Sur certains problèmes de Choquet et de Zahorski concernant les fonctions dérivées

par

J. S. Lipiński (Łódź)

G. Choquet a établi en 1946 la condition nécessaire pour qu'un ensemble soit l'ensemble $\{f'(x)=a\}$, la dérivée étant bornée, et il a posé la question de savoir si cette condition est suffisante. Son énoncé est le suivant:

„Définition. Soit E un sous-ensemble de l'axe $x'x$. Pour tout point x_0 de cet axe, et tout nombre $\lambda>0$, désignons par $\delta(x_0,x,\lambda)$ l'épaisseur moyenne de E sur le segment d'extrémités x,x' tel que $(x'-x)=\lambda(x-x_0)$. Nous dirons alors que le point x_0 est *point d'accumulation en mesure de E* si l'on a

$$\limsup_{\lambda\to 0}\,[\limsup_{x\to x_0}\delta(x_0,x,\lambda)]=1.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le

THÉORÈME 27. *Une condition nécessaire pour qu'un ensemble linéaire E soit identique à l'ensemble des points en lesquels une fonction dérivée, bornée en module, prend une valeur finie donnée est que E soit un G_δ contenant tous les points d'accumulation en mesure.*

(*) La question reste posée de savoir si cette condition nécessaire est aussi suffisante.“ ([1], p. 221).

En 1940 Z. Zahorski a trouvé la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit l'ensemble $\{f'(x)>a\}$, la dérivée $f'(x)$ étant bornée, et il l'a publiée sans démonstration en 1941 dans le travail [2], p. 500 et 510, condition (W). En 1950 il a publié la démonstration d'une condition équivalente à la condition (W), à savoir la condition M_4 (appartenance à la classe M_4), et il a posé la question suivante:

(**) „Peut-on, pour $E\neq 0$, $E\in F_\sigma$, formuler la condition M_4 de la manière suivante: pour tout $x\in E$ il existe $\eta_x>0$ tel qu'il résulte de $I\to x$, $|I|^{-1}\cdot|E\cdot I|\leqslant\eta_x$ que

$$\lim |I|\cdot \mathrm{dist}\,(x,I)^{-1}=0\ ^{1}).“\qquad ([3],\ \text{p. } 52,\ \text{probl. IX}).$$

[1]) I désigne un segment fermé.

Voici la condition M_4:

„L'ensemble E du type F_σ n'étant pas vide, je dis qu'il remplit la condition M_4 (qu'il appartient à la classe M_4) s'il existe une suite d'ensembles fermés $\{F_n\}$ et une suite de nombres $\{\eta_n\}$, $0<\eta_n<1$, telles que $E=\sum_{n=1}^{\infty}F_n$, et que pour chaque $x\in F_n$ et tout $c>0$ il existe un nombre $\theta(x,c)>0$ jouissant de la propriété suivante: pour tous les h et h_1 tels que $h\cdot h_1>0$, $h/h_1<c$, $|h+h_1|<\theta(x,c)$ on a

$$\frac{|E\cdot(x+h,x+h+h_1)|}{|h_1|}>\eta_n\ ^{2}).“\qquad ([3],\ \text{p. } 3).$$

Je dirai que le point $x\in E$ est *du type M_4* pour l'ensemble E s'il existe un nombre η_x de l'intervalle $(0,1)$ tel que, pour tout nombre $c>0$, il existe un nombre $\theta(x,c)>0$ ayant la propriété suivante: pour chaque couple de nombres h, h_1, tel que $hh_1>0$, $h/h_1<c$, $|h+h_1|<\theta(x,c)$ l'inégalité

$$\frac{|E(x+h,\,x+h+h_1)|}{|h_1|}<\eta_x$$

est vraie. On voit que chaque point $x\in E$ qui est un point de densité de l'ensemble E est du type M_4 pour l'ensemble E, η_x étant un nombre arbitraire de l'intervalle $(0,1)$, p. ex. $\eta_x=\frac{1}{2}$. Dans le cas contraire la densité inférieure serait inférieure ou égale à $1-2^{-1}(c+1)^{-1}$ où c est un nombre positif. Tout ensemble $A\in M_4$ est de classe F_σ et il contient seulement des points du type M_4 pour A. Il est aisé de vérifier que le problème (**) équivaut au suivant:

(***) Tout ensemble $A\in F_\sigma$, composé uniquement de points du type M_4 pour A, est-il de classe M_4?

Dans ce travail je résous ce problème, et aussi le problème (*), par la négative. En effet, je vais construire un ensemble $D\in F_\sigma$, composé de points du type M_4 pour D, n'appartenant pas à la classe M_4. Le complément de l'ensemble D remplit la condition nécessaire, établie par Choquet, pour l'ensemble $\{f'(x)=a\}$, mais il n'est identique à l'ensemble $\{f'(x)=a\}$ pour aucune dérivée bornée.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble ternaire de Cantor, construit sur le segment $\langle 0,1\rangle$, et $(1-\mathcal{C})$ son complément par rapport à ce segment. $1-\mathcal{C}=\sum_{i=1}^{\infty}G_i$, où G_i sont des segments ouverts, bilatéralement contigus à l'ensemble $\mathcal{C}$. Les longueurs des segments G_i sont des nombres de la forme 3^{-p} $(p=1,2,3,\ldots)$. Je désigne les extrémités du segment G_i par a_i et b_i $(a_i<b_i)$.

[2]) Je désigne aussi par (a,b) l'intervalle (b,a), si l'inégalité $a<b$ n'est pas établie.

Sur chaque segment G_i de longueur 3^{-p} je prends une suite de segments fermés $\{I_{ik}\}$, où

(1) $$I_{ik}=\langle a_i+2^{-k}-2^{-k}(p+2)^{-1},\, a_i+2^{-k}\rangle$$

$(2^{-k}<(b_i-a_i)/4$, ce qui donne $k>2+p\ln 3/\ln 2)$. Soit $A_i=G_i-\sum\limits_k I_{ik}$. Les ensembles A_i sont ouverts. Supposons que x vérifie l'inégalité $a_i<x\leqslant b_i$. Je vais trouver une borne inférieure de la densité moyenne de l'ensemble A_i sur le segment (a_i,x). Je désigne par $\bar{k}$ le plus petit nombre naturel k tel que $a_i+2^{-k}<x$. La densité moyenne de l'ensemble A_i sur le segment $(a_i+2^{-\bar{k}},x)$ est égale ou supérieure à $(2^{-\bar{k}}-2^{-\bar{k}+1}(p+2)^{-1})\colon 2^{-\bar{k}}=1-2(p+2)^{-1}$. Sur le segment $(a_i,a_i+2^{-\bar{k}})$ la densité moyenne de l'ensemble A_i est égale à $\big(2^{-\bar{k}}-\sum\limits_{k=\bar{k}}^{\infty}2^{-\bar{k}}(p+2)^{-1}\big)\colon 2^{-\bar{k}}=1-2(p+2)^{-1}$. Il en résulte, pour tout le segment (a_i,x),

(2) $$\frac{|A_i(a_i,x)|}{|(a_i,x)|}\geqslant 1-\frac{2}{p+2}\quad\text{pour}\quad a_i<x\leqslant b_i,\ |G_i|=3^{-p}.$$

On obtient aussi aisément la limitation suivante:

(3) $$\frac{|A_i(x,b_i)|}{|(x,b_i)|}\geqslant 1-\frac{2}{p+2}\quad\text{pour}\quad a_i\leqslant x<b_i,\ |G_i|=3^{-p}.$$

En effet il est facile de prouver que les densités sont les plus petites quand $x=a_i+2^{-k}-2^{-k}(p+2)^{-1}$. Le segment $s=\big(a_i+2^{-k-1},\, a_i+2^{-k}-2^{-k}(p+2)^{-1}\big)$ est plus court que $(b_i-a_i)/4$, et (x,b_i) contient $\big((a_i+b_i)/2,b_i\big)\supset(b_i-|s|,\,b_i)$. La mesure de $R=(x-|s|,\,x\rangle+A_i(x,b_i-|s|)$ est égale à la mesure de $A_i(x,b_i)$ et l'intervalle $(x-|s|,\,b_i-|s|)$ est congruent à (x,b_i). L'ensemble R est composé de segments tels que la densité de R sur ces segments est égale à $1-2/(p+2)$ ou 1, et la densité moyenne de R dans l'intervalle $(x-|s|,\,b_i-|s|)$, est égale à la densité $|A_i(x,b_i)|/(b_i-x)$, ce qui donne (3).

Posons $E_1=(-1,0\rangle+\langle 1,2)+[\mathcal{C}-\sum\limits_{i=1}^{\infty}\bar{G}_i]+\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. Si le point $x_0\in E_1$, la densité à droite de l'ensemble E_1 en ce point est égale à 1. Pour les points intérieurs de l'ensemble E_1 et pour $x_0=1$ ceci est évident. Pour les autres points, prenons un nombre quelconque $\varepsilon>0$. L'inégalité $1-2/(p+2)<1-\varepsilon$ n'est vérifiée que pour un nombre fini de nombres p. Soit $\bar{p}$ le plus grand des nombres p pour lesquels cette inégalité est vraie. Le nombre des segments $\bar{G}_i$, situés à droite de x_0 et tels que $|\bar{G}_i|\geqslant 3^{-\bar{p}}$, est fini et leur somme forme un ensemble fermé que je désigne par B. Je pose $\delta=\operatorname{dist}(x_0,B+\{1\})$. Puisque $x_0\notin B$, l'on a $\delta>0$. Je choisis un nombre positif quelconque $h<\delta$. Nous avons alors $(x_0,x_0+h)=(x_0,x_0+h)\mathcal{C}+\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x_0,x_0+h)G_i$. L'ensemble $(x_0,x_0+h)\mathcal{C}$ est de mesure nulle, les autres composantes non vides sont des segments G_i et l'un d'eux peut être le segment (a_i,x), où $x=x_0+h<b_i$. Pour ces composantes nous avons $|G_i|\leqslant 3^{-\bar{p}-1}$, et, en vertu de (2), la densité moyenne de l'ensemble A_i sur chacun d'eux est au moins égale à $1-2/(\bar{p}+3)\geqslant 1-\varepsilon$. Il en résulte que la densité moyenne sur tout le segment (x_0,x_0+h) est limitée inférieurement par le nombre $1-\varepsilon$, la densité à droite de l'ensemble E_1 au point x_0 est donc égale à 1. En profitant de la formule (3) on démontre de même que la densité à gauche de l'ensemble E_1 aux points de l'ensemble E_1 est égale à 1. L'ensemble E_1 est donc composé de ses points de densité.

Sur chacun des segments I_{ik} je prends $k+1$ points $x_0<x_1<\ldots<x_k$, $x_0=\min I_{ik}$, $x_k=\max I_{ik}$, qui partagent ce segment en k parties égales. Je pose $D_{ik}=\sum\limits_{s=1}^{k}(x_{s-1},x_{s-1}+(x_s-x_{s-1})/p)$ où $|G_i|=b_i-a_i=3^{-p}$. Je vais trouver une limitation inférieure de la densité moyenne de l'ensemble $A_i+\sum\limits_k D_{ik}$ sur les segments $(a_i+h,\, a_i+h+h_1)\subset(a_i,b_i)$, où $h+h_1$ est suffisamment petit, $h>0$, $h_1>0$, et $hh_1^{-1}<c$. Sur les segments du segment $(a_i+h,\, a_i+h+h_1)$ qui sont contenus dans A_i la densité moyenne de l'ensemble $A_i+\sum\limits_k D_{ik}$ est égale à 1. Lorsque tout l'intérieur du segment I_{ik} est contenu dans $(a_i+h,\, a_i+h+h_1)$, la densité moyenne sur le segment qui forme cet intérieur est égale à $1/p$. Il reste à considérer la densité moyenne sur deux segments au plus du segment $(a_i+h,\, a_i+h+h_1)$, qui sont des parties propres de certains I_{ik} (s'il y en a), ainsi que l'influence que cette densité a sur la densité moyenne sur tout le segment $(a_i+h,\, a_i+h+h_1)$. Il est aisé de vérifier que lorsqu'il y a deux segments de ce genre, alors il se trouve entre eux une partie du segment $(a_i+h,\, a_i+h+h_1)$, composée de I_{ik} entiers et de segments de l'ensemble A_i, contenant plus d'un quart de la longueur du segment $(a_i+h,\, a_i+h+h_1)$, c'est-à-dire la longueur de cette partie est supérieure à $h_1/4$. Donc, même s'il n'y avait pas de points de l'ensemble $A_i+\sum\limits_k D_{ik}$ sur ces 2 segments, sa densité moyenne sur tout le segment $(a_i+h,\, a_i+h+h_1)$ serait supérieure à $\frac{1}{4}$ de la densité sur la partie intérieure considérée, qui est plus grande que $1/p$ (car tel est le minimum de la densité moyenne sur différents segments I_{ik} et de celle de l'ensemble A_i, dont cette partie intérieure est composée). Dans le cas envisagé nous avons donc: $h+h_1<|G_i|$, et

(4) $$\frac{\big|(a_i+h,\, a_i+h+h_1)\,\big(A_i+\sum\limits_k D_{ik}\big)\big|}{h_1}>\frac{1}{4p}\quad\text{où}\quad |G|=3^{-p}.$$

Il en sera de même dans le cas où il n'y a qu'un seul segment $I_{ik'}$, contenu partiellement dans (a_i+h, a_i+h+h_1), tandis que le reste $(a_i+h, a_i+h+h_1)-I_{ik'}$ a une mesure supérieure à $h_1/4$. Nous avons encore à étudier le cas où ce reste a une mesure au plus égale à $h_1/4$. En particulier il peut arriver que cette mesure soit nulle, ce qui donne $(a_i+h, a_i+h+h_1)\subset I_{ik}$. Dans ce cas je vais évaluer la densité moyenne g sur le segment $L=(a_i+h, a_i+h+h_1)I_{ik'}$, de longueur $|L|\geqslant\frac{3}{4}h_1$; la densité moyenne sur (a_i+h, a_i+h+h_1) sera donc supérieure ou égale à $\frac{3}{4}g$.

Ce cas ne peut se présenter que lorsque les valeurs de c sont suffisamment grandes. En effet, si un segment L, tel que $|L|\geqslant\frac{3}{4}h_1$, est contenu dans $I_{ik'}$, il en résulte que

$$\frac{|L|}{\operatorname{dist}(a_i,L)}\leqslant\frac{|I_{ik'}|}{\operatorname{dist}(a_i,I_{ik'})}=\frac{1}{p+1},$$

$$\frac{\operatorname{dist}(a_i,L)}{|L|}\geqslant p+1,\qquad \operatorname{dist}(a_i,L)-\frac{h_1}{4}<h\leqslant\operatorname{dist}(a_i,L),$$

$$c>\frac{h}{h_1}>\frac{\operatorname{dist}(a_i,L)}{h_1}-\frac{1}{4}\geqslant\frac{3}{4}\,\frac{\operatorname{dist}(a_i,L)}{|L|}-\frac{1}{4}\geqslant\frac{3}{4}(p+1)-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\,p+\frac{1}{2}.$$

Il suffit donc de considérer la densité moyenne g sur les segments L qui satisfont à la condition

$$\tag{5}\tfrac{4}{3}c+\tfrac{1}{3}>\operatorname{dist}(a_i,L)/|L|\geqslant p+1\qquad L\subset I_{ik'}.$$

Lorsque $k'\to\infty$, cette densité moyenne converge vers $1/p$ uniformément pour L satisfaisant à la condition ci-dessus. En effet, en désignant par n le nombre des points x_s contenus à l'intérieur de L (n dépend de la position du segment L), nous avons

$$\frac{|I_{ik}|(n-1)}{kp}\cdot\frac{k}{|I_{ik}|(n+1)}\leqslant g\leqslant\frac{|I_{ik}|(n+1)}{kp}\cdot\frac{k}{|I_{ik}|(n-1)},$$

$$\tag{6}\frac{1}{p}\cdot\frac{n-1}{n+1}\leqslant g\leqslant\frac{1}{p}\cdot\frac{n+1}{n-1}.$$

(Pour abréger j'écris k au lieu de k'.) Pour le nombre n j'obtiens la limitation

$$\frac{|I_{ik}|}{k}(n-1)\leqslant|L|\leqslant\frac{|I_{ik}|}{k}(n+1),$$

$$n-1\leqslant\frac{k|L|}{|I_{ik}|}\leqslant n+1,\qquad\frac{k|L|}{|I_{ik}|}-1\leqslant n\leqslant\frac{k|L|}{|I_{ik}|}+1,$$

$$\frac{n-1}{n+1}\geqslant\frac{k|L|/|I_{ik}|-2}{k|L|/|I_{ik}|+2},\qquad\frac{n+1}{n-1}\leqslant\frac{k|L|/|I_{ik}|+2}{k|L|/|I_{ik}|-2}$$

d'où, en tenant compte de (6), il vient

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{k-2|I_{ik}|/|L|}{k+2|I_{ik}|/|L|}\leqslant g\leqslant\frac{1}{p}\cdot\frac{k+2|I_{ik}|/|L|}{k-2|I_{ik}|/|L|}.$$

La limitation ainsi obtenue ne dépend plus que du quotient des longueurs $|I_{ik}|/|L|$. Je vais évaluer ce quotient au moyen de c. Vu (5), nous avons

$$|L|(\tfrac{4}{3}c+\tfrac{1}{3})>\operatorname{dist}(a_i,L)\geqslant\operatorname{dist}(a_i,I_{ik})=2^{-k}-2^{-k}(p+2)^{-1}$$
$$=2^{-k}(p+2)^{-1}\cdot\frac{2^{-k}-2^{-k}(p+2)^{-1}}{2^{-k}(p+2)^{-1}}=|I_{ik}|(p+1),$$
$$\frac{|I_{ik}|}{|L|}<\frac{\frac{4}{3}c+\frac{1}{3}}{p+1}$$

et enfin

$$\tag{7}\frac{1}{p}\cdot\frac{k-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4c+1}{p+1}}{k+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4c+1}{p+1}}\leqslant g\leqslant\frac{1}{p}\cdot\frac{k+\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4c+1}{p+1}}{k-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4c+1}{p+1}}.$$

Il existe donc un indice k_0 tel que pour $k\geqslant k_0$ l'on a

$$\left|\frac{3}{4}g-\frac{3}{4p}\right|<\frac{1}{2p},$$

en particulier, on en déduit que $\frac{3}{4}g>1/4p$ et a fortiori (4). Il résulte de (7) que k_0 dépend uniquement de p et c (uniformité par rapport à L) et que p dépend de a_i (plus précisément, p dépend de i, mais entre les points a_i et les indices i il y a une correspondance biunivoque), nous avons donc $k_0=k_0(a_i,c)$. En posant $\varepsilon_1(a_i,c)=\min[2^{-k_0},|G_i|]$, nous avons dans tous les cas, pour $h>0$, $h_1>0$, $h/h_1<c$, $h+h_1<\varepsilon_1(a_i,c)$, la limitation (4).

Posons $D=E_1+\sum_{i,k}D_{ik}+C=E_1+\sum_{i,k}D_{ik}+\sum_{i=1}^{\infty}\{a_i\}+\sum_{i=1}^{\infty}\{b_i\}$.

Aux points de l'ensemble E_1 la densité de l'ensemble E_1 et, a fortiori, celle de l'ensemble D est égale à 1, ces points sont donc du type M_4 pour D. De même tous les points des segments D_{ik}, comme points intérieurs, sont du même type. La densité à gauche de l'ensemble D aux points b_i est égale à 1, car un certain entourage à gauche de chacun de ces points appartient avec lui à l'ensemble D. En profitant de (2) on peut démontrer, de même que pour les points de l'ensemble E_1, que la densité à droite de l'ensemble E_1 et, a fortiori, celle de l'ensemble D aux points b_i est égale à 1. Les points b_i sont donc des points de densité de l'ensemble D et, par suite, ils sont du type M_4 pour D.

Il reste à considérer les points a_i. En profitant de (3) on peut montrer que la densité à gauche de l'ensemble D en ces points est égale à 1. Il en résulte qu'à chaque nombre $c>0$ on peut faire correspondre un nombre $\varepsilon_2(a_i,c)>0$ tel que l'inégalité

$$\frac{|(a_i+h+h_1,\ a_i+h)D|}{-h_1}>\frac{1}{4p} \quad \text{où} \quad |G_i|=3^{-p} \tag{8}$$

soit satisfaite pour $h<0$, $h_1<0$, $h/h_1<c$, $|h+h_1|<\varepsilon_2(a_i,c)$.

La formule (4) et l'inclusion $A_i+\sum_k D_{ik}\subset D$ assurent l'existence d'un nombre $\varepsilon_1(a_i,c)$ tel que l'inégalité

$$\frac{|(a_i+h,\ a_i+h+h_1)D|}{h_1}>\frac{1}{4p} \quad \text{où} \quad |G_i|=3^{-p} \tag{9}$$

soit satisfaite pour $h>0$, $h_1>0$, $h/h_1<c$, $|h+h_1|<\varepsilon_1(a_i,c)$. En posant $\eta_{a_i}=1/4p$, $\theta(a_i,c)=\min[\varepsilon_1(a_i,c),\varepsilon_2(a_i,c)]$ et en tenant compte de (8) et (9), je trouve que le point a_i a la propriété M_4 par rapport à l'ensemble D. L'ensemble D étant la somme de l'ensemble fermé $\mathcal{C}$ et d'une somme d'intervalles ouverts, il est de classe F_σ.

Pour aucun point a_i on ne peut avoir $\eta_{a_i}\geqslant 1/p$. Pour $p=1$ cela résulte du fait que la densité moyenne de l'ensemble ne peut être supérieure à 1. Pour les autres points je prends $1/c<|I_{ik}|/\operatorname{dist}(a_i,I_{ik})=1/(p+1)$. En vertu de (1) chaque entourage à droite du point a_i contient un segment I_{ik}. En posant $h=\operatorname{dist}(a_i,I_{ik})$, $h_1=|I_{ik}|$, j'obtiens $h/h_1=p+1<c$,

$$\frac{|(a_i+h,\ a_i+h+h_1)D|}{h_1}=\frac{|(a_i+h,\ a_i+h+h_1)D_{ik}|}{h_1}=\frac{1}{p}\leqslant\eta_{a_i}$$

au lieu de l'inégalité contraire. Pour $c>1/(p+1)$, le nombre $\theta(a_i,c)$ n'existe pas.

Je vais montrer que l'ensemble D n'est pas de classe M_4. En effet, supposons que $D\in M_4$, et soient F_n resp. η_n les ensembles resp. les nombres qui figurent dans la définition d'un ensemble de classe M_4. Considérons une suite d'ensembles fermés $\{\mathcal{C}F_n\}$. Si chacun des ensembles $\mathcal{C}F_n$ était non dense dans $\mathcal{C}$, l'ensemble $\mathcal{C}$ serait de première catégorie par rapport à lui-même, ce qui est impossible. Il existe donc un nombre r et un morceau R de l'ensemble $\mathcal{C}$ tels que $\mathcal{C}F_r$ est dense dans R. L'ensemble $\mathcal{C}F_r$ est fermé, donc $\mathcal{C}F_rR=R$. Chaque morceau de l'ensemble $\mathcal{C}$ doit contenir un ensemble dénombrable de points a_i. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse que $D\in M_4$. Il résulte, en effet, de cette hypothèse que pour chaque $x\in F_r$ on peut prendre $\eta_x=\eta_r>0$. Sur tout l'ensemble $\mathcal{C}$ et a fortiori sur le morceau R, il y a un nombre fini de points a_i, pour lesquels $\eta_{a_i}\geqslant\eta_r$, car ce sont les extrémités des segments G_i tels que $|G_i|\geqslant 3^{-p}$, où $1/p>\eta_{a_i}\geqslant\eta_r$. Alors R contient un nombre infini de points $x=a_i$ tels que $\eta_x<\eta_r$ et $\eta_x=\eta_r$, ce qui est impossible. Donc les conditions contenues dans les énoncés (**) et (***) sont nécessaires, mais insuffisantes pour les ensembles $\{\varphi'(x)>a\}$ dans le cas de la dérivée bornée.

Je désigne le complément de l'ensemble D par H. L'ensemble H satisfait à la condition nécessaire pour qu'un ensemble soit l'ensemble $\{f'(x)=a\}$, où $|f'(x)|<M$, dont il est question dans le théorème de Choquet cité au début de ce travail. Comme complément d'un ensemble de classe F_σ il appartient à la classe G_δ. Pour montrer qu'il contient tous ses points d'accumulation en mesure, il suffit de prouver que les points de l'ensemble $\bar{H}-H$ ne sont pas des points d'accumulation en mesure de l'ensemble H. Nous avons $\bar{H}-H=\mathcal{C}$. Aux points de l'ensemble $\mathcal{C}$ qui ne sont pas des points a_i, la densité de l'ensemble D est égale à 1, celle de l'ensemble H est donc nulle et l'on constate aisément que ces points ne peuvent être des points d'accumulation en mesure. Aux points a_i la densité à gauche de l'ensemble H est nulle, on a donc, d'une manière analogue, $\varlimsup_{\lambda\to 0}[\varlimsup_{x\to a_i-0}\delta(a_i,x,\lambda)]<1$. Il reste à considérer la limite supérieure à droite de l'expression $\delta(a_i,x,\lambda)$. En vertu de (9) il existe, pour tout nombre $\varepsilon+1/\lambda$, $(\lambda>0,\varepsilon>0)$ un nombre $\varepsilon_1(a_i,\varepsilon+1/\lambda)$ tel que l'on ait

$$\frac{|(a_i+h,\ a_i+h+h_1)D|}{h_1}>\frac{1}{4p}$$

pour $h>0$, $h_1>0$, $h/h_1=1/\lambda<\varepsilon+1/\lambda$, $|h+h_1|<\varepsilon_1(a_1,\varepsilon+1/\lambda)$. De là nous obtenons

$$\frac{|(a_i+h,\ a_i+h+h_1)H|}{h_1}<1-\frac{1}{4p}.$$

Avec les notations de Choquet on peut donner à ce résultat l'énoncé suivant: pour $x>a_i$, $x'-x=\lambda(x-a_i)$, $x-a_1<x'-a_i<\varepsilon_1(a_i,\varepsilon+1/\lambda)$ nous avons $\delta(a_i,x,\lambda)<1-1/4p$. On en déduit

$$\varlimsup_{\lambda\to 0}[\varlimsup_{x\to a_i+0}\delta(a_i,x,\lambda)]\leqslant 1-1/4p<1$$

les points a_i ne sont donc pas des points d'accumulation en mesure de l'ensemble H.

Supposons maintenant qu'il existe une dérivée $\varphi'(x)$ telle que $|\varphi'(x)|<M$ et $H=\{\varphi'(x)=a\}$. Alors $D=\{\varphi'(x)\neq a\}=\{\varphi'(x)>a\}+\{-\varphi'(x)>-a\}$. Comme l'a démontré Zahorski ([3], p. 24), les deux termes du membre droit doivent être de classe M_4. Il est aisé de vérifier que la somme de deux ensembles de classe M_4 est aussi de classe M_4. Pourtant j'ai démontré plus haut que l'ensemble D ne peut appartenir à la classe M_4, l'hypothèse mène donc à une contradiction.

Travaux cités

[1] G. Choquet, *Application des propriétés descriptives de la fonction contingent à la théorie des fonctions de variable réelle et à la géométrie différentielle des variétés cartésiennes (Thèse)*, J. Math. Pures Appl. 26 (1947), p. 115-226.

[2] З. Загорский, *О множестве точек недифференцируемости непрерывной функции*, Мат. Сборн., новая серия 9 (51), (1941), стр. 487-510.

[3] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), p. 1-54.

Reçu par la Rédaction le 17. 12. 1955

Derivate planes of continuous functions of two real variables

by

J. R. Ravetz (Durham, England)

1. Introduction

We study here the problem of sufficient conditions for the existence of a derivate plane to a continuous function of two real variables. The work is based on the paper [2] (henceforth referred to as D. A.) in which are contained all the basic definitions. Speaking loosely, we find that there are two related sufficient conditions for the existence of a derivate plane: that of continuity with respect to x,y of a pair of derivates in two continuously varying directions, and equality of upper and lower derivates in two continuously varying directions. These two conditions combine to yield sufficient conditions for the existence of a derivate plane both at a point (Theorem 2) and in a "global" sense (Theorem 1).

2. Notation

From Theorem 1 of D. A. we obtain the following theorem, which will be basic for the present work:

THEOREM A. *If $f(z)$ has finite derivates on a region R, then there is a region R^+ everywhere dense on R, such that at every point z_0 of R^+,*

$$D^\theta f(z_0) = \partial^\theta f(z_0), \qquad D_\theta f(z_0) = \partial_\theta f(z_0), \qquad \text{all } \theta,$$

and $D^\theta f(z_0)$ and $D_\theta f(z_0)$ are continuous functions of θ.

If the derivates of $f(z)$ are bounded on R, then $R^+ = R$.

This result is of twofold significance: first, we may ignore the distinction between $D^\theta f(z_0)$ and $\partial^\theta f(z_0)$; and second, more important, we may use the continuity of $D^\theta f(z_0)$ as an essential step of all "category" arguments.

The statement "there exists a derivate plane to $f(z)$ at z_0" is defined by the equation

$$D^\theta f(z_0) = D_\theta f(z_0) = \cos\theta \cdot D^0 f(z_0) + \sin\theta \cdot D^{\pi/2} f(z_0), \tag{1}$$