# Über dimensionale Verschiebung

von

**J. Weier** (Fulda)

Sind $A$, $B$, metrische Räume, $\varepsilon$ eine positive Zahl, $\varphi$ eine stetige Abbildung von $A$ in $B$ und hat für jeden Punkt $p$ aus $B$ die Menge $\varphi^{-1}(p)$ einen Durchmesser $<\varepsilon$, so nennt man $\varphi$ eine $\varepsilon$-Abbildung. Ein bekannter Satz, dem für kombinatorische Untersuchungen über Dimensionstheorie gewisse Bedeutung zukommt, besagt: ist $A$ kompakt und bedeutet $m \geqslant 0$ eine ganze Zahl, so gilt $\dim A \leqslant m$ dann und nur dann, wenn zu jeder positiven Zahl $\varepsilon$ ein Polyeder $A'$ mit $\dim A' \leqslant m$ und eine $\varepsilon$-Abbildung $\gamma$ von $A$ in $A'$ existiert.

Seien hierauf $P$, $Q$ zusammenhängende geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeiten, $a$ ein fester Punkt aus $Q$ und $F$ eine Homotopieklasse stetiger Abbildungen von $P$ in $Q$, ferner $f$ eine Abbildung aus $F$ und $C$ die Menge $f^{-1}(a)$. Dann ist $C$ kompakt. Es bezeichne $n$ die Dimension von $C$. Bei der Untersuchung der dimensionalen Struktur der Menge $C$ erhebt sich sofort die Frage, welche Eigenschaften von $C$ mit Eigenschaften der Klasse $F$ in Zusammenhang stehen. Dabei zeigt sich:

*Zu jeder positiven Zahl $\varepsilon$ existieren eine Abbildung $f'$ in $F$ und eine $\varepsilon$-Abbildung $\chi$ von $C$ in die Menge $C' = (f')^{-1}(a)$ derart, daß $C'$ ein Polyeder einer Dimension $\leqslant n$ ist.*

Im folgenden wird das vorstehende Theorem für einen Sonderfall bewiesen: Zunächst wird $C$ als nulldimensional vorausgesetzt. Dieser Fall ist zwar nicht mehr elementar, aber unter den Fällen $\dim C \geqslant 0$ der einfachste. Überdies wird $\dim P = (\dim Q)+1$ vorausgesetzt. Für $\dim P \leqslant \dim Q$ ist das obige Theorem leicht einzusehen. Die Fälle mit $\dim P - \dim Q > 1$ sind wesentlich schwieriger zu behandeln als der Fall der Dimensionsdifferenz 1. Schließlich wird angenommen, daß $Q$ eine Sphäre. Diese letztere Voraussetzung dient lediglich dem Zwecke, das folgende Beweisverfahren, das mit einigen Ergänzungen unter Aufrechterhaltung der Bedingungen $\dim C = 0$ und $\dim P - \dim Q = 1$ auch für beliebiges $Q$ gilt, abzukürzen. Das obige Theorem ergibt dann für den in Rede stehenden Sonderfall: wenn $g$ eine stetige Abbildung von $P$ in $Q$ und $\dim g^{-1}(a) = 0$, so existiert eine zu $g$ homotope Abbildung $g'$ von $P$ in $Q$ derart, daß $(g')^{-1}(a)$ aus endlich vielen Punkten besteht; und es ist möglich, die Menge $g^{-1}(a)$ durch eine $\varepsilon$-Verschiebung in die Menge $(g')^{-1}(a)$ zu überführen.



**1. Verschiebung nulldimensionaler Lösungen in kleine Sphären.** Für zwei Punkte $p_1, p_2$ aus dem gleichen Euklidischen Raum bedeute $d(p_1, p_2)$ den Abstand dieser Punkte. Simplexe sind offen und gradlinig. Wenn $S_1, S_2, \ldots$ endlich viele solcher Simplexe, so heiße $\Sigma \bar{S}_i$ ein Euklidisches Polyeder. Sind $p$ ein Punkt aus einem Euklidischen Raum und $z$ eine positive Zahl, so nennen wir die Menge aller Punkte dieses Raumes, die von $p$ den Abstand $z$ haben, eine Euklidische Sphäre. Wenn $A$ ein Simplex und $t$ eine eineindeutige simpliziale Abbildung von $\bar{A}$ in einen Euklidischen Raum, so heiße $t(A)$ Zelle und $t(\bar{A}-A)$ simpliziale Sphäre.

Bis zum Schluß dieser Arbeit seien $Q$ eine geschlossene Euklidische Mannigfaltigkeit (das heißt ein Euklidisches Polyeder, das zu einer kompakten topologischen Mannigfaltigkeit homöomorph ist) in dem Euklidischen Raum $R$, $S$ eine Euklidische Sphäre in $R$, $a$ ein fester Punkt aus $S$, weiter

$$\dim Q = (\dim S)+1 \geqslant 4$$

und $F$ eine Homotopieklasse stetiger Abbildungen von $Q$ in $S$. Für jede Abbildung $f$ aus $F$ bedeute $A(f)$ die Menge $f^{-1}(a)$. Da $S$ zusammenhängend, sind die folgenden Sätze von der speziellen Wahl des Punktes $a$ unabhängig. Sind $B$ eine simpliziale 1-Sphäre, $C$ eine simpliziale Zerlegung von $B$ und $\{\varphi^\tau\}$ eine Homotopie eineindeutiger simplizialer Abbildungen von $C$ in $R$, ferner $B^\tau = \varphi^\tau(B)$, so heißt es im folgenden auch, die $B^\tau$ seien von $\tau$ stetig abhängende simpliziale 1-Sphären.

THEOREM 1. *Seien $f$ eine Abbildung aus $F$ mit $\dim A(f) = 0$ und $\alpha, \beta, \gamma$ positive Zahlen. Dann gibt es in $F$ eine Abbildung $f'$, über die gilt: es ist $d(f, f') < \alpha$; die Menge $A(f')$ besteht aus endlich vielen paarweis zueinander fremden simplizialen 1-Sphären, jede der letzteren Sphären hat einen Durchmesser $<\beta$; zu jedem Punkt $p$ aus $A(f)$ gibt es einen Punkt $p'$ in $A(f')$ mit $d(p, p') < \gamma$.*

Beweis. Die Menge $A(f)$ ist kompakt. Wegen $\dim A(f) = 0$ gibt es daher endlich viele Punkte $a_1, \ldots, a_m$ in $A(f)$ und zu jedem $a_i$ eine in $A(f)$ offene Menge $U_{i0}$ mit

$$a_i \in U_{i0}, \qquad (\overline{U}_{i0} - U_{i0})A(f) = 0, \qquad A(f) = \sum U_{i0}$$

und der Eigenschaft, daß jedes $U_{i0}$ einen Durchmesser $<\min(\beta, \gamma)$ hat.

Da $\overline{U}_{i0}-U_{i0}$ und $A(f)$ kompakte Mengen, ist der Abstand $d(\overline{U}_{i0}-U_{i0}, A(f))$ positiv. Somit existiert eine in $Q$ offene Menge $U_i$, deren Durchmesser $<\min(\beta,\gamma)$ und die

$$U_{i0}\subset U_i, \quad (\overline{U}_i-U_i)A(f)=0$$

erfüllt. Wir setzen noch $V_1=U_1$ und $V_i=U_i-(\overline{U}_1+\ldots+\overline{U}_{i-1})$ für $i>1$.

Die Mengen $V_1,\ldots,V_m$ sind paarweis zueinander fremd. Zum Beweis, daß $A(f)\subset\sum V_i$, seien $q$ ein Punkt aus $A(f)$ und $j$ eine Zahl, so daß $q\in U_j$ und, wenn $j>1$, weiter $q\notin U_1+\ldots+U_{j-1}$. Wenn $j=1$, so ist $U_j=V_j$, daher $q\in V_j$. Hierauf sei $j>1$. Dann ist $q\in U_j-(U_1+\ldots+U_{j-1})$. Der Erklärung der $U_i$ zufolge ist $q\notin\overline{U}_i-U_i$ für alle $i$, daher $q$ in $U_j-(\overline{U}_1+\ldots+\overline{U}_{j-1})=V_j$ gelegen.

Somit genügt es, statt des obigen Satzes zu zeigen:

THEOREM 2. *Seien $V$ eine in $Q$ offene Menge, $T$ eine simpliziale Sphäre mit $\dim S=\dim T$, $b$ ein Punkt aus $T$, $a$ eine positive Zahl, $f$ eine stetige Abbildung von $\overline{V}$ in $T$ und $b\in f(V)$ sowie $b\notin f(\overline{V}-V)$. Dann kann man $f$ unter Festhaltung auf $\overline{V}-V$ in eine Abbildung $f'$ von $\overline{V}$ in $T$ deformieren, so daß $d(f,f')<a$ und $(f')^{-1}(b)$ aus endlich vielen paarweis zueinander fremden 1-Sphären besteht.*

Beweis. Da $\overline{V}-V$ kompakt und $b\notin f(\overline{V}-V)$, existieren eine positive Zahl $\beta$ und eine in $Q$ offene Menge $W$ mit $\overline{W}\subset V$ und $d(b,f(\overline{V}-W))>\beta$. Offenbar ist die Zahl $d(\overline{V}-V,\overline{W})$ positiv.

Man kann annehmen, daß $T$ die Begrenzung einer konvexen offenen Menge. Sei $c$ ein Punkt aus der letzteren Menge. Dann existiert eine positive Zahl $\gamma$, so daß $(1-\tau)p+\tau p'\neq c$ für alle $(p,p',\tau)$, wobei $p,p'$ Punkte aus $T$ mit $d(p,p')<\gamma$ und $0\leqslant\tau\leqslant 1$. In allen $(p,p',\tau)$ der vorgenannten Art sei $x(p,p',\tau)$ die Projektion von $(1-\tau)p+\tau p'$ auf $T$ aus $c$. Es bezeichne $\delta$ eine Zahl mit $0<\delta<\gamma$, so daß

$$d(x(p,p',0),x(p,p',\tau))<\min(a,\beta)$$

für alle $(p,p',\tau)$ mit $d(p,p')<\delta$.

Alsdann gibt es eine simpliziale Zerlegung $K$ von $Q$, eine simpliziale Zerlegung $L$ von $T$ und eine simpliziale Abbildung $g$ von $K$ in $L$ mit $b\in g(V)$ und $d(f,g|\overline{V})<\delta$. Mann kann annehmen, es existiere in $L$ ein Simplex $L_1$, so daß $b\in L_1$ und $\dim L=\dim L_1$. Dann besteht $g^{-1}(b)$ aus endlich vielen paarweis zueinander fremden 1-Sphären.

Wir setzen nun $\lambda(p)=d(p,\overline{V}-V)/(d(p,\overline{V}-V)+d(p,W))$ und weiter $f'(p)=x(f(p),g(p),\lambda(p))$ für $p\in\overline{V}$. Für $p\in\overline{V}-W$ ist dann $d(b,f(p))>\beta$ und $d(f(p),f'(p))<\beta$, also $b\neq f'(p)$. Wegen $b\notin g(\overline{W}-W)$ liegt jede Komponente der Menge $g^{-1}(b)$ in $W$ oder in $Q-\overline{W}$. Aus $f'|W=g|W$ folgt daher, daß $(f')^{-1}(b)$ aus endlich vielen paarweis zueinander fremden 1-Sphären besteht.



**2. Über Verschiebung in der Dimension Null.** Seien $U$ eine in $Q$ offene Menge und $B^\tau$, $0\leqslant\tau\leqslant 1$, von $\tau$ stetig abhängende simpliziale 1-Sphären aus $U$, ferner $f$ eine stetige Abbildung von $\overline{U}$ in $S$. Es sei $B^0=f^{-1}(a)$, also $A(f)=B^0$. Dann gibt es, wie man leicht bestätigt, eine Homotopie $\{f^\tau\}$ von $\overline{U}$ in $S$, so daß

$$A(f^\tau)=B^\tau \quad\text{und}\quad f^\tau(\overline{U})=\overline{U} \quad\text{für alle } \tau,$$

ferner $f^0=f$ und $f^\tau|\overline{U}-U=f|\overline{U}-U$ für alle $\tau$.

THEOREM 3. *Seien $f$ eine stetige Abbildung von $Q$ in $S$ und $\gamma$ eine positive Zahl. Dann existieren positive Zahlen $a$ und $\beta$ mit der Eigenschaft: sind $f'$ eine stetige Abbildung von $Q$ in $S$, weiter $d(f,f')<a$, besteht die Menge $A(f')$ aus endlich vielen paarweis zueinander fremden simplizialen 1-Sphären und hat jede der letzteren Sphären einen Durchmesser $<\beta$, so gibt es eine zu $f$ homotope Abbildung $f''$ von $Q$ in $S$ derart, daß $A(f'')$ endlich und überdies zu jedem Punkte $p$ aus $A(f')$ ein Punkt $p'$ in $A(f'')$ mit $d(p,p')<\gamma$ existiert.*

Beweis. Bezeichne $\delta$ den Durchmesser von $S$ und $\varepsilon$ eine positive Zahl, so daß für jede in $Q$ gelegene Menge $B$, die einen Durchmesser $<\varepsilon$ hat, der Durchmesser von $f(B)$ kleiner als $\delta/2$ ist.

Sei $a=\delta/4$. Weiter gibt es eine positive Zahl $\beta$, so daß zu jeder Menge $Q_1$ aus $Q$, deren Durchmesser $<\beta$ ist, eine in $Q$ offene Zelle $U\supset Q_1$ existiert mit einem Durchmesser $<\min(\gamma,\varepsilon)$.

Hierauf seien $B_1,\ldots,B_m$ paarweis zueinander fremde simpliziale 1-Sphären aus $Q$, der Durchmesser eines jeden $B_i$ kleiner als $\beta$, weiter $f^1$ eine stetige Abbildung von $Q$ in $S$, schließlich $d(f,f^1)<a$ und $A(f^1)=\sum B_i$.

Nach der Erklärung von $\beta$ existieren in $Q$ offene Mengen $U_1,\ldots,U_m$, die die Eigenschaften haben: für alle $i$ ist $B_i\subset U_i$ und $U_i$ eine Zelle, der Durchmesser eines jeden $U_i$ ist $<\min(\gamma,\varepsilon)$. Wir wollen zeigen, daß

$$d(a,f^1(p))<\delta \quad\text{für}\quad p\in\sum\overline{U}_i.$$

Zum Beweis seien $j$ eine der Zahlen $1,2,\ldots,m$ und $q$ ein Punkt aus $\overline{U}_j$. Es gibt in $U_j$ einen Punkt $r$ mit $f^1(r)=a$. Da $\overline{U}_j$ einen Durchmesser $<\varepsilon$ hat, ist der Durchmesser von $f(\overline{U}_j)$ kleiner als $\delta/2$. Also

$$d(f(q),f(r))<\delta/2.$$

Nun ist $d(f,f^1)<a=\delta/4$ und $d(a,f^1(q))=d(f^1(r),f^1(q))$ nicht größer als

$$d(f^1(r),f(r))+d(f(r),f(q))+d(f(q),f^1(q)),$$

folglich $d(a, f^1(q)) < \delta$, wie behauptet. Daher ist $b \notin f^1(\sum \overline{U}_i)$, wenn $b$ den zu $a$ antipodisch gelegenen Punkt aus $S$ bedeutet.

Wegen $\dim Q \geqslant 4$ existieren paarweis zueinander fremde Simplexe $V_1, \ldots, V_m$ in $Q$ und von $\tau$ stetig abhängende simpliziale 1-Sphären

$$B_i^\tau, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

aus $Q$, über die gilt: für alle $(i, \tau)$ ist $B_i^\tau \subset U_i$, für alle $i$ ist

$$\dim V_i = \dim Q \quad \text{und} \quad B_i^1 \subset V_i \subset U_i,$$

für alle $\tau$ sind die Mengen $B_1^\tau, \ldots, B_m^\tau$ paarweis zueinander fremd.

Wie aus einer obigen Bemerkung leicht folgt, gibt es somit eine zu $f^1$ homotope Abbildung $f^2$ von $Q$ in $S$ mit

$$A(f^2) = \sum B_i^1 \quad \text{und} \quad f^2(U_i) = f^1(U_i) \quad \text{für alle } i.$$

Für $i = 1, 2, \ldots, m$ bedeute $b_i$ einen Punkt aus $B_i$. Dann genügt es zum Beweis von Theorem 3 zu zeigen: es existiert eine zu $f$ homotope Abbildung $f^3$ von $Q$ in $S$, so daß $A(f^3)$ aus den Punkten $b_i$ besteht. Denn für alle $i$ ist der Durchmesser von $U_i$ kleiner als $\gamma$, und es liegt $B_i + b_i$ in $U_i$. Die Existienz von $f^3$ wiederum ergibt sich aus folgender einfachen Aussage.

Seien $V$, $W$ Simplexe positiver Dimension, $c$ ein Punkt aus $V$, $e$ ein Punkt aus $W$, $g$ eine stetige Abbildung von $\overline{V}$ in $W$ und $e \notin g(\overline{V} - V)$. Dann existiert eine stetige Abbildung $g'$ von $\overline{V}$ in $W$ mit $g'|\overline{V} - V = g|\overline{V} - V$ und $g^{-1}(e) = c$. Zum Beweis sei $x(p)$ für $p \in \overline{V} - c$ die Projektion von $p$ auf $\overline{V} - V$ und $p = (1-\tau)c + \tau x(p)$, alsdann $g'(p) = (1-\tau)e + \tau g x(p)$, schließlich $g'(c) = e$.

Aus Theorem 2 und Theorem 3 folgt unmittelbar:

THEOREM 4. *Sind $f$ eine Abbildung aus $F$ mit $\dim A(f) = 0$ und $\varepsilon$ eine positive Zahl, so gibt es in $F$ eine Abbildung $f'$ derart, daß die Menge $A(f') \neq 0$ endlich ist und zu jedem Punkte $p$ aus $A(f)$ ein Punkt $p'$ in $A(f')$ mit $d(p, p') < \varepsilon$ existiert.*

Somit existiert eine stetige Abbildung $\varphi$ von $A(f)$ in $A(f')$ mit der Eigenschaft, daß $d(p, \varphi(p)) < \varepsilon/2$ für alle Punkte $p$ aus $A(f)$. Für jeden Punkt $p$ aus $A(f')$ besitzt daher $\varphi^{-1}(p)$ einen Durchmesser $< \varepsilon$. Also ist $\varphi$ eine $\varepsilon$-Verschiebung von $A(f)$ in $A(f')$.

**3. Eine Modifizierung des Verschiebungssatzes.** Sind $T$ eine Sphäre, $Q$ und $T$ gleichdimensional, $b$ ein Punkt aus $T$, $G$ eine Klasse homotoper Abbildungen von $Q$ in $T$ und $G_1$ die Menge jener Abbildungen $g$ aus $G$, für welche $g^{-1}(b)$ endlich, so ist $G_1$ in $G$ dicht, also $G = \overline{G}_1$. Sei $F_1$ die Menge derjenigen Abbildungen $f$ aus $F$, für die $A(f)$ endlich. Dann ist im allgemeinen $F \neq \overline{F}_1$. Wir wollen zeigen:



THEOREM 5. *Liegt in $F$ eine Abbildung $f$ mit $\dim A(f) = 0$, so liegt in $F$ eine Abbildung $f'$ derart, daß $A(f')$ aus genau einem Punkt besteht.*

Beweis. Nach den Ergebnissen des letzten Abschnittes genügt es zu zeigen: sind $f^0$ eine Abbildung aus $F$ und die Menge $A(f^0) \neq 0$ endlich, so existiert eine Abbildung $f^1$ in $F$ derart, daß $A(f^1)$ aus genau einem Punkte besteht.

Zum Nachweis der letzteren Aussage seien $a_1, \ldots, a_m$, $m > 1$, die Punkte der Menge $A(f^0)$ und $C_1, \ldots, C_{m-1}$ paarweis zueinander fremde eindimensionale Zellen in $Q$, so daß für alle $i$ die beiden Punkte $a_i \neq a_{i+1}$ die Eckpunkte von $C_i$ darstellen. Offenbar ist $(\sum \overline{C}_i - a_1) - a_m$ eine in $Q$ gelegene eindimensionale Zelle $C$.

Wie man sofort bestätigt, kann man annehmen, daß $f^0(\overline{C}) \neq S$. Es bedeute $b$ einen Punkt aus $S - f^0(\overline{C})$. Für jeden Punkt $p$ aus $S - b$ und jede Zahl $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ bezeichne $x(p, \tau)$ die Projektion des Punktes $(1-\tau)p + \tau a$ auf $S$ aus $b$.

Seien $U_1, \ldots, U_{m-1}$ in $Q$ offene paarweis zueinander fremde Mengen, so daß für alle $i$ die Beziehungen

$$C_i \subset U_i, \quad \overline{C}_i - C_i \subset \overline{U}_i - U_i, \quad f(\overline{U}_i) \subset S - b$$

gelten. Bezeichnet $j$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, m-1$, so sei $\lambda(p)$ für alle Punkte $p$ der Menge $(\overline{U}_j - a_j) - a_{j+1}$ die Zahl $d(p, \overline{U}_j - U_j)/(d(p, \overline{U}_j - U_j) + d(p, C_j))$. Eine eindeutige Abbildung $g_j$ von $\overline{U}_j$ in $S$ wird erklärt, wenn man $g_j(a_j) = g_j(a_{j+1}) = a$ und

$$g_j(p) = x(f^0(p), a, \lambda(p))$$

in den Punkten $p \in (\overline{U}_j - a_j) - a_{j+1}$ setzt. Wegen $f^0(a_j) = f^0(a_{j+1}) = a$ ist die Abbildung $g_j$ stetig. Es ist $g_j(p) = f^0(p)$ für $p \in \overline{U}_j - U_j$. Vermöge $x(f^0(p), a, \tau)$, $\lambda(p) \geqslant \tau \geqslant 0$, kann man $g_j$ unter Festhaltung auf $\overline{U}_j - U_j$ in $f^0|\overline{U}_j$ deformieren. Schließlich ist $g_j(p) = a$ für $p \in \overline{C}_j$ und $g_j(p) \neq a$ für $p \in \overline{U}_j - \overline{C}_j$.

Setzt man daher $g(p) = f^0(p)$ für $p \in Q - \sum U_i$ und $g(p) = g_i(p)$ für alle $(p, i)$ mit $p \in \overline{U}_i$ und $i = 1, 2, \ldots, m$, so stellt $g$ eine zu $f^0$ homotope Abbildung von $Q$ in $S$ dar, und es ist $A(g) = \overline{C}$. Mit Hilfe von $g$ läßt sich $f^1$ leicht erklären.

Es seien $V$ eine in $Q$ offene Menge, $V$ zu der abgeschlossenen Hülle eines Simplexes homöomorph, $\overline{C} \subset V$ und $b \notin g(\overline{V})$, ferner $c$ ein Punkt aus $V$. Dann gibt es eine stetige Abbildung $w$ von $\overline{V} - c$ auf $\overline{V} - V$ derart, daß $w(p) = p$ für $p \in \overline{V} - V$. Seien nun $\mu(p) = d(p, \overline{V} - V)/(d(p, \overline{V} - V) + d(p, c))$ in allen Punkten $p$ aus $\overline{V}$, weiter

$$f^1(p) = x(gw(p), a, \mu(p))$$

für $p \in \overline{V}-c$, $f^1(c)=a$ und $f^1(p)=g(p)$ für $p \in Q-V$. Dann hat $f^1$ die verlangten Eigenschaften, womit Theorem 5 bewiesen ist.

**4. Über verwandte Fragen.** Der eingangs erwähnte Satz über Verschiebung $n$-dimensionaler kompakter metrischer Räume in Polyeder einer Dimension $\leqslant n$ ist neuerdings [2] abgewandelt worden. In seiner ursprünglichen Form geht er auf P. Alexandroff (vergleiche [8], Seite 72) zurück. Die bei den obigen Überlegungen zugrunde gelegte Definition der Dimension ist die übliche Erklärung von K. Menger (vergleiche etwa [8] oder [13]). Die Frage, wieweit die Sätze der Einleitung ihre Gültigkeit behalten, wenn man eine modifizierte Dimensionserklärung benutzt, bleibt offen; zu dem in dieser Arbeit behandelten Fall der Dimension Null vergleiche man [3]. Was den zuletzt genannten Fall betrifft, so findet man in [10] ein Theorem, das hier insofern erwähnt werden darf, als sich dieses Theorem gleichfalls mit der Charakterisierung nulldimensionaler Mengen im Zusammenhang stetiger Transformationen befasst. Durch Theorem 5 dieser Arbeit wird die in Betracht gezogene nulldimensionale Menge auf einen einzigen Punkt kontrahiert. Es erhebt sich die Frage, wenn dieser letztere Punkt beseitigt werden kann, wann er „instabil" im Sinne von [8], Seite 74, ist. Das Problem instabiler Punkte ist mit einem in [1] erläuterten Problem „labiler" Punkte nahe verwandt.

Schließlich sei bemerkt, daß es eine bekannte Aufgabe ist, die dimensionale Struktur der Urbilder von Punkten zu untersuchen, wie dies in der vorliegenden Arbeit geschieht. Sätze, die in [4] bis [7] zu diesem Fragenkreis bewiesen wurden, sind später wieder aufgegriffen worden, man vergleiche etwa [11] und [12]. Von Interesse scheint auch ein Zusammenhang der dimensionalen Struktur reziproker Punktbilder mit Faserungsfragen, wie er in [9] untersucht wird.

### Zitate

[1] K. Borsuk and J. W. Jaworowski, *On labil and stabil points*, Fund. Math. 39 (1953), S. 159-175.

[2] L. M. Curtis and G. S. Young, *A theorem on dimension*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), S. 159-161.

[3] J. de Groot, *The dimension concept and dimension zero*, Math. Centrum Amsterdam, Centrumreeks 1 (1950), S. 26-35.

[4] W. Hurewicz, *Über stetige Bilder von Punktmengen*, Proc. Amsterdam 29 (1926), S. 1014-1017.

[5] — *Über stetige Bilder von Punktmengen II*, Proc. Amsterdam 30 (1927), S. 159-165.

[6] — *Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume*, Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss. 24 (1933), S. 754-768.

[7] — *Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen*, J. Reine Angew. Math. 169 (1933), S. 71-78.



[8] — and H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Math. Series 4 (1948).

[9] S. D. Liao, *Some theorems on the dimension of fibre spaces*, Amer. J. Math. 71 (1949), S. 231-240.

[10] G. Poprougénko, *Sur une propriété des espaces 0-dimensionnels*, Fund. Math. 15 (1929), S. 219-221.

[11] J. H. Roberts, *A theorem on dimension*, Duke Math. J. 8 (1941), S. 565-574.

[12] — *Open transformations and dimension*, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), S. 176-178.

[13] J. H. C. Whitehead, *Teoria della dimensione*, Bolletino Unione Mat. Ital. 5 (1950), S. 156-164.

*Reçu par la Rédaction le 4.3.1957*