К теории когомотопических групп Борсука

А. Гранас (Торунь)

В настоящей заметке рассматриваются некоторые подгруппы n-мерной когомотопической группы Борсука и устанавливаются соотношения между рангами рассматриваемых групп. В качестве простого следствия одного из доказанных соотношений выводится известная теорема Фрагмена-Брауэра о разбиении евклидовых пространств. Одномерный случай рассматривался Эйленбергом (см. [2]).

1. Введём сначала обозначения употребляемые в дальнейшем, а также напомним кратко определение когомотопической группы.

Пространство непрерывных отображений компакта X в компакт Y будем обозначать через Y^X. Метрика в Y^X определяется формулой:

$$\varrho(f,g) = \sup_{x\in X} \varrho\big(f(x),g(x)\big), \qquad f,g \in Y^X.$$

Отображения $f, g \in S_n^X$ [1]) называем *гомотопными*, $f \sim g$, если существует отображение $h \in S_n^{X\times I}$ [2]) (I — замкнутый отрезок $\langle 0,1\rangle$), удовлетворяющее условию:

$$h(x,0) = f(x), \qquad h(x,1) = g(x) \qquad \text{для любого} \qquad x \in X.$$

Совокупность отображений $g \in S_n^X$ гомотопных отображению $f \in S_n^X$ будем называть *гомотопическим классом* отображения f и обозначим через (f). Пространство S_n^X распадается благодаря соотношению гомотопии на непересекающиеся гомотопические классы. Если отображенне $f \in S_n^X$ гомотопно отображению $y = \mathrm{const}$, то будем называть его *несущественным*, записывая $f \sim 1$.

Если A, A_0 два компакта $A_0 \subset A$, $f_0, g_0 \in S_n^{A_0}$, $f_0 \sim g_0$, $f_0 \subset f \in S_n^A$ [3]), то, в силу известной теоремы Борсука (см. [4], стр. 86), существует $g \in S_n^A$, такое что $g_0 \subset g$ и $g \sim f$. Гомотопический класс $(f) \subset S_n^A$ будем называть *продолжением* гомотопического класса $(f_0) \subset S_n^{A_0}$ на A.

---

[1]) Здесь S_n обозначает n-мерную сферу определяемую в $(n+1)$-ном евклидовом пространстве E_{n+1} уравнением $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$.

[2]) $X \times Y$ обозначает топологическое произведение пространств X и Y.

[3]) Запись $f_0 \subset f \in S_n^A$, где $f_0 \in S_n^{A_0}$, $A_0 \subset A$, означает, что f является продолжением f_0 на A, т. е. $f(x) = f_0(x)$ для всех $x \in A_0$.

Произведением $f\times g$ отображений $f,g\in S_n^X$ будем называть отображение $f\times g\in(S_n\times S_n)^X$, определённое формулой:

$$(f\times g)(x)=\big(f(x),g(x)\big)\quad \text{для любого}\quad x\in X.$$

Известно (см. [5], стр. 209-210), что *если размерность компакта X меньше $2n$, то для любого $(f\times g)\in(S_n\times S_n)^X$ существует $h\in(S_n\times S_n)^{X\times I}$, удовлетворяющее условию*:

$$h(X,1)\subset S_n\times b_0\cup b_0\times S_n,$$

$$h(x,0)=(f\times g)(x)\quad \textit{для любого}\quad x\in X$$

(здесь b_0 произвольно фиксированная точка сферы S_n).

Положим $\vartheta(b_0,y)=y$ для $(b_0,y)\in b_0\times S_n, \vartheta(\bar y,b_0)=\bar y$ для $(\bar y,b_0)\in S_n\times b_0$, $S_n\wedge S_n=b_0\times S_n\cup S_n\times b_0, \varphi(x)=h(x,1)$; тогда имеем $\vartheta\in S_n^{S_n\wedge S_n}$, $\varphi\in(S_n\wedge S_n)^X$, значит $\vartheta\varphi\in S_n^X$.

Сумму $(f)+(g)$ гомотопических классов $(f),(g)\subset S_n^X$ определяем формулой: $(f)+(g)=(\vartheta\varphi)$.

Известно (см. [5], стр. 210-214), что когда *размерность компакта X меньше $2n-1$, то совокупность гомотопических классов $(f)\subset S_n^X$ образует абелеву группу, если групповая операция определена как сложение гомотопических классов.*

Эту группу (n-мерную когомотопическую группу компакта X) будем обозначать символом $B_n(X)$, а её ранг [4]) — символом $b_n(X)$.

Нулём группы $B_n(X)$ является класс (const). Если определим отображение ϑ_n сферы S_n на себя формулой $\vartheta_n(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})=(x_1,x_2,\dots,-x_{n+1})$, тогда элемент $-(f)$, для $(f)\in B_n(X)$, совпадает с гомотопическим классом $(\vartheta_n f)\subset S_n^X$.

2. Пусть X компакт и A его замкнутое подмножество. Обозначим символом $H_n(X,A)$ множество всех $(f)\subset S_n^X$ таких, что $f|A\sim 1$, а символом $G_n(A,X)$ множество всех $(f)\subset S_n^A$, которые можно продолжить на X. Если $\dim X<2n-1$, то $H_n(X,A)$ образует подгруппу группы $B_n(X)$ (см. [3], стр. 45). Аналогично легко проверяется, что если $\dim X<2n-1$, то $G_n(A,X)$ является подгруппой группы $B_n(A)$.

Пусть $h_n(X,A)$ ранг группы $H_n(X,A)$, а $g_n(A,X)$ ранг группы $G_n(A,X)$.

Теорема 1. *Между рангами групп $B_n(X), H_n(X,A), G_n(A,X)$ имеет место соотношение*: $b_n(X)=h_n(X,A)+g_n(A,X)$.

[4]) Под *рангом* абелевой группы мы понимаем максимальное число линейно независимых элементов группы.

Доказательство. Ввиду неравенств $b_n(X)\geqslant g_n(A,X)$, $b_n(X)\geqslant h_n(X,A)$ можем предположить, что числа $h_n(X,A)$, $g_n(A,X)$ конечны. Пусть гомотопические классы:

$$(g_1),(g_2),\dots,(g_m)\subset S_n^A, \tag{1}$$

$$(h_1),(h_2),\dots,(h_k)\subset S_n^X, \tag{2}$$

образуют соответственно максимальную систему линейно независимых элементов группы $G_n(A,X)$ и группы $H_n(X,A)$, $m=g_n(A,X)$, $k=h_n(X,A)$.

Пусть $(\bar g_i)\subset S_n^X$ продолжение класса $(g_i)\subset S_n^A$ на X $(i=1,2,\dots,m)$; покажем, что система

$$(\bar g_1),(\bar g_2),\dots,(\bar g_m),(h_1),(h_2),\dots,(h_k)\subset S_n^X \tag{3}$$

есть максимальная система линейно независимых элементов группы $B_n(X)$.

Пусть имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{k}p_i(h_i)+\sum_{i=1}^{m}q_i(\bar g_i)=0, \tag{4}$$

где $p_1,p_2,\dots,p_k,q_1,q_2,\dots,q_m$ некоторые целочисленные коэффициенты. Рассматривая соотношение (4) на A, заключаем ввиду свойства системы (2), что все q_i равны нулю, затем, учитывая свойство системы (1), заключаем, что все p_i равны нулю, а это доказывает линейную независимость элементов системы (3).

Пусть (f) произвольный элемент группы $B_n(X)$. В силу свойства системы (1) существуют такие целочисленные, не равные одновременно нулю, коэффициенты $p_0,p_1,\dots,p_m$, что $p_0(f|A)+\sum_{i=1}^{m}p_i(g_i)=0$ $(p_0\neq 0)$. Положим $(h)=p_0(f)+\sum_{i=1}^{m}p_i(\bar g_i)$; имеем $(h|A)=0$, т. е. $h\in H_n(X,A)$. В силу свойства системы (2) найдутся такие целочисленные $q_0,q_1,\dots,q_k$ не все равные нулю $(q_0\neq 0)$, что $q_0(h)+\sum_{i=1}^{k}q_i(h_i)=0$. Отсюда получаем соотношение

$$\sum_{i=1}^{k}q_i(h_i)+p_0q_0(f)+\sum_{i=1}^{m}q_0p_i(\bar g_i)=0,\qquad \text{где}\qquad \sum_{i=1}^{k}q_i^2+\sum_{i=0}^{m}(p_iq_i)^2\neq 0,$$

что доказывает максимальность системы (3). Теорема доказана.

3. Пусть A и B два компакта. Обозначим через $P_n(A,B)$ совокупность всех $(f)\subset S_n^{A\cup B}$ таких, что $f|A\sim 1$, $f|B\sim 1$. Если $\dim(A\cup B)<2n-1$, то из очевидного равенства $P_n(A,B)=H_n(A\cup B,A)\cap H_n(A\cup B,B)$ заключаем, что $P_n(A,B)$ является подгруппой группы $B_n(A\cup B)$. Обозначим через $p_n(A,B)$ ранг группы $P_n(A,B)$ и покажем, что имеет место следующая

Теорема 2. *Ранги групп* $H_n(A\cup B, A\cap B)$, $H_n(A, A\cap B)$, $H_n(B, A\cap B)$, $P_n(A,B)$ *связаны соотношением*:

$$h_n(A\cup B, A\cap B) = h_n(A, A\cap B) + h_n(B\ A\cap B) + p_n(A,B).$$

Докажем предварительно следующую лемму:

Лемма. *Если* A *и* B *два компакта*, $f \in S_n^A$ *и* $f|A\cap B\sim 1$, *то существует продолжение* $\bar{f}$ *отображения* $f\subset \bar{f} \in S_n^{A\cup B}$ *на множество* $A\cup B$, *причём* $\bar{f}|B\sim 1$.

Действительно, $f|A\cap B\subset f^* \in S_n^B$ и $f^*\sim 1$. Определим $\bar{f}$ формулой: $\bar{f}(x) = f(x)$ для $x\in A$, $\bar{f}(x) = f^*(x)$ для $x \in B$.

Легко видеть, что функция $\bar{f}$ удовлетворяет условиям леммы.

Доказательство теоремы 2. Если $(g) \in H_n(B, A\cap B)$, то символом $(\bar{g})$ будем обозначать существующее в силу леммы такое продолжение гомотопического класса $(g)\subset S_n^B$ на $A\cup B$, что $\bar{g}|A\sim 1$; $(\bar{g}) \in H_n(A\cup B, A\cap B)$. Аналогично если $(f) \in H_n(A, A\cap B)$, то символом $(\bar{f})$ будем обозначать существующее в силу леммы такое продолжение класса $(f)\subset S_n^A$ на $A\cup B$, что $\bar{f}|B\sim 1$; $(\bar{f}) \in H_n(A\cup B, A\cap B)$. В силу неравенств $h_n(A, A\cap B) \leqslant h_n(A\cup B, A\cap B)$, $h_n(B, A\cap B) \leqslant h_n(A\cup B, A\cap B)$, $p_n(A,B) \leqslant h_n(A\cup B, A\cap B)$ можем предположить, что числа $p_n(A,B), h_n(A, A\cap B), h_n(B, A\cap B)$ конечны, ибо в противном случае теорема была бы доказана.

Пусть гомотопические классы:

$$(5)\qquad (f_1), (f_2), \ldots, (f_k) \subset S_n^A,$$

$$(6)\qquad (g_1), (g_2), \ldots, (g_l) \subset S_n^B,$$

$$(7)\qquad (h_1), (h_2), \ldots, (h_m) \subset S_n^{A\cup B}$$

образуют максимальную систему линейно независимых элементов соответственно групп $H_n(A, A\cap B), H_n(B, A\cap B), P_n(A,B)$; $k = h_n(A, A\cap B)$, $l = h_n(B, A\cap B)$, $m = p_n(A,B)$.

Рассмотрим гомотопические классы:

$$(8)\qquad (\bar{f}_1), (\bar{f}_2), \ldots, (\bar{f}_k) \subset S_n^{A\cup B};\quad \bar{f}_i|B\sim 1\quad (i=1,2,\ldots,k),$$

$$(9)\qquad (\bar{g}_1), (\bar{g}_2), \ldots, (g_l) \subset S_n^{A\cup B};\quad \bar{g}_i|A\sim 1\quad (i=1,2,\ldots,l),$$

и покажем, что система

$$(10)\qquad (\bar{f}_1), (\bar{f}_2), \ldots, (\bar{f}_k), (\bar{g}_1), (\bar{g}_2), \ldots, (\bar{g}_l), (h_1), (h_2), \ldots, (h_m)$$

образует максимальную систему линейно независимых элементов группы $H_n(A\cup B, A\cap B)$. Рассмотрим произвольную равную нулю линейную комбинацию элементов системы (10)

$$(11)\qquad \sum_{i=1}^{k} p_i(\bar{f}_i) + \sum_{i=1}^{l} q_i(\bar{g}_i) + \sum_{i=1}^{m} r_i(h_i) = 0$$

и покажем, что все целочисленные коэффициенты p_i, q_i, r_i равны нулю. Действительно, рассматривая (11) на A, имеем $h_i|A\sim 1$, $\bar{g}_i|A\sim 1$, $\bar{f}_i|A = f_i$; отсюда заключаем, что $\sum_{i=1}^{k} p_i(f_i) = 0$, а значит в силу свойства максимальности системы (5) все p_i равны нулю. Подобным образом, рассматривая (11) на B, заключаем (ввиду $h_i|B\sim 1$ $(i=1,2,\ldots,m)$, $\bar{f}_i|B\sim 1$ $(i=1,2,\ldots,k)$, $\bar{g}_i|B = g_i$ $(i=1,2,\ldots,l)$), что все q_i равны нулю и равенство (11) принимает вид $\sum_{i=1}^{m} r_i(h_i) = 0$, но отсюда в силу свойства максимальности системы (7) следует, что все r_i также равны нулю и линейная независимость элементов (10) доказана.

Пусть $(f) \in H_n(A\cup B, A\cap B)$. На A имеем, в силу свойства максимальности системы (5), $p_0(f|A) + \sum_{i=1}^{k} p_i(f_i) = 0$, где не все p_i равны нулю $(p_0\neq 0)$, а на B имеем, в силу свойства максимальности системы (6), $q_0(f|B) + \sum_{i=1}^{l} q_i(g_i) = 0$, где не все q_i равны нулю $(q_0\neq 0)$.

Рассмотрим на $A\cup B$ элемент $(H)\subset S_n^{A\cup B}$, определённый формулой

$$(12)\qquad (H) = p_0 q_0(f) + \sum_{i=1}^{k} q_0 p_i(\bar{f}_i) + \sum_{i=1}^{l} p_0 q_i(\bar{g}_i).$$

В силу двух предыдущих соотношений имеем $(H) \in P_n(A,B)$, значит имеет соотношение $r_0(H) + \sum_{i=1}^{m} r_i(h_i) = 0$, где не все r_i равны нулю $(r_0\neq 0)$; отсюда, в силу соотношения (12), имеем

$$r_0 p_0 q_0(f) + \sum_{i=1}^{k} r_0 q_0 p_i(\bar{f}_i) + \sum_{i=1}^{l} r_0 p_0 q_i(\bar{g}_i) + \sum_{i=1}^{m} r_i(h_i) = 0,$$

где не все целочисленные коэффициенты равны нулю $(r_0 p_0 q_0\neq 0)$. Отсюда следует максимальность системы (10). Теорема 2 тем самым доказана.

4. Пусть $F = \bar{F}\subset S_{n+1}$ и $b_0(S_{n+1}\setminus F)$ обозначает число компонент, на которые множество F разбивает S_{n+1}. К. Борсук доказал (см. [1]), что число $b_0(S_{n+1}\setminus F)$ однозначно определяется рангом $b_n(F)$ когомотопической группы $B_n(F)$ множества F при помощи формулы:

$$(13)\qquad b_0(S_{n+1}\setminus F) = b_n(F) + 1.$$

Отсюда, используя теорему 2, выведем следующее предложение:

Теорема Фрагмена-Брауэра. *Пусть* $A = \bar{A}$, $B = \bar{B}$, $A\cup B\subset S_{n+1}$; *если* $\dim A\cap B \leqslant n-2$, *то* $b_0(S_{n+1}\setminus(A\cup B)) = b_0(S_{n+1}\setminus A) + b_0(S_{n+1}\setminus B) - 1$.

Доказательство. На основании (13) доказательство, как легко видеть, сводится к доказательству равенства:

$$b_n(A \cup B) = b_n(A) + b_n(B). \tag{14}$$

Из $\dim A \cap B \leqslant n-2$ следует (см. [4], стр. 88), что если $f \in S_n^{A \cup B}$, $f|A \sim 1$, $f|B \sim 1$, то, $f \sim 1$ т. е. $P_n(A,B)=0$ $(p_n(A,B)=0)$. С другой стороны, предположение $\dim A \cap B \leqslant n-2$ влечёт за собой, что всякое $f \in S_n^{A \cup B}$ на $A \cap B$ несущественно (см. [4], стр. 124), а отсюда следуют равенства групп: $H_n(A \cup B, A \cap B) = B_n(A \cup B)$, $H_n(A, A \cap B) = B_n(A)$, $H_n(B, A \cap B) = B_n(B)$, а значит и рангов: $h_n(A \cup B, A \cap B) = b_n(A \cup B)$, $h_n(A, A \cap B) = b_n(A)$, $h_n(B, A \cap B) = b_n(B)$. Отсюда в силу теоремы 2 следует равенство (14) и теорема Фрагмена-Брауэра тем самым доказана.

Цитированная литература

[1] K. Borsuk, *Set theoretical approach to the disconnection theory of the Euclidean space,* Fund. Math. 37 (1950), p. 217-41.

[2] S. Eilenberg, *Transformations continues en circonférence et la topologie du plan,* Fund. Math. 26 (1936), p. 61-113.

[3] A. Granas, *On local disconnection of Euclidean spaces,* Fund. Math. 41 (1954), p. 42-48.

[4] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension theory,* Princeton 1941.

[5] E. Spanier, *Borsuk's cohomotopy groups,* Annals of Math. 50 (1949), p. 203-245.

Reçu par la Rédaction le 15. 1. 1956

On symmetric products

by

R. Molski (Warszawa)

1. Symmetric products. If M is a metric space, 2^M denotes the space of all closed, bounded and non-empty sets $E \subset X$ metrized by the formula

$$\varrho(E_1, E_2) = \max[\sup_{x \in E_2} \varrho(x, E_1), \sup_{x \in E_1} \varrho(x, E_2)].$$

Let $E_1, E_2, \ldots, E_n$ be bounded and non-empty subsets of M. By the *symmetric product* ([1] and [2]) of the sets $E_1, \ldots, E_n$ we understand the subset $E_1 \circ \ldots \circ E_n$ of 2^M composed of all sets $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ [1]) with $x_i \in E_i$ for $i = 1, 2, \ldots, n$. In case $E_1 = \ldots = E_n = E$ the product $E_1 \circ \ldots \circ E_n$ is called the nth *symmetric power* of E and denoted by $E^{(n)}$.

If U is a neighbourhood of x_i in E_i $(i = 1, \ldots, n)$, then the set of all points $\{x_1', x_2', \ldots, x_n'\}$ of $E_1 \circ \ldots \circ E_n$ such that $U_i \cap \{x_1', \ldots, x_n'\} \neq 0$ for $i = 1, 2, \ldots, n$ is a *neighbourhood* of $\{x_1, \ldots, x_n\}$ in $E_1 \circ \ldots \circ E_n$.

In the case, where E_i are disjoint sets, the symmetric product is identical with the Cartesian product.

Evidently, if h is a homeomorphism mapping M onto another space $h(M)$, then the symmetric product $E_1 \circ \ldots \circ E_n$ is homeomorphic with the symmetric product $h(E_1) \circ \ldots \circ h(E_n)$.

Let Q_m denote the m-dimensional Euclidean cube. It is known (cf. [2]), that for $n = 1, 2, 3$, Q_1^n (*i. e.*, the nth symmetric power of the segment) is homeomorphic with Q_n, but, for $n \geqslant 4$, $Q_1^{(n)}$ is not homeomorphic with any subset of the Euclidean space R^n. In this note it is shown that $Q_2^{(2)}$ is homeomorphic with Q_4, but, for $n \geqslant 3$, $Q_2^{(n)}$ and $Q_n^{(2)}$ are not homeomorphic with any subset of R^{2n}.

2. An elementary lemma. We need the following

LEMMA. *The set P of all points p lying in the Euclidean 4-space R^4 and having the form*

---

[1]) We denote by $\{x_1, \ldots, x_n\}$ the set composed of the elements $x_1, \ldots, x_n$, and we denote by $(x_1, \ldots, x_n)$ the ordered system $x_1, \ldots, x_n$.