On locally compact topological groups of power of continuum

by

A. Hulanicki (Wrocław)

In the paper we shall prove the following theorem:

A locally compact topological group of power of continuum is metrizable.

The proof of the theorem is based on the continuum hypothesis or rather on the weaker implication: if $a > \aleph_0$ then $2^a > 2^{\aleph_0}$.

We are going to prove that a locally compact topological group G of power of continuum satisfies the first axiom of countability which is known to be a satisfactory condition for the existence of an invariant metric [1]).

Let us form the transfinite sequence

$$(*) \qquad R^0, \ldots, R^a, \ldots$$

the terms of which are families R^a of compact subsets of the group G. The family R^a includes sets $A^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots}$ with a transfinite system of indices $i_1, \ldots, i_\lambda, \ldots$ of the type a, each of the indices i_λ taking the values 0 or 1.

The sequence is defined inductively as follows:

$R^0 = (A^0) = (\bar{V})$, where V is an arbitrary open set with a compact closure.

Let us assume that we have defined all R^β where $\beta < a$. Let us consider two cases: 1. $a = a' + 1$, 2. a is a limit-number.

1. If any of $A^{a'}_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots}$ belonging to $R^{a'}$ consists of one element, then $R^{a'}$ is the last term of our sequence. Let $x_1, x_2 \in A^{a'}_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots}$ and $x_1 \neq x_2$, let us take such two neighbourhoods $V^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots,0}$, $V^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots,1} \subset G$ that $x_1 \in V^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots,0}$, $x_2 \in V^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots,1}$; $\bar{V}^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots,0}$ and $\bar{V}^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots,1}$ are compact and $\bar{V}^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots,0} \cap \bar{V}^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots,1} = 0$.

---

[1]) S. Kakutani, *Über die Metrisation der topologischen Gruppen*, Proc. Imp. Acad. Jap. 12 (1936), p. 82.

Let the family $\{S_\gamma\}_{\gamma<a}$ consist of all finite intersections of sets of family $\{V^\beta_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots}\}_{\beta<a}$. We define

$$A^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots,0} = \bigcap_{\gamma<a} \overline{S_\gamma \cap V^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots,0}},$$

$$A^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots,1} = \bigcap_{\gamma<a} \overline{S_\gamma \cap V^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots,1}}.$$

2. If a is limit-number, then

$$A^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots,i_\beta,\ldots} = \bigcap_{\gamma<a} \bar{S}_\gamma.$$

It will easily be noticed that the sequence $(*)$ has the following properties:

1. For any sequence $i_1, \ldots, i_\lambda, \ldots$ of zeros and unities of type a there is a corresponding set $A^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots}$.

2. If $a > \beta$ then $A^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots,i_\beta,\ldots} \subset A^\beta_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots}$.

3. In view of the compactness of $A^0 = \bar{V}$ all sets $A^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots}$ are non-void.

4. All sets of the family R^a are disjoint.

Assume that the one-element set $(x) = A^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots}$ belongs to R^a and $a < \omega_1$. The sequence $i_1, \ldots, i_\lambda, \ldots$ is of a countable type. Let us write according to the definition:

$$A^1_{i_1} = \bar{V}_{i_1}, \quad A^2_{i_1,i_2} = \overline{V_{i_1} \cap V_{i_1,i_2}}, \quad \ldots, \quad A_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots} = \bigcap_{\gamma<a} S_\gamma.$$

Arrange the sets S_γ in a sequence of type ω:

$$F_1, F_2, \ldots$$

It follows from the definition of $A^a_{i_1,\ldots,i_\lambda,\ldots}$ that each finite intersection $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_n$ is non-void.

Form the sequence:

$$\bar{W}_1 = \bar{F}_1, \quad \bar{W}_2 = \overline{F_1 \cap F_2}, \quad \ldots, \quad \bar{W}_n = \overline{F_1 \cap \ldots \cap F_n}, \ldots$$

where the sets W_i are open. We have $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{W}_n = (x)$. Let $y_n \in W_n$. Take the countable family of open sets $\bar{W}_n y_n^{-1} W_n$. It can easily be verified that $x \in \bar{W}_n y_n^{-1} W_n$ for each n. We are going to prove that

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{W}_n y_n^{-1} W_n = (x).$$

Let us assume that $z \in \bar{W}_n y_n^{-1} W_n$ for each n, and then let $z = a_n y_n^{-1} b_n$, where $a_n \in \bar{W}_n$, and $b_n \in W_n$. The sequences $\{a_n\}$, $\{y_n\}$, $\{b_n\}$ are convergent to x. It suffices to show that for each neighbourhood U of a point x there exists such an n that $\overline{W}_n \subset U$. We have $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{W}_n = (x)$ or $\overline{W}_1 = \overline{F}_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{W}'_n \cap U = G$. In view of the compactness of W_1 there exists a finite covering of $\overline{W}_1$:

$$\overline{W}'_{n_1} \cap \ldots \cap \overline{W}'_{n_k} \cap U \qquad (n_1 < \ldots < n_k).$$

It will easily be noticed that if $\overline{W}_n \subset \overline{W}_{n_k}$ then $\overline{W}_n \subset U$.

From the convergence of the sequences $\{a_n\}$, $\{y_n\}$, $\{b_n\}$ to x, it follows that $z = \lim z_n = \lim a_n \lim y_n^{-1} \lim b_n = x$.

Thus we have shown that the countable family of open sets $\overline{W}_n y_n^{-1} W_n$ has as its intersection one point x, which is known to be equivalent, for locally compact spaces, to the first axiom of countability.

Thus we have proved that the assumption that G does not satisfy the first axiom of countability implies that the family R^{ω_1} belongs to the sequence $(*)$. To any sequence of zeros and unities of type ω_1 corresponds a set of the family R^{ω_1}. Hence $\overline{\overline{R}}^{\omega_1} = 2^{\aleph_1}$ and further, in view of the disjointness of the sets belonging to R^{ω_1}, we have $\overline{\overline{G}} \geqslant 2^{\aleph_1}$. It follows from the continuum hypothesis that $\overline{\overline{G}} > 2^{\aleph_0}$, which contradicts the assumption about the power of the group G.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 13. 1. 1956

К теории когомотопических групп Борсука

А. Гранас (Торунь)

В настоящей заметке рассматриваются некоторые подгруппы n-мерной когомотопической группы Борсука и устанавливаются соотношения между рангами рассматриваемых групп. В качестве простого следствия одного из доказанных соотношений выводится известная теорема Фрагмена-Брауэра о разбиении евклидовых пространств. Одномерный случай рассматривался Эйленбергом (см. [2]).

1. Введём сначала обозначения употребляемые в дальнейшем, а также напомним кратко определение когомотопической группы.

Пространство непрерывных отображений компакта X в компакт Y будем обозначать через Y^X. Метрика в Y^X определяется формулой:

$$\varrho(f,g) = \sup_{x \in X} \varrho\big(f(x), g(x)\big), \qquad f, g \in Y^X.$$

Отображения $f, g \in S_n^X$ [1]) называем *гомотопными*, $f \sim g$, если существует отображение $h \in S_n^{X \times I}$ [2]) (I — замкнутый отрезок $\langle 0,1 \rangle$), удовлетворяющее условию:

$$h(x,0) = f(x), \qquad h(x,1) = g(x) \qquad \text{для любого} \quad x \in X.$$

Совокупность отображений $g \in S_n^X$ гомотопных отображению $f \in S_n^X$ будем называть *гомотопическим классом* отображения f и обозначим через (f). Пространство S_n^X распадается благодаря соотношению гомотопии на непересекающиеся гомотопические классы. Если отображенне $f \in S_n^X$ гомотопно отображению $y = \text{const}$, то будем называть его *несущественным*, записывая $f \sim 1$.

Если A, A_0 два компакта $A_0 \subset A$, $f_0, g_0 \in S_n^{A_0}$, $f_0 \sim g_0$, $f_0 \subset f \in S_n^A$ [3]), то, в силу известной теоремы Борсука (см. [4], стр. 86), существует $g \in S_n^A$, такое что $g_0 \subset g$ и $g \sim f$. Гомотопический класс $(f) \subset S_n^A$ будем называть *продолжением* гомотопического класса $(f_0) \subset S_n^{A_0}$ на A.

---

[1]) Здесь S_n обозначает n-мерную сферу определяемую в $(n+1)$-ном евклидовом пространстве E_{n+1} уравнением $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$.

[2]) $X \times Y$ обозначает топологическое произведение пространств X и Y.

[3]) Запись $f_0 \subset f \in S_n^A$, где $f_0 \in S_n^{A_0}$, $A_0 \subset A$, означает, что f является продолжением f_0 на A, т. е. $f(x) = f_0(x)$ для всех $x \in A_0$.