}$ ainsi défini est donc, en vertu de (33), un continu liant y_1 à y_2 dans $\tau(I)$ sans passer par z.

Enfin, pour montrer que les frontières C_m des composantes D_m de $E^2 - \tau(I)$ sont disjointes, posons

$$H_m^n = D_m - \bigcup_{i=1}^{41^n} Q_i^n;$$

on a donc

$$H_m^1 \subset H_m^2 \subset \ldots \subset H_m^n \subset \ldots \tag{36}$$

en vertu de (24) et $\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m = E^2 - \tau(I) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E^2 - \bigcup_{i=1}^{41^n} Q_i^n)$ en vertu de (26). Par conséquent

$$D_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_m^n. \tag{37}$$

Or on obtient par définition H_m^{n+1} de H_m^n en ajoutant à H_m^n les carrés au côté $2/7^{n+1}$ (donc les réunions de quatre carrés au côté $1/7^{n+1}$) rejetés de $\bigcup_{i=1}^{41^n} Q_i^n$ au passage de la fonction f_n à la fonction f_{n+1} (cf. (9), (20) et la définition de l'opération Ω). Si $H_m^n \neq 0$, on a donc (³) $H_m^{n+1} - H_m^n \subset K(H_m^n, 2\sqrt{2}/7^{n+1})$, et comme $D_m = H_m^n \cup \bigcup_{j=n}^{\infty} (H_m^{j+1} - H_m^j)$ d'après (36) et (37), il vient

$$D_m \subset K\Big(H_m^n, \sum_{j=n}^{\infty} 2\sqrt{2}/7^{j+1}\Big) \tag{38}$$

pour tout n tel que $H_m^n \neq 0$.

Deux indices m_1 et m_2 étant donnés, il existe en vertu de (36) et (37) un n tel que $H_{m_1}^n \neq 0 \neq H_{m_2}^n$ et on a (⁴)

$$\varrho(H_{m_1}^n, H_{m_2}^n) \geqslant 1/7^n, \tag{39}$$

d'où

$$\overline{K(H_{m_1}^n, \sqrt{2}/3 \cdot 7^n)} \cap \overline{K(H_{m_2}^n, \sqrt{2}/3 \cdot 7^n)} = 0, \tag{40}$$

car $\sqrt{2}/3 \cdot 7^n < \sqrt{2{,}25}/3 \cdot 7^n = 0{,}5/7^n \leqslant \frac{1}{2}\varrho(H_{m_1}^n, H_{m_2}^n)$ d'après (39). Mais $\sum_{j=n}^{\infty} 2\sqrt{2}/7^{j+1} = \sqrt{2}/3 \cdot 7^n$ et par conséquent $\overline{D_{m_1}} \cap \overline{D_{m_2}} = 0$ d'après (38) et (40), d'où $C_{m_1} \cap C_{m_2} = 0$ pour les frontières de ces disques. La démonstration est achevée.

(³) $K(c, r)$ désignant l'intérieur du cercle de centre c et de rayon r; on formule $K(C, r) = \bigcup_{c \in C} K(c, r)$.

(⁴) $\varrho(X_1, X_2) = \inf \varrho(x_1, x_2)$ pour $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_2$.

6. Superpositions de deux coutures. Les théorèmes 3 et 4 entraînent le corollaire suivant:

Tout continu $\Gamma \subset S_2$ tel que $S_2 - \Gamma$ se compose tout au plus d'un nombre fini de disques aux frontières disjointes (ou est vide) peut être obtenu du segment rectiligne I par une transformation continue qui est une superposition de deux coutures.

De telles transformations à l'aide de coutures uniques sont impossibles en vertu d'un théorème de Hahn et Mazurkiewicz (voir [2], p. 42 et [4], p. 114).

En particulier (cf. Corollaire, p. 192), *il existe une transformation continue du segment I en sphère S_2 tout entière, et une autre en carré I^2 tout entier, composées chacune de deux coutures seulement.*

Travaux cités

[1] K. Borsuk and R. Molski, *On a class of continuous mappings*, ce volume, p. 84-98.

[2] H. Hahn, *Über die Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat*, Annali di Matematica, s. III, 21 (1913), p. 33-55.

[3] C. Kuratowski, *Topologie*, Monogr. Matem., Warszawa 1952.

[4] S. Mazurkiewicz, *O punktach wielokrotnych krzywych wypełniających obszar płaski*, Prace Mat.-Fiz. 26 (1915), p. 113-120 (en polonais).

[5] K. Menger, *Dimensionstheorie*, Leipzig-Berlin, 1928.

[6] — *Kurventheorie*, Leipzig-Berlin, 1932.

[7] W. Sierpiński, *Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée*, C. R. Paris 162 (1916), p. 629-631.

[8] G. T. Whyburn, *Über eine topologische Charakterisierung der Sierpiński'schen Kurve*, Ann. Soc. Pol. de Math. 9 (1930), p. 172.

[9] — *Concerning continuous curves without local separating points* (Abstract), Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1930), p. 631-632.

INSTYTUT MATEMATYCZNY UNIWERSYTETU WROCŁAWSKIEGO
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE WROCŁAW

Reçu par la Rédaction le 11. 5. 1957