Note sur la mesurabilité B de la dérivée supérieure

par

O. Hájek (Praha)

On sait que la dérivée supérieure $\bar{f}$ d'une fonction réelle finie f est mesurable L [1]). En modifiant cette démonstration on peut prouver que $\bar{f}$ est de troisième classe de Baire. M. Z. Zahorski m'a communiqué un résultat de sa Thèse (1942 et 1947, non publiée), à savoir que $\bar{f}$ est nécessairement de deuxième classe. Le but de notre note est de donner une simple démonstration de ce dernier résultat.

Soit I un intervalle non dégénéré de droite qui constitue notre "espace"; soit f une fonction réelle finie sur I. Tout ensemble convexe J sera appelé intervalle; J^0 sera son intérieur et $-J$ son complément (dans I). $Q(a,b)$ désigne pour $a\neq b$ le quotient

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b};$$

si c est entre a et b, on a

$$Q(a,b)=tQ(a,c)+(1-t)Q(c,b) \qquad \text{avec} \qquad 0<t<1,$$

d'où

$$\min Q(a,c),Q(c,b)\leqslant Q(a,b)\leqslant \max Q(a,c),Q(c,b).$$

$\{\bar{f}\leqslant q\}$ pour q réel désigne l'ensemble des $x\in I$ tels que $\bar{f}(x)\leqslant q$, et par analogie dans les autres cas n, k sont toujours des nombres naturels.

Lemme 1. *Chaque somme d'intervalles non dégénérés est de type F_σ.*

Un tel ensemble est en même temps une somme de ses composantes. Celles-ci sont aussi des intervalles, donc du type F_σ; elles sont non dégénérées et disjointes, donc leur système est dénombrable.

Lemme 2. *Si A est une somme d'intervalles non dégénérés, alors $-A$ est la différence d'un ensemble fermé et d'un ensemble dénombrable.*

D'après le lemme 1 on a

$$A=\bigcup_k J_k$$

[1]) Voir [2], p. 112, théorème de Banach, pour le cas où f est une fonction d'intervalles, et [1], p. 183, pour une simplification dans notre cas.

où J_k est un intervalle non dégénéré et la somme est disjointe. On démontre facilement que

$$\bigcap_k -J_k^0=\bigcap_k -J_k\cup C=-A\cup C$$

(somme disjointe), où

$$C\subset\bigcup_k (J_k-J_k^0)$$

est dénombrable.

Théorème. *Les ensembles $\{\bar{f}<q\}$ sont ambigus de classe 2, donc $\bar{f}$ est de classe 2.*

Occupons-nous d'abord de l'ensemble $\{\bar{f}\geqslant q\}$. Soit S_n le système de tous les intervalles fermés J tels que

$$J=(a,b)\subset I, \quad 0<b-a<n^{-1}, \quad Q(a,b)\geqslant q-n^{-1},$$

et posons

$$A=\bigcap_n\bigcup_{S_n} J.$$

Si $x\in\{\bar{f}\geqslant q\}$ on a $Q(x,y)\geqslant q-n^{-1}$ pour certains y voisins de x; donc pour chaque n, x appartient à un intervalle de S_n, $x\in A$. D'autre part, si $x\in A$, pour chaque n on trouve $J\in S_n$, $x\in J=(a,b)$; on a $x=a$ ou $x=b$ ou bien $a<x<b$ et

$$q-n^{-1}\leqslant Q(a,b)\leqslant \max Q(a,x),Q(x,b);$$

dans tous les cas on trouve des points y aussi proches de x que l'on veut et tels que

$$Q(x,y)\geqslant q-n^{-1}.$$

Nous avons ainsi prouvé que

$$\{\bar{f}\geqslant q\}=\bigcap_n\bigcup_{S_n} J.$$

L'ensemble

$$\{\bar{f}<q\}=-\{\bar{f}\geqslant q\}=\bigcup_n(-\bigcup_{S_n} J).$$

Du lemme 2 il s'ensuit que

$$-\bigcup_{S_n} J\cup C_n=F_n$$

où F_n est fermé et C_n dénombrable; donc on peut poser

$$\bigcup_n(-\bigcup_{S_n} J)\cup C=M$$

où C est dénombrable et disjoint avec

$$\bigcup_n(-\bigcup_{S_n} J),$$

M est un F_σ. Nous concluons que

$$\{\bar{f} < q\} = M - C$$

est la différence d'un ensemble F_σ et d'un ensemble dénombrable, donc c'est un ensemble ambigu de classe 2. Il en résulte que

$$\{\bar{f} \geqslant q\} \quad \text{et} \quad \{\bar{f} \leqslant q\} = \bigcap_n \{\bar{f} < q + n^{-1}\}$$

sont des $F_{\sigma\delta}$, ce qu'il fallait démontrer.

Il est aisé de trouver des fonctions f telles que $\bar{f}$ soit exactement de classe 2. M. Zahorski m'a informé qu'il existe les fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz telles que $\bar{f}$ soit exactement de classe 2.

Travaux cités

[1] V. Jarník, *Integrální počet II*, Praha 1955.
[2] S. Saks, *Theory of the integral*, New York 1937.

Reçu par la Rédaction le 15. 10. 1955

On theories categorical in power

by

A. Ehrenfeucht (Warszawa)

The aim of this paper is to give some applications of theorems on automorphisms of models [1] to the study of theories categorical in power [1]). The main result is contained in theorem 1 which states, roughly speaking, that no antisymmetric and connected relation is definable in a theory categorical in power $2^{\mathfrak{n}}$ where $\mathfrak{n} \geqslant \aleph_0$. As a corollary we find that no ordering relation can be defined in any such theory. The final theorems deal with the existence of mutually indiscernible elements in each model of a theory categorical in power $2^{\mathfrak{n}}$ as well as with the existence of universal models of such theories.

The terminology and notation used in this paper are the same as in [1]. For more detailed information concerning theories categorical in power and examples of such theories the reader is referred to papers [3] and [5].

Definitions. An n-ary relation $R(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ is *antisymmetric* in the set A if, for arbitrary $x_1, \ldots, x_n \in A$,

$$\neq(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{implies} \quad \sum_{\pi \in S_n} \sim R(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})\ ^{2)}$$

where S_n is the set of all permutations of the set $\{1, \ldots, n\}$.

The relation $R(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ is *connected* in the set A if, for arbitrary $x_1, \ldots, x_n \in A$,

$$\neq(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{implies} \quad \sum_{\pi \in S_n} R(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) .$$

Let α be an order-type and P a subset of S_n. We shall say that an n-ary relation R defined in a set A *belongs* to the set $K(\alpha, P, A_1)$ where A_1 is a subset of A if there is an ordering relation $\prec$ of the order-type α in the set A_1, such that, for arbitrary $x_1, \ldots, x_n$ in A_1,

$$x_1 \prec \ldots \prec x_n \quad \text{implies} \quad [R(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) \text{ if and only if } \pi \in P] .$$

[1]) A theory T is *categorical in power* $\mathfrak{m}$ if any two of its models of power $\mathfrak{m}$ are isomorphic.

[2]) $\neq(x_1, \ldots, x_n)$ is the conjunction of inequalities $x_i \neq x_j$ where $1 \leqslant i < j \leqslant n$. The letter $\sum$ stands for "there is" and the symbol $\sim$ stands for negation.