Sur les ensembles $\{f(x)>a\}$, où $f(x)$ sont des fonctions intégrables au sens de Riemann

par

J. S. Lipiński (Łódź)

Je m'occupe des ensembles $\{f(x)>a\}$, où $f(x)$ sont des fonctions de certaines classes. En particulier, j'énonce les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'ensemble E soit de la forme $\{f(x)>a\}$, où $f(x)$ est successivement une fonction intégrable au sens de Riemann définie dans $\mathcal{E}^n$ (théorème 1), une dérivée intégrable au sens de Riemann définie dans $\mathcal{E}^1$ (théorème 5), une fonction approximativement continue, intégrable au sens de Riemann, définie dans $\mathcal{E}^1$ (théorème 6).

Dans la démonstration du théorème 5 je profite de la condition nécessaire et suffisante, énoncée par M. Zahorski dans [4], pour qu'un ensemble soit de la forme $\{f(x)>a\}$, où $f(x)$ est une dérivée bornée. Je formule également des conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité de $f(x)$ au sens de Riemann, dans lesquelles interviennent les ensembles $\{f(x)>a\}$ (théorème 2, 3 et 4). En profitant d'elles et en me basant sur le travail de M. Zahorski [3], en particulier sur la démonstration de la généralisation du théorème de Lusin-Mienchov qui y est énoncée, ainsi que sur les conditions nécessaires et suffisantes de continuité approximative énoncées par Denjoy dans [1], j'obtiens le théorème 6.

THÉORÈME 1. *Pour qu'un ensemble E de points de l'espace $\mathcal{E}^n$ soit de la forme*

(1) $$E=\{f(x)>a\}\ ,$$

où $f(x)$ est une fonction intégrable au sens de Riemann dans chaque intervalle de cet espace, il faut et il suffit qu'il existe un ensemble E^* tel que

(2) $$E^*\in F_\sigma\ ,$$

(3) $$E\subset E^*\subset \bar{E}\ ,$$

(4) $$|E^*\cdot \mathrm{Fr}\,E|=0\ .$$

Dans le cas particulier où $E\in F_\sigma$ on peut remplacer les conditions (2), (3) et (4) par la seule suivante:

(4') $$|E\cdot \mathrm{Fr}\,E|=0\ .$$

Le théorème reste vrai si, au lieu de (1), on considère l'ensemble

(5) $$E=\{f(x)<a\}\ .$$

La condition est nécessaire. En effet, soient $f(x)$ une fonction intégrable au sens de Riemann et E l'ensemble (1). Désignons par N l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $f(x)$. Alors

(6) $$N\in F_\sigma\ ,\qquad |N|=0\ .$$

Admettons $E^*=E$ si l'ensemble E est vide et si les conditions (2), (3) et (4) sont satisfaites. Dans le cas contraire, admettons

(7) $$E^*=\mathrm{Int}\,E+N\cdot \mathrm{Fr}\,E\ ,$$

d'où, en raison de (6), il résulte (2). Si les points de continuité de la fonction $f(x)$ appartiennent à l'ensemble E, ils y sont contenus avec leurs entourages. On en déduit que $E\cdot \mathrm{Fr}\,E\subset N$ et évidemment

(8) $$E\cdot \mathrm{Fr}\,E\subset N\cdot \mathrm{Fr}\,E\ .$$

Puisque $E=\mathrm{Int}\,E+E\cdot \mathrm{Fr}\,E$, la première inclusion de la relation (3) résulte de (8) et (7). La deuxième résulte de (7) et des relations évidentes: $N\cdot \mathrm{Fr}\,E\subset \mathrm{Fr}\,E$ et $\bar{E}=\mathrm{Int}\,E+\mathrm{Fr}\,E$. Il vient de (7): $E^*\cdot \mathrm{Fr}\,E=N\cdot \mathrm{Fr}\,E$, ce qui, avec (6), donne (4). Quant à la formule (4'), elle résulte de (8) et (6).

La condition est suffisante. Supposons, en effet, que E vérifie les conditions (2), (3) et (4). Si l'ensemble E est l'espace $\mathcal{E}^n$, admettons $f(x)=a+1$. Dans le cas contraire $\overline{CE}\neq 0$. On procède alors comme suit. L'ensemble $M=E^*\cdot \mathrm{Fr}\,E$ est du type F_σ et de mesure nulle; on peut donc le représenter comme la somme d'une quantité dénombrable d'ensembles F_i fermés, de mesure nulle. On a $M=\sum_{i=1}^{\infty}F_i$. Soit

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}1/2^i & \text{pour}\quad x\in F_i\,,\\ 0 & \text{pour}\quad x\notin F_i\end{cases}$$

et $f_1(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)$. Alors, pour $x\notin M$, la fonction $f_1(x)$ est continue et $f_1(x)=0$, et pour $x\in M$, elle est discontinue et $f_1(x)>0$.

La fonction

$$f_2(x)=\begin{cases}f_1(x) & \text{pour}\quad x\in E\,,\\ -f_1(x) & \text{pour}\quad x\notin E\,,\end{cases}$$

n'est discontinue que dans l'ensemble M, et

$$f_2(x)>0\quad \text{pour}\quad x\in M\cdot E\,,$$
$$f_2(x)\leqslant 0\quad \text{pour}\quad x\notin M\cdot E\,.$$

La fonction $f(x)=f_2(x)+\varrho(x,C\bar{E})+a$ satisfait à la condition (1), ce qu'on peut vérifier facilement en calculant ses valeurs dans les ensembles Int E, $\overline{CE}\cdot E^*\cdot E$, $\overline{CE}\cdot E^*\cdot CE$ et $\overline{CE}\cdot CE^*$. En outre, elle est bornée dans chaque intervalle fini et l'ensemble de ses points de discontinuité M est de mesure nulle. Elle est donc intégrable au sens de Riemann.

Dans le cas particulier où $E\in F_\sigma$ on peut admettre $E^*=E$. La condition (2) est alors vérifiée, la condition (3) prend la forme toujours vraie $E\subset\bar{E}$, enfin (4) devient (4').

En remplaçant, dans la partie démontrée du théorème, la fonction $f(x)$ par $g(x)=-f(x)$, et le nombre a par $b=-a$, et en tenant compte de ce que $f(x)$ et $-f(x)$ sont simultanément intégrables ou non, on voit que le même théorème est vrai si l'on y remplace l'ensemble (1) par l'ensemble (5).

Bien qu'on ait supposé dans la démonstration de la nécessité la fonction $f(x)$ intégrable au sens de Riemann, on y a profité, non pas du fait que la fonction $f(x)$ est bornée, mais uniquement de la relation (6). On en déduit donc le corollaire suivant:

Si l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $f(x)$, définie dans l'espace $\mathcal{E}^n$, est de mesure nulle on a, pour tout nombre a,

$$|\{f(x)>a\}\cdot \mathrm{Fr}\,\{f(x)>a\}|=0\,, \tag{9}$$

$$|\{f(x)<a\}\cdot \mathrm{Fr}\,\{f(x)<a\}|=0\,. \tag{10}$$

Réciproquement, si les égalités (9) et (10) sont vraies pour tout nombre a, l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $f(x)$ est de mesure nulle.

Pour le prouver, on introduira d'abord certaines notations et on démontrera un lemme.

Soit A un ensemble de l'espace $\mathcal{E}^n\times\mathcal{E}^1$. Les points de l'espace $\mathcal{E}^n$ seront désignés par x, ceux de l'espace $\mathcal{E}^1$ – en general par y. Soit $A^*(a)=A\cdot\underset{(x,y)}{E}[a<y]$ et $A_*(a)=A\cdot\underset{(x,y)}{E}[y<a]$. Soient $A^*_y(a)$ et $A_{*y}(a)$ les projections parallèles à l'axe OY des ensembles $A^*(a)$ et $A_*(a)$ respectivement sur l'hyperplan $\mathcal{E}^n$. Soit ensuite $\mu_*^{(n)}(E)$ la mesure intérieure n-dimensionnelle de l'ensemble E. Posons $\varphi(a)=\mu_*^{(n)}\big(A^*_y(a)\cdot A_{*y}(a)\big)$.

LEMME 1. *Si $\mu_*^{(n+1)}(A)>0$, l'ensemble $\{\varphi(a)=0\}$ ne peut être dense sur aucun segment (u,v) tel que $\mu_*^{(n+1)}\big(A\cdot\underset{(x,y)}{E}[u<y<v]\big)>0$.*

Démonstration. Supposons que l'ensemble $\{\varphi(a)=0\}$ soit dense. Soit K un cube dans l'espace $\mathcal{E}^n\times\mathcal{E}^1$, déterminé par les inégalités $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$, $(i=1,2,\dots,n)$, $u<a\leqslant y\leqslant b<v$, et tel que $\mu_*^{(n+1)}(A\cdot K)>0$. Soit B le noyau mesurable de type F_σ de l'ensemble $A\cdot K$, c'est-à-dire que l'ensemble B est mesurable, $B\in F_\sigma$, $B\subset A\cdot K$, $\mu_*^{(n+1)}(A\cdot K-B)=0$.

Un tel noyau existe (cf. Halmos [2], Chapitre III, § 14). Soit R la projection parallèle à l'axe OY du noyau B sur l'hyperplan $\mathcal{E}^n$. Alors $|R|_n>0$. L'indice n au bas du symbole de la mesure signifie qu'il s'agit ici de la mesure n-dimensionnelle. Soit ε un nombre positif quelconque. En profitant de la densité de l'ensemble $\{\varphi(a)=0\}$ tirons de ce dernier k nombres a_i, $(i=1,2,\dots,k)$, $(k<\infty)$ de manière que l'on ait

$$a<a_1\,,\qquad a_i<a_{i+1}\,,\qquad a_k<b\,,\qquad \max_{i=1,2,\dots,k+1} d_i<\varepsilon/|R|_n\,,$$

où $d_1=a_1-a$, $d_i=a_i-a_{i-1}$, $d_{k+1}=b-a_k$.

L'inclusion $B\subset A$ implique

$$B^*(a)\subset A^*(a)\,,\qquad B_*(a)\subset A_*(a)\,,\qquad |B^*_y(a)\cdot B_{*y}(a)|_n<\varphi(a)\,.$$

Posons

$$D=\sum_{i=1}^{k} B^*_y(a_i)\cdot B_{*y}(a_i)\,. \tag{11}$$

D'après le choix des nombres a_i, on a $|D|_n\leqslant\sum\varphi(a_i)=0$. Soit H un ensemble du type G_δ dans l'espace $\mathcal{E}^n$, tel que $D\subset H$ et $|H|_n=0$. Désignons par W le cylindre de base H qui est parallèle à l'axe OY. On a

$$|W|_{n+1}=0\,,\qquad W\in G_\delta\,. \tag{12}$$

Soit U la somme des hyperplans $y=a_i$ $(i=1,2,\dots,k)$. Alors

$$|U|_{n+1}=0\,. \tag{13}$$

Posons

$$G_1\ =B\cdot\underset{(x,y)}{E}[a<y<a_1]\,,$$

$$G_i\ =B\cdot\underset{(x,y)}{E}[a_{i-1}<y<a_i]\,,$$

$$G_{k+1}=B\cdot\underset{(x,y)}{E}[a_k<y<b]\,.$$

Les ensembles G_i-W sont du type F_σ, leurs projections $(G_i-W)_y$ sur l'hyperplan $\mathcal{E}^n$ sont donc mesurables et, d'après le choix des nombres a_i et de l'ensemble D, elle sont disjointes. Supposons, en effet, que $x\in(G_i-W)_y\cdot(G_j-W)_y$, $i\neq j$. Il existe donc des nombres a, β tels que $(x,a)\in G_i-W$, $(x,\beta)\in G_j-W$, c'est-à-dire $(x,a)\in B$, $a_{i-1}<a<a_i$, $x\notin H$, donc également $x\in D$, $(x,\beta)\in B$, $a_{j-1}<\beta<a_j$. Soit $i<j$. Alors $(x,\beta)\in B^*(a_i)$, $x\in B^*_y(a_i)$, $(x,a)\in B_{*y}(a_i)$, $x\in B_{*y}(a_i)$, mais en raison de (11) $x\notin B^*_y(a_i)\cdot B_{*y}(a_i)$ et il y a contradiction. Soient r_i les mesures n-dimensionnelles de ces

projections. On a $|R|_n \geqslant \sum_{i=1}^{k+1} r_i$ et $B = W\cdot B + U\cdot B + \sum_{i=1}^{k+1}(G_i - W)$, ce qui donne, d'après (12) et (13),

$$|B|_{n+1} \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} |G_i - W|_{n+1} \leqslant \sum_{i=1}^{k+1} r_i d_i \leqslant \frac{\varepsilon}{|R|_n} \sum_{i=1}^{k+1} r_i \leqslant \varepsilon .$$

Mais, comme ε est quelconque, on a donc $|B|_{n+1}=0$, ce qui est impossible, car B est le noyau de l'ensemble $A\cdot K$ de mesure intérieure positive. En supposant l'ensemble $\{\varphi(a)=0\}$ dense, on se trouve donc amené à une contradiction.

Théorème 2. *Pour que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction $f(x)$, définie dans l'espace $\mathcal{E}^n$, soit de mesure nulle, il faut et il suffit que, pour tout nombre a, les inégalités* (9) *et* (10) *aient lieu.*

Démonstration. La nécessité de la condition a été démontrée dans le corollaire du théorème 1. Pour prouver qu'elle est suffisante, démontrons que si l'ensemble des points de discontinuité est de mesure positive, il existe un nombre a pour lequel au moins l'une des égalités (9) et (10) n'a pas lieu. Ecrivons

$$\bar{f}(x) = \max[f(x), \overline{\lim_{a\to x}} f(a)] ,$$

$$\underline{f}(x) = \min[f(x), \underline{\lim_{a\to x}} f(a)] ,$$

$$\omega(x) = \bar{f}(x) - \underline{f}(x) .$$

Comme on le sait, la fonction $\omega(x)$, appelée oscillation de la fonction $f(x)$ au point x, est toujours mesurable et non-négative, et l'ensemble $\{\omega(x)>0\}=N$ est celui des points de discontinuité de la fonction $f(x)$.

Je désignerai par A l'ensemble des points (x,y) de l'espace $\mathcal{E}^n\times\mathcal{E}^1$ tels que les coordonnées $x\in N$, $\underline{f}(x)\leqslant y\leqslant \bar{f}(x)$. Il satisfait aux hypothèses du lemme; en effet $|A|_{n+1}=\int_N \omega(x)dx>0$. En vertu du lemme il existe un nombre b tel que $\varphi(b)>0$, c'est-à-dire

$$\varphi(b) = \mu_*^{(n)}(A_y^*(b)\cdot A_{*y}(b)) > 0 . \tag{14}$$

On a

$$A_y^*(b)\cdot A_{*y}(b) = A_y^*(b)\cdot A_{*y}(b)\cdot\{f(x)>b\} + A_y^*(b)\cdot A_{*y}(b)\cdot\{f(x)=b\} + \\ + A_y^*(b)\cdot A_{*y}(b)\cdot\{f(x)<b\} , \tag{15}$$

et, d'après (14), au moins un des facteurs du membre droit de l'egalité (15) doit être de mesure extérieure positive.

Si $x\in A_y^*(b)\cdot A_{*y}(b)$, il existe des nombres $\beta>b$ et $\gamma<b$ tels que $(x,\beta)\in A^*(b)$ et $(x,\gamma)\in A_*(b)$. Il en résulte, ainsi que de la définition de l'ensemble A, que $\underline{f}(x)<b<\bar{f}(x)$ d'où l'on déduit que x est un point limite des ensembles $\{f(x)<b\}$ et $\{f(x)>b\}$.

Il a donc été démontré que

$$A_y^*(b)\cdot A_{*y}(b) \subset \operatorname{Fr}\{f(x)>b\}\cdot\operatorname{Fr}\{f(x)<b\} . \tag{16}$$

Si le premier facteur du membre droit de l'égalité (15) a une mesure extérieure positive, l'ensemble $\{f(x)>b\}\cdot\operatorname{Fr}\{f(x)>b\}$ qui contient ce facteur a aussi une mesure extérieure positive d'après (16); ainsi, en posant $b=a$, l'égalité (9) ne peut avoir lieu. De même l'existence d'une mesure extérieure positive pour le dernier facteur est en contradiction avec l'égalité (10) pour $b=a$. Ces deux facteurs ayant une mesure extérieure nulle, le troisième doit avoir une mesure extérieure positive. Posons

$$A_y^*(b)\cdot A_{*y}(b)\cdot\{f(x)=b\} = N_1 .$$

En chaque point $x\in N_1$, on a $\bar{f}(x)>b$. Désignons par B l'ensemble des points de l'espace $\mathcal{E}^n\times\mathcal{E}^1$ tels que $x\in N_1$ et $b\leqslant y\leqslant\bar{f}(x)$. Cet ensemble satisfait aux hypothèses du lemme. En changeant A en B dans les définitions des ensembles $A^*(a)$, $A_*(a)$, $A_y^*(a)$, $A_{*y}(a)$ on aura celles des ensembles $B^*(a)$, $B_*(a)$, $B_y^*(a)$ et $B_{*y}(a)$. En vertu du lemme il existe un nombre $a>b$ tel que

$$\mu_*^{(n)}(B_y^*(a)\cdot B_{*y}(a)) > 0 . \tag{17}$$

Comme pour l'ensemble $A_y^*(b)\cdot A_{*y}(b)$ on a

$$B_y^*(a)\cdot B_{*y}(a) \subset \operatorname{Fr}\{f(x)<a\} .$$

En tenant compte encore de

$$B_y^*(a)\cdot B_{*y}(a) \subset N_1 \subset \{f(x)=b\} \subset \{f(x)<a\}$$

on a

$$B_y^*(a)\cdot B_{*y}(a) \subset \{f(x)<a\}\cdot\operatorname{Fr}\{f(x)<a\} ;$$

en tenant compte de (17) on arrive donc à une contradiction avec (10).

Théorème 3. *Pour que l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $f(x)$, définie dans l'espace $\mathcal{E}^n$, soit de mesure nulle, il faut et il suffit que pour chaque couple de nombres a, b, tels que $a\neq b$ on ait l'égalité*

$$|\operatorname{Fr}\{f(x)>a\}\cdot\operatorname{Fr}\{f(x)>b\}| = 0 .$$

Démonstration. Démontrons d'abord que la condition est nécessaire. Désignons les ensembles $\{f(x)>a\}$ et $\{f(x)>b\}$ respectivement par E_a et E_b. Soit $a<b$, dans le cas contraire la démonstration est analogue.

Soit $x \in \mathrm{Fr}\, E_a \cdot \mathrm{Fr}\, E_b$. Dans un entourage du point x il y a des points de l'ensemble E_b; il en résulte que $\bar{f}(x) \geqslant b$. Il y a aussi des points de l'ensemble CE_a, donc $\underline{f}(x) \leqslant a$. L'oscillation $\omega(x)$ de la fonction $f(x)$ au point x satisfait à l'inégalité $\omega(x) \geqslant b-a>0$. L'ensemble $\mathrm{Fr}\, E_a \cdot \mathrm{Fr}\, E_b$ est donc composé des points de discontinuité de la fonction $f(x)$. Or, l'ensemble des points de discontinuité est de mesure nulle par hypothèse, donc $|\mathrm{Fr}\, E_a \cdot \mathrm{Fr}\, E_b| = 0$.

Démontrons ensuite que la condition est suffisante. Soient N l'ensemble des points de discontinuité et $x \in N$. Alors $\bar{f}(x) > \underline{f}(x)$ et il existe deux nombres rationnels w_1 et w_2 tels que $\bar{f}(x) > w_1 > w_2 > \underline{f}(x)$. Dans chaque entourage du point x il y a au moins un point x_1, qui pourrait être aussi le point x_0, tel que $f(x_1) > w_1$ et un point x_2 tel que $f(x_2) < w_2$. Le point de discontinuité x est donc un point limite de l'ensemble $E_{w_1} = \{f(x) > w_1\}$ ainsi que de l'ensemble $E_{w_2} = \{f(x) > w_2\}$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Fr}\, E_{w_1} \cdot \mathrm{Fr}\, E_{w_2}$. Il en résulte

$$N \subset \sum_{w_i, w_k} \mathrm{Fr}\, E_{w_i} \cdot \mathrm{Fr}\, E_{w_k}.$$

La somme contient une quantité dénombrable d'ensembles, car chacun d'eux correspond à un couple de nombres rationnels. Par hypothèse, chacun d'eux est de mesure nulle, donc leur somme ainsi que N le sont également.

THÉORÈME 4. *Pour que l'ensemble des points de discontinuité N de la fonction $f(x)$ définie dans l'espace $\mathcal{E}^n$ ait une mesure nulle, il faut et il suffit que l'ensemble A des nombres a tels que*

$$|\mathrm{Fr}\{f(x) > a\}| > 0$$

soit tout au plus dénombrable.

Démonstration. Désignons par E_a l'ensemble $\{f(x) > a\}$. Supposons que N soit de mesure positive. En vertu du théorème 3 il existe un couple de nombres a, b tels que $a<b$ et $|\mathrm{Fr}\, E_a \cdot \mathrm{Fr}\, E_b| > 0$. Pour tout nombre c tel que $a \leqslant c \leqslant b$, on a $\mathrm{Fr}\, E_c \supset \mathrm{Fr}\, E_a \cdot \mathrm{Fr}\, E_b$, d'où $|\mathrm{Fr}\, E_c| > 0$ et l'ensemble A contient l'intervalle $\langle a, b \rangle$; il n'est donc pas dénombrable.

Supposons maintenant que $|N| = 0$. Tout point x appartenant au produit $\mathrm{Fr}\, E_a \cdot \mathrm{Fr}\, E_\beta$, où $a \neq \beta$, appartient à N (car alors $\underline{f}(x) \leqslant \min(a, \beta) < \max(a, \beta) \leqslant \bar{f}(x)$), donc, pour tout a,

$$\left|\mathrm{Fr}\, E_a \cdot \sum_{\beta \neq a} \mathrm{Fr}\, E_\beta \right| = 0. \tag{18}$$

En outre

$$\mathrm{Fr}\, E_a - \sum_{\beta \neq a} \mathrm{Fr}\, E_\beta = \mathrm{Fr}\, E_a - \mathrm{Fr}\, E_a \cdot \sum_{\beta \neq a} \mathrm{Fr}\, E_\beta.$$

Il en résulte, en vertu de (18),

$$|\mathrm{Fr}\, E_a| = \left|\mathrm{Fr}\, E_a - \sum_{\beta \neq a} \mathrm{Fr}\, E_\beta \right|. \tag{19}$$

Tous les ensembles $\mathrm{Fr}\, E_a - \sum_{\beta \neq a} \mathrm{Fr}\, E_\beta$ correspondant à différents a sont disjoints, ils sont aussi mesurables comme le montre (19). Donc parmi eux il ne peut y avoir qu'une quantité tout au plus dénombrable d'ensembles tels que

$$\left|\mathrm{Fr}\, E_a - \sum_{\beta \neq a} \mathrm{Fr}\, E_\beta \right| > 0;$$

avec (19) ceci prouve que la condition est nécessaire.

THÉORÈME 5. *Pour qu'un ensemble linéaire* [1]) *E soit de la forme*

$$E = \{f(x) > a\}, \tag{20}$$

où $f(x)$ est une dérivée intégrable au sens de Riemann dans chaque intervalle, il faut et il suffit que

$$E \in M_4\ ^{2)}, \tag{21}$$

$$|E \cdot \mathrm{Fr}\, E| = 0. \tag{22}$$

Démonstration. Supposons que $f(x)$ ait les propriétés ci-dessus. Etant intégrable elle est bornée dans chaque intervalle. Démontrons que, pour tout a, on a

$$\{f(x) > a\} \in M_4.$$

Si l'ensemble $\{f(x) > a\}$ contient les demi-droites fermées $(-\infty, a\rangle$ et $\langle \beta, \infty)$, où $a < \beta$, on procède comme suit: on introduit la fonction $f^*(x)$

$$f^*(x) = \begin{cases} f(a) & \text{pour} \quad x \leqslant a, \\ f(x) & \text{pour} \quad a < x < \beta, \\ f(\beta) & \text{pour} \quad \beta \leqslant x. \end{cases}$$

Cette fonction est bornée, car $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |f^*(x)| = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant \beta} |f(x)| < \infty$ et elle est la dérivée de la fonction $F^*(x)$

$$F^*(x) = \begin{cases} f(a)(x-a) & \text{pour} \quad x \leqslant a, \\ \int_a^x f(x)\,dx & \text{pour} \quad a < x < \beta, \\ \int_a^\beta f(x)\,dx + f(\beta)\cdot(x-\beta) & \text{pour} \quad \beta \leqslant x. \end{cases}$$

[1]) C'est-à-dire un sous-ensemble des points d'une droite.

[2]) M. Zahorski a défini l'ensemble de la classe M_4 dans [4], p. 3.

L'ensemble $\{f^*(x)>a\}$ est de classe M_4 en vertu du théorème de Zahorski (voir [4], théorème 5, p. 24). Mais comme $\{f^*(x)>a\}=\{f(x)>a\}$ la formule (21) est donc vraie dans le cas examiné.

Considérons le cas suivant. Supposons que l'ensemble $\{f(x)>a\}$ ne contienne qu'une demi-droite fermée $\langle-\infty,a\rangle$. Pour tout n naturel il doit alors exister un point x_n tel que $x_n>n$ et $f(x_n)\leqslant a$.

Définissons la fonction $f_n^*(x)$:

$$f_n^*(x)=\begin{cases} f(a) & \text{pour} \quad x\leqslant a\,, \\ f(x) & \text{pour} \quad a<x<x_n, \\ f_n(x_n) & \text{pour} \quad x_n\leqslant x\,. \end{cases}$$

On a alors

$$\{f_n^*(x)>a\}\subset\{f(x)>a\}\,. \tag{23}$$

De même que dans le cas précédent on voit facilement que $f_n^*(x)$ est une dérivée bornée, donc

$$\{f_n^*(x)>a\}\in M_4\,. \tag{24}$$

Soit $\bar{x}\in\{f(x)>a\}$. Alors pour $n>\bar{x}$ on a $\bar{x}\in\{f_n^*(x)>a\}$, d'où

$$\{f(x)>a\}\subset\sum_{n=1}^{\infty}\{f_n^*(x)>a\}\,,$$

ce qui donne avec (23)

$$\{f(x)>a\}=\sum_{n=1}^{\infty}\{f_n^*(x)>a\}\,.$$

On voit donc, en tenant compte du lemme de Zahorski (voir [4], lemme 1, p. 3) que, dans ce cas, la formule (21) est également vraie.

Dans tous les autres cas, on démontre de la même manière que (21) a lieu.

La nécessité de la condition (22) résulte du fait que la fonction $f(x)$ est intégrable et du théorème 1.

Démontrons maintenant que la conjonction des conditions (21) et (22) est une condition suffisante, c'est-à-dire, construisons pour tout ensemble E, satisfaisant à ces conditions, une fonction $f(x)$ telle que (20) ait lieu.

D'après la définition d'un ensemble de classe M_4, il résulte de (21) qu'il existe une suite $\{F_n\}$ d'ensembles fermés et une suite de nombres $\{\eta_n\}$ tels que $0<\eta_n<1$ et que $E=\sum_{n=1}^{\infty}F_n$, et pour tout x, appartenant à F_n, et tout nombre $c>0$ il existe un nombre $\theta(x,c)>0$ tel que pour les nombres h et h_1 vérifiant les conditions $h\cdot h_1>0$, $h/h_1<c$, $|h+h_1|<\theta(x,c)$ on ait

$$|E\cdot(x+h,x+h+h_1)|/|h_1|>\eta_n \quad \text{pour} \quad |h_1|>0\,.$$

(Désignons par (a,β) l'intervalle ouvert d'extrémités a, β dans le cas où l'on ne saurait pas si $a<\beta$ ou $a>\beta$.) M. Zahorski démontre ([4], p. 35) que pour chaque $E\in M_4$ on peut choisir les ensembles F_n de manière que 1° ils soient bornés, 2° pour $c=2$ le nombre $\theta(x,2)$ soit le même pour tous les $x\in F_n$, c'est-à-dire qu'il ne dépende que de n. En désignant ce nombre par $\theta(n)$ on a

$$|E\cdot(x+h,x+h+h_1)|/|h_1|>\eta_n \quad \text{pour} \quad x\in F_n\,, \tag{25}$$
$$h\cdot h_1>0\,, \quad h/h_1<2\,, \quad |h+h_1|<\theta(n)\,.$$

Posons

$$H_n=F_n\cdot\operatorname{Fr}E\,, \tag{26}$$

alors $E\cdot\operatorname{Fr}E=\sum_{n=1}^{\infty}H_n$, les ensembles H_n sont fermés, et, d'après (22),

$$|H_n|=0\,. \tag{27}$$

Fixons à présent n et désignons par R un intervalle quelconque fermé et fini, contenant dans son intérieur H_n. L'ensemble $R-H_n$ se compose d'un nombre tout au plus dénombrable de segments ouverts et des deux extrémités de R.

Représentons chacun de ces segments comme la somme d'une quantité dénombrable d'intervalles A_k fermés, dont les intérieurs sont disjoints, comme suit: on divise chaque segment non adjacent à CR en 4 segments égaux et on considère leur fermeture. Les parties inférieures sont des segments A_k; les autres seront appelés segments initiaux au premier pas de l'induction. On ferme chaque segment adjacent à CR on le divise en 2 segments égaux fermés qu'on désignera par A_k s'ils sont adjacents à CR, et on les appellera initiaux au premier pas de l'induction s'ils sont adjacents à H_n. Tous les segments initiaux au premier pas de l'induction ainsi obtenus sont fermés et ont une extrémité commune avec H_n.

Soit L un segment initial au n-ième pas de l'induction, fermé et ayant une extrémité, et une seule, commune avec H_n. On divise L en 2 segments égaux fermés; on désigne par A_k celui qui est disjoint avec H_n, l'autre est initial au $n+1$-ième pas de l'induction. Il résulte de la définition de A_k que

$$\operatorname{dist}(H_n,A_k)=|A_k|\,. \tag{28}$$

On considère la somme des segments A_k tels que $\operatorname{dist}(H_n,A_k)>\theta(n)/8$, et on désigne les termes de cette somme par D_i. Les ensembles D_i sont des segments fermés, contenus dans un nombre fini de composantes de l'ensemble $R-H_n$ (notamment dans celles dont la longueur ne surpasse pas $\theta(n)/2$, et éventuellement dans chacune de celles qui sont adjacentes à CR). Dans chaque composante il y a au plus un segment D_i, donc ces derniers sont en nombre fini: $D_1, D_2, \ldots, D_{k_n}$. Chaque segment D_i contient une partie de l'ensemble E de mesure positive. En effet, soit A_{ki} un segment de la suite $\{A_k\}$, contenu dans D_i, dont la longueur ne surpasse pas celle des autres segments de cette suite qui sont contenus dans D_i. Le segment A_{ki} est fini. Le segment A_{ki} est adjacent à un segment A_p tel que

$$2|A_p| = |A_{ki}| \tag{29}$$

ce qui résulte de la définition des segments A_k. Le segment A_p n'est pas contenu dans D_i, car ce dernier ne peut contenir de segments plus courts que A_{ki}. Donc $|A_p| \leqslant \theta(n)/8$, (28), d'où, en vertu de (29)

$$|A_{ki}| \leqslant \theta(n)/4\ . \tag{30}$$

Désignons par x le point, appartenant à H_n, le plus proche du segment A_{ki}, et par $x+h$ le point du segment A_{ki} le plus proche de x. Soit $A_{ki} = \langle x+h, x+h+h_1\rangle$. Alors, d'après (28) et (30),

$$h = \operatorname{dist}(x, A_{ki}) = |A_{ki}| = |h_1| \leqslant \theta(n)/4\ .$$

Puisque $x \in H_n$, $h \cdot h_1 > 0$, $h/h_1 = 1 < 2$, $|h+h_1| \leqslant \theta(n)/2 < \theta(n)$ on a, en vertu de (25),

$$|E(x+h, x+h+h_1)|/|h_1| = |E \cdot A_{ki}|/|A_{ki}| > \eta_n > 0\ ,$$

et, comme $A_{ki} \subset D_i$, on a

$$|E \cdot D_i| = a_i > 0\ . \tag{31}$$

Définissons maintenant les segments I_j. On remplace la somme de tous les segments A_k qui n'appartiennent à aucun D_i par la somme des segments I_j. On divise l'ensemble des segments I_j en deux classes disjointes et on marque d'un trait ou de deux l'appartenance des segments à la première resp. à la seconde classe, c'est-à-dire I'_j ou I''_j. On définit les segments I_j par induction.

Première partie de l'induction. On considère tous les segments A_k n'appartenant à aucun D_i. Les segments $|A_k| > 1$ feront partie de la classe de segments I'_j. On divise chacun des segments restants en deux segments égaux fermés A'_k et A''_k. Si $|A'_k| = |A''_k| < |A_k|^2$, $|E \cdot A''_k|/|A''_k| > \eta_n$ et $|E \cdot A'_k|/|A'_k| > \eta_n$, alors A'_k ainsi que A''_k feront partie de la classe des segments I'_j. Si, en vertu de cette convention, A'_k et A''_k n'ont pas été classés parmi les segments I'_j et si l'on a les inégalités $|E \cdot A'_k|/|A'_k| \leqslant \eta_n$ ou $|E \cdot A''_k|/|A''_k| \leqslant \eta_n$, on classera parmi les I''_j la somme $A'_k + A''_k = A_k$. Les segments A'_k et A''_k qui n'ont pas été classés seront appelés initiaux au deuxième pas de l'induction et désignés par $I_k^{(1)}$.

Pour les segments I'_j, obtenus dans le premier pas de l'induction, on a $|I'_j| < |A_k|^2$, où A_k est le segment I'_k lui-même, soit celui des segments A_k par la division duquel on a obtenu I'_j.

Pour les segments A_k non contenus dans la somme D_i, on a $|A_k| \leqslant \theta(n)/8$, comme plus haut pour le segment A_{ki}, ceci implique $|E \cdot A_k|/|A_k| > \eta_n$. Pour les segments I_j obtenus dans le premier pas de l'induction, on a $|E \cdot I_j|/|I_j| > \eta_n$, s'ils sont des segments A_k. S'ils ne le sont pas, ils appartiennent à la classe I'_j et la dernière inégalité a également lieu. Enfin, pour les segments $I_k^{(1)}$ on a aussi $|E \cdot I_k^{(1)}|/|I_k^{(1)}| > \eta_n$.

Deuxième partie de l'induction. Soit $I_k^{(n)}$ un segment initial au $n+1$-ème pas de l'induction et soit $|E \cdot I_k^{(n)}|/|I_k^{(n)}| > \eta_n$. On divise chaque segment $I_k^{(n)}$ en 2 segments égaux, fermés $I_k^{(n)'}$ et $I_k^{(n)''}$. Si $|I_k^{(n)'}| = |I_k^{(n)''}| < (|I_k^{(n)}| \cdot 2^n)^2 = |A_k|^2$, où A_k est un segment à partir duquel, en le divisant n fois, on obtient $I_k^{(n)}$, et si $|E \cdot I_k^{(n)'}|/|I_k^{(n)'}| > \eta_n$ et $|E \cdot I_k^{(n)''}|/|I_k^{(n)''}| > \eta_n$, alors $I_k^{(n)'}$ et $I_k^{(n)''}$ appartiennent à la classe I'_j. Si $|E \cdot I_k^{(n)'}|/|I_k^{(n)'}|$ ou $|E \cdot I_k^{(n)''}|/|I_k^{(n)''}| \leqslant \eta_n$, on classe le segment $I_k^{(n)}$ parmi les I''_j. Si aucun de ces deux cas possibles n'a lieu, c'est-à-dire si $|I_k^{(n)'}| \geqslant |A_k|^2$, $|E \cdot I_k^{(n)'}|/|I_k^{(n)'}| > \eta_n$ et $|E \cdot I_k^{(n)''}|/|I_k^{(n)''}| > \eta_n$, les segments $I_k^{(n)'}$ et $I_k^{(n)''}$ sont initiaux au $n+2$-ème pas de l'induction et on les désigne par $I_k^{(n+1)}$.

De la définition ci-dessus résultent les propriétés suivantes:

$$\text{Si} \quad I'_j \subset A_k, \quad \text{alors} \quad |I'_j| < |A_k|^2\ . \tag{32}$$

$$\text{On a toujours} \quad |E \cdot I_j|/|I_j| > \eta_n\ . \tag{33}$$

Pour tout I''_j, il existe deux segments fermés J_{j1} et J_{j2} tels que

$$|J_{j1}| = |J_{j2}| = \tfrac{1}{2}|I''_j|, \quad J_{j1} + J_{j2} = I''_j, \quad |E \cdot J_{j1}|/|J_{j1}| \leqslant \eta_n\ . \tag{34}$$

Le nombre des segments I'_j et I''_j obtenus à partir du segment A_k est fini. En effet, si $|A_k| > 1$, alors $A_k = I'_j$ et on n'aurait qu'un seul segment. Mais si $|A_k| \leqslant 1$, il suffit d'effectuer r divisions, où $r = -[\log_2 |A_k|] + 1$, pour obtenir des segments de longueur $|A_k|/2^r < |A_k|^2$. Il n'y aura pas dans ce segment A_k de segments initiaux au pas suivant de l'induction, car les segments de la r-ième division aussi bien que ceux des divisions antérieures appartiennent tous soit à I'_j soit à I''_j. Il peut arriver que tous les segments obtenus par $r' < r$ divisions appartiennent déjà à I''_j. Il suffit alors de faire $r' < r$ divisions. Si, pour un r', un tel cas se présente pour chaque A_k, l'induction n'aurait alors qu'un nombre fini de pas, ce qui n'empêche pourtant pas de l'appeler induction. Comme on le sait, en changeant respectivement la terminologie, l'induction compterait un nombre infini de pas conduisant aux mêmes segments I_j. Les pas de numéros supérieurs à r' ne changeraient aucun segment I_j ni n'en feraient apparaître d'autres. Il ne peut donc y avoir plus de 2^r segments issus de A_k. Les intérieurs des segments I_j sont disjoints.

Soit $I_j' \subset A_k$ ainsi que $x \in H_n$. En vertu de (28), on a

$$\operatorname{dist}(x, I_j') \geqslant \operatorname{dist}(H_n, I_j') \geqslant \operatorname{dist}(H_n, A_k) = |A_k| .$$

Il en résulte, en tenant compte de (32), que

$$(35)\quad |I_j'|/\operatorname{dist}(x, I_j') < |A_k|^2/|A_k| = |A_k| \quad \text{pour} \quad x \in H_n \quad \text{et} \quad I_j' \subset A_k .$$

Soit $x \in H_n$ et m un nombre naturel quelconque plus grand que 1. Comme on a alors, d'après (26), $x \in F_n \subset E \in M_4$, en vertu de la définition de l'ensemble du type M_4 il existe un nombre $\theta(x, m) > 0$ tel que pour $h \cdot h_1 > 0$, $h/h_1 < m$, $|h + h_1| < \theta(x, m)$, l'inégalité $|E \cdot (x+h, x+h+h_1)|/|h_1| > \eta_n$ a lieu. Soit $I_j'' \subset (x - \theta(x,m), x + \theta(x,m))$ et J_{j1} la moitié de I_j'' telle que, en vertu de (34),

$$(36)\qquad |E \cdot J_{j1}|/|J_{j1}| \leqslant \eta_n .$$

Soient $x+k$ l'extrémité du segment J_{j1} la plus proche du point x, et $x+h$ l'extrémité du segment I_j'' la plus proche de x. Posons

$$J_{j1} = \langle x+k, x+k+k_1 \rangle , \qquad I_j'' = \langle x+h, x+h+h_1 \rangle .$$

Alors $k \cdot k_1 > 0$, $h \cdot h_1 > 0$, $|k + k_1| \leqslant |h + h_1| < \theta(x, m)$. Si en outre $k/k_1 < m$, on aurait $|E \cdot J_{j1}|/|J_{j1}| > \eta_n$, contrairement à (36). Donc

$$(37)\qquad k/k_1 \geqslant m .$$

Puisque $2k_1 = h_1$ et que k satisfait à l'une des égalités

$$k = h + h_1/2 \quad \text{ou} \quad k = h ,$$

il résulte en définitive de (37) que

$$(38)\quad h_1/h = |I_j''|/\operatorname{dist}(x, I_j'') \leqslant 2/(m-1) \quad \text{pour} \quad x \in H_n,\ I_j'' \subset (x - \theta(x,m), x + \theta(x,m)) .$$

Définissons les ensembles ouverts D_i^* et I_j^* comme suit:

$$(39)\qquad \begin{aligned} D_i^* &= \operatorname{Int} D_i \cdot \operatorname{Int} E , \\ I_j^* &= \operatorname{Int} I_j \cdot \operatorname{Int} E . \end{aligned}$$

On a alors $|D_i \cdot E| = |\operatorname{Int} D_i \cdot \operatorname{Int} E| + |\operatorname{Int} D_i \cdot E \operatorname{Fr} E| + |\operatorname{Fr} D_i \cdot E|$ et, en vertu de (39), (22), puisque D_i est un segment, $|D_i \cdot E| = |D_i^*|$, avec (31) ceci donne

$$(40)\qquad |D_i^*| = \alpha_i > 0 .$$

En raisonnant de la même manière on a, en vertu de (33),

$$(41)\qquad |I_j^*|/|I_j| > \eta_n .$$

Désignons par D_i^{**} la somme d'un nombre fini de segments fermés, telle que

$$(42)\qquad D_i^{**} \subset D_i^*, \quad |D_i^{**}| > |D_i^*|/2 = \alpha_i/2 .$$

Désignons par I_j^{**} la somme d'un nombre fini de segments fermés, telle que $I_j^{**} \subset I_j^*$ et $|I_j^{**}| > |I_j^*|/2$. On a alors, d'après (41),

$$(43)\qquad |I_j^{**}| > |I_j| \cdot \eta_n/2 .$$

Désignons par a_i et b_i, $(a_i < b_i)$, les extrémités du segment D_i, et par a_j et b_j, $(a_j < b_j)$, celles du segment I_j. On a alors

$$(44)\qquad |D_i| = b_i - a_i , \qquad |I_j| = b_j - a_j .$$

Sur le segment D_i définissons la fonction $\varphi_i(x)$ continue, non négative et bornée, comme suit:

$$(45)\qquad \varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad x \in D_i^{**}, \\ 0 & \text{pour} \quad x \in D_i - D_i^* . \end{cases}$$

Il faut encore définir $\varphi_i(x)$ sur l'ensemble $D_i^* - D_i^{**}$. C'est un ensemble ouvert. Aux extrémités de chacune des composantes de cet ensemble, les valeurs de la fonction $\varphi_i(x)$ sont déterminées par la convention (45). Si, pour une quelconque des composantes, l'une de ces valeurs est 1, on définit la fonction $\varphi_i(x)$ pour les points de cette composante de manière qu'elle soit linéaire sur la fermeture de celle-ci. Si pour une composante (dont on désignera la longueur par Δ) les deux valeurs sont nulles, on admet qu'au milieu de cette composante $\varphi_i(x) = \min(1/2, \Delta/2)$ et pour les autres points on définit $\varphi_i(x)$ de manière que sur la fermeture de chaque moitié de cette composante elle soit linéaire.

D'une façon analogue, on définit la fonction $\psi_j(x)$ sur l'ensemble I_j. On remplace, dans la définition de $\varphi_i(x)$, l'ensemble D_i^{**} par I_j^{**}, l'ensemble D_i^* par I_j^*, le segment D_i par I_j et on écrit $\psi_j(x)$ au lieu de $\varphi_i(x)$. Chacune des fonctions $\varphi_i(x)$ et $\psi_j(x)$ est continue et finie, donc bornée et intégrable au sens de Riemann respectivement sur les segments D_i et I_j, et, d'après (45), (42), la définition de la fonction $\psi_j(x)$ et (43), les inégalités

$$(46)\qquad \begin{aligned} \int_{a_i}^{b_i} \varphi_i(x)\,dx &\geqslant 1 \cdot |D_i^{**}| > \alpha_i/2 , \\ \int_{a_j}^{b_j} \psi_j(x)\,dx &\geqslant 1 \cdot |I_j^{**}| > |I_j| \eta_n/2 \end{aligned}$$

sont vraies.

Les fonctions $\varphi_i(x)$ et $\psi_j(x)$ ont été définies de manière que l'inégalité $\varphi_i(x)>0$ puisse avoir lieu pour $x\in D_i^*$ seulement, et que l'inégalité $\psi_j(x)>0$ n'ait lieu que pour $x\in I_j^*$. De plus, d'après (39), on a $\sum D_i^*+\sum I_j^*\subset \operatorname{Int} E$, donc

$$(47)\qquad \begin{aligned} \varphi_i(x)&=0 \quad \text{pour} \quad x\in CE\cdot D_i\,,\\ \psi_j(x)&=0 \quad \text{pour} \quad x\in CE\cdot I_j\,. \end{aligned}$$

Définissons maintenant la fonction $f_n(x)$:

$$(48)\qquad f_n(x)=\begin{cases} x & \text{pour} \quad x\in H_n\,,\\ a_i+\dfrac{b_i-a_i}{\int_{a_i}^{b_i}\varphi_i(t)\,dt}\cdot\displaystyle\int_{a_i}^{x}\varphi_i(t)\,dt & \text{pour} \quad x\in D_i\,,\\ a_j+\dfrac{b_j-a_j}{\int_{a_j}^{b_j}\psi_j(t)\,dt}\cdot\displaystyle\int_{a_j}^{x}\psi_j(t)\,dt & \text{pour} \quad x\in I_j\,,\\ \min\limits_{x\in R} x & \text{pour} \quad x<\min\limits_{x\in R} x\,,\\ \max\limits_{x\in R} x & \text{pour} \quad x>\max\limits_{x\in R} x\,. \end{cases}$$

Démontrons que la fonction $f_n(x)$ est continue et différentiable en chaque point, c'est-à-dire qu'elle a en chaque point une dérivée finie, et que sa dérivée est intégrable au sens de Riemann sur chaque segment fini, non négative, égale à 1 aux points de l'ensemble H_n, nulle aux points appartenant à CE.

Vu la continuité des fonctions $\varphi_i(x)$ et $\psi_j(x)$ sur les ensembles D_i et I_j, on a

$$(49)\qquad f_n'(x)=\begin{cases} \dfrac{b_i-a_i}{\int_{a_i}^{b_i}\varphi_i(x)\,dx}\cdot\varphi_i(x) & \text{pour} \quad x\in(a_i,b_i)\,,\\ \dfrac{b_j-a_j}{\int_{a_j}^{b_j}\psi_j(x)\,dx}\cdot\psi_j(x) & \text{pour} \quad x\in(a_j,b_j)\,. \end{cases}$$

Il en résulte, en vertu de (44), (46) et des relations $0\leqslant\varphi_i(x)\leqslant 1$, $0\leqslant\psi_j(x)\leqslant 1$, que

$$(50)\qquad 0\leqslant f_n'(x)<\begin{cases} 2|D_i|/a_i & \text{pour} \quad x\in(a_i,b_i)\,,\\ 2/\eta_n & \text{pour} \quad x\in(a_j,b_j)\,. \end{cases}$$

De (49) et (47) on tire

$$(51)\qquad f_n'(x)=0 \quad \text{pour} \quad x\in\Big(\sum(a_i,b_i)+\sum(a_j,b_j)\Big)-E\,.$$

Il suit directement de la définition de $f_n(x)$ que

$$(52)\qquad f_n'(x)=0 \quad \text{pour} \quad x\in CR\,.$$

De la continuité à gauche des fonctions $\varphi_i(x)$ et $\psi_j(x)$ aux points b_i et b_j, de (48) et de $\varphi_i(b_i)=\psi_j(b_j)=0$ il résulte que

$$f_n^-(x)=\begin{cases} \dfrac{b_i-a_i}{\int_{a_i}^{b_i}\varphi_i(x)\,dx}\cdot\varphi_i(x)=0 & \text{pour} \quad x=b_i,\ b_i\in\operatorname{Int} R\,,\\ \dfrac{b_j-a_j}{\int_{a_j}^{b_j}\psi_j(x)\,dx}\cdot\psi_j(x)=0 & \text{pour} \quad x=b_j,\ b_j\in\operatorname{Int} R\,,\\ 0 & \text{pour} \quad x=b_k,\ b_k\in\operatorname{Fr} R,\\ & \qquad (k=i \quad \text{ou} \quad k=j)\,. \end{cases}$$

D'une manière analogue on a $f_n^-(x)=0$ pour $x=a_i$ et $x=a_j$. Aux extrémités des segments D_i et I_j les dérivées à gauche et à droite sont donc nulles. Ceci donne

$$(53)\qquad f_n'(x)=0 \quad \text{pour} \quad x=a_i,\ x=b_i,\ x=a_j,\ x=b_j\,.$$

Il résulte de (51), (52) et (53) que

$$(54)\qquad f_n'(x)=0 \quad \text{pour} \quad x\in CE\,.$$

De la continuité de $\varphi_i(x)$ et $\psi_j(x)$ sur les ensembles D_i et I_j, du fait que les limites unilatérales de ces fonctions sont nulles aux extrémités des segments D_i et I_j ainsi que de (49), (52), (53) il résulte que la dérivée $f_n'(x)$ est continue en chaque point appartenant à l'ensemble $CH^{''}$. En outre, en ces points, elle est bornée, ce qui résulte de (50), (52) et (53):

$$(55)\qquad 0\leqslant f_n'(x)\leqslant\max\left(\frac{2}{a_1}|D_1|,\frac{2}{a_2}|D_2|,\ldots,\frac{2}{a_{k_n}}|D_{k_n}|,\frac{2}{\eta_n}\right)=R_n^*<\infty$$
$$\text{pour tout} \quad x\in CH_n\,.$$

Il faut encore démontrer l'existence de la dérivée aux points de H_n. La dérivée en ces points est égale à 1. D'après (53), $f_n'(x)$ n'est pas continue aux points de H_n, mais, d'après (26), (27), cet ensemble est fermé et de mesure nulle. Ainsi, vu (55), on voit que la dérivée $f_n'(x)$ existe et elle est bornée sur toute la droite, qu'elle est continue partout sauf sur un ensemble de mesure nulle, elle est donc intégrable au sens de Riemann sur chaque segment.

Soit $x \in H_n$ et $x+h \in I_j = \langle a_j, b_j \rangle$, $a_j < b_j$. On a

$$(56) \qquad 0 \leqslant x+h-a_j \leqslant b_j - a_j = |I_j| .$$

Puisque $I_j \subset CH_n$, il résulte de (55) que $f_n(x)$ n'est pas décroissante sur I_j. Donc

$$f_n(a_j) \leqslant f_n(x+h) \leqslant f_n(b_j) ,$$
$$0 \leqslant f_n(x+h) - f_n(a_j) \leqslant f_n(b_j) - f_n(a_j) = b_j - a_j = |I_j| ,$$

ce qui donne, vu (56),

$$|f_n(x+h)-(x+h)| = |f_n(x+h) - f_n(a_j) - (x+h) + a_j|$$
$$< \max\big(f_n(x+h) - f_n(a_j), x+h-a_j\big) \leqslant |I_j| .$$

La dernière inégalité implique

$$(57) \qquad \left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - 1\right| = \left|\frac{f_n(x+h)-x}{h} - 1\right|$$
$$= \left|\frac{f_n(x+h)-x-h}{h}\right| < \frac{|I_j|}{h} \quad \text{pour} \quad x \in H_n \quad \text{et} \quad x+h \in I_j .$$

Soit $x \in H_n$. Pour $\varepsilon > 0$ quelconque, choisissons un nombre m tel que

$$(58) \qquad m > 1 + 2/\varepsilon$$

et posons

$$(59) \qquad \delta = \min\Big(\operatorname{dist}(x, CR), \operatorname{dist}\Big(x, \sum_{i=1}^{k_n} D_i\Big), \varepsilon, \tfrac{1}{2}\theta(x,m)\Big) .$$

Soit $|h| < \delta$. Trois cas se présentent:

(a) $x+h \in H_n$,

(b) $x+h \in I_j'$,

(c) $x+h \in I_j''$.

Dans le cas (a), on a immédiatement

$$(60) \qquad \left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - 1\right| = \left|\frac{x+h-x}{h} - 1\right| = 0 < \varepsilon .$$

Dans le cas (b) on a, en vertu de (28) et (59), l'inégalité:

$$|A_k| = \operatorname{dist}(H_n, A_k) \leqslant \operatorname{dist}(H_n, I_j') \leqslant \operatorname{dist}(x, I_j') \leqslant \operatorname{dist}(x, x+h) = |h| < \delta < \varepsilon ,$$

où A_k est le segment dont est issu I_j'. Cette inégalité et (35) impliquent $|I_j'|/|h| \leqslant |I_j'|/\operatorname{dist}(x, I_j') < \varepsilon$, ce qui donne, vu (57),

$$(61) \qquad \left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - 1\right| < \varepsilon .$$

Dans le cas (c) on a, en vertu de (28) et (59), l'inégalité

$$\operatorname{dist}(x, I_j'') + |I_j''| \leqslant \operatorname{dist}(x, I_j'') + |A_k| \leqslant \operatorname{dist}(x, I_j'') + \operatorname{dist}(H_n, I_j'')$$
$$\leqslant 2\operatorname{dist}(x, I_j'') \leqslant 2|h| < 2\delta \leqslant \theta(x,m) ,$$

qui montre que le segment I_j'' est contenu dans l'intervalle

$$\big(x - \theta(x,m), x + \theta(x,m)\big)$$

et, d'après (38),

$$|I_j''|/|h| \leqslant |I_j''|/\operatorname{dist}(x, I_j'') \leqslant 2/(m-1) .$$

Il en résulte que $|I_j''|/|h| < \varepsilon$ en vertu de (58). En définitive, il suit de (57) que

$$(62) \qquad \left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h} - 1\right| < \varepsilon .$$

Comme ε est arbitraire, les inégalités (60), (61) et (62) donnent

$$(63) \qquad f_n'(x) = 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in H_n .$$

Finalement on obtient de (55)

$$(64) \qquad 0 \leqslant f_n'(x) \leqslant R_n < \infty ,$$

où $R_n = \max(1, R_n^*)$.

En vertu de (64) la série

$$(65) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{2^n R_n}$$

est uniformément convergente, et la série

$$(66) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{2^n \cdot R_n}$$

est convergente au point 0. Les termes de la série (65) sont les dérivées des termes respectifs de la série (66) qui est, par suite, aussi uniformément convergente dans les intervalles finis. Désignons la somme de la série (65) par $f^*(x)$ et celle de (66) par $F(x)$. On a $f^*(x) = F'(x)$. Il résulte de (64) et (65) que la dérivée $f^*(x)$ est bornée. Désignons par N l'ensemble des points de discontinuité de $f^*(x)$. Puisque l'ensemble des points de discontinuité de la dérivée $f_n'(x)$ est H_n, la convergence uniforme de la série (65) donne $N \subset \sum_{n=1}^{\infty} H_n$; il en résulte $|N| = 0$ d'après (27). La dérivée $f^*(x)$ est intégrable au sens de Riemann sur chaque intervalle fini. On déduit en outre de (65), (64), (63) et (54):

(67) $f^*(x) \geqslant 0$.

(67') $f^*(x) > 0$ pour $x \in \sum_{n=1}^{\infty} H_n = E \cdot \mathrm{Fr}\, E$,

(68) $f^*(x) = 0$ pour $x \in \mathrm{C}E$.

Posons $f^{**}(x) = \mathrm{dist}(x, \mathrm{C}\,\mathrm{Int}\, E)$. La fonction $f^{**}(x)$ est continue et finie. C'est donc une dérivée intégrable au sens de Riemann dans tout intervalle fini. En outre

(69) $f^{**}(x) > 0$ pour $x \in \mathrm{Int}\, E$,

(70) $f^{**}(x) = 0$ pour $x \in \mathrm{C}\,\mathrm{Int}\, E$.

Posons finalement $f(x) = a + f^*(x) + f^{**}(x)$. La fonction $f(x)$, étant la somme de trois dérivées intégrables au sens de Riemann, est aussi dérivée intégrable au sens de Riemann.

Les formules (68) et (70) impliquent $f(x) = a$ pour tout $x \in \mathrm{C}E$, les formules (67), (69) et (70) donnent $f(x) > a$ pour tout $x \in E$, donc $E = \{f(x) > a\}$, c. q. f. d.

LEMME 2. *Si F est un ensemble linéaire tel que*

(71) $F = \overline{F}$, $|F| = 0$

et si, en outre, chaque point de F est un point de densité d'un ensemble ouvert G, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un ensemble F_ε tel que

(72) $F_\varepsilon = \overline{F}_\varepsilon$,

(73) $|\mathrm{Fr}\, F_\varepsilon| = 0$,

(74) $|F_\varepsilon| < \varepsilon$,

(75) $F \Subset F_\varepsilon \Subset F + G$ [3]).

Démonstration. Soit G_ε^* un ensemble ouvert tel que

$$F \subset G_\varepsilon^*, \quad |G_\varepsilon^*| < \varepsilon . \tag{76}$$

Posons

$$G_\varepsilon = G \cdot G_\varepsilon^* . \tag{77}$$

G_ε est un ensemble ouvert et, d'après (76),

$$|G_\varepsilon| < \varepsilon . \tag{78}$$

L'ensemble F se compose des points de densité de l'ensemble G_ε. Désignons par A l'ensemble des points dont la distance de F est soit un nombre naturel, soit l'inverse d'une puissance naturelle de 2. On peut alors représenter l'ensemble ouvert $\mathrm{C}F$ sous la forme $\mathrm{C}F = A + \sum_k I_k$, où I_k sont des segments ouverts qui ne contiennent pas de points de A, mais dont les extrémités sont des points de A. Le nombre de ces segments est dénombrable. En outre

$$|I_k| = \min\big(1, \mathrm{dist}(F, I_k)\big) . \tag{79}$$

Les ensembles $G_\varepsilon \cdot I_k$ sont ouverts. Dans chacun d'eux choisissons un nombre fini de segments fermés, dont on désigne la somme par F_k, et tels que

$$|F_k| > |G_\varepsilon \cdot I_k| \cdot \big(1 - \mathrm{dist}(F, I_k)\big) . \tag{80}$$

Evidemment

$$F_k \subset G_\varepsilon . \tag{81}$$

Le nombre des ensembles F_k ne surpasse pas celui des ensembles I_k, il est donc aussi dénombrable. Posons

$$F_\varepsilon = F + \sum_k F_k . \tag{82}$$

Démontrons que F_ε satisfait à toutes les conditions du lemme. Soit x un point d'accumulation de l'ensemble F_ε. Il ne peut appartenir à l'ensemble $\sum_k (I_k - F_k)$, car celui-ci est ouvert et disjoint avec F_ε. Il ne peut aussi appartenir à l'ensemble A, car pour les points y de cet ensemble on a $\mathrm{dist}(y, F_\varepsilon) = \min\big(\mathrm{dist}(y, F_j), \mathrm{dist}(y, F_i)\big) > 0$, où F_j et F_i sont des ensembles contenus dans les segments I_j et I_i composés l'un de nombres plus grands et l'autre de nombres plus petits que y. Il reste donc l'éventualité $x \in \mathrm{C}\big(A + \sum_k (I_k - F_k)\big) = F + \sum_k F_k$, c'est-à-dire qu'on a (72).

En raison de la disjonction des ensembles $F, F_1, F_2, \ldots$, on a $|F_\varepsilon| = |F| + \sum_k |F_k|$. Chaque ensemble F_k est la somme d'un nombre fini de segments, donc $|F_k| = |\mathrm{Int}\, F_k|$, ce qui donne, d'après (71), $|F_\varepsilon| = |\sum_k \mathrm{Int}\, F_k|$. On a $\sum_k \mathrm{Int}\, F_k \subset \mathrm{Int}\, F_\varepsilon \subset F_\varepsilon$. Il en résulte, ainsi que des considérations précédentes, $|\mathrm{Int}\, F_\varepsilon| = |F_\varepsilon|$, d'où l'on a (73) en raison de (72). D'après (81) et (78), on a $|\sum_k F_k| < \varepsilon$ et, avec (71) et (82), ceci donne (74).

Il reste à démontrer (75). L'inclusion $F \Subset F_\varepsilon$ résulte de (82), et l'inclusion

$$F_\varepsilon \subset F + G \tag{83}$$

résulte de (82), (81) et (77). Soit $x_0 \in F$. Démontrons que x_0 est un point de densité à droite de l'ensemble F_ε. Pour la densité à gauche la démonstration est analogue. Choisissons un nombre quelconque $\eta > 0$ et

$$\delta_1 = \min(\eta/4, 1) . \tag{84}$$

[3]) $A \Subset B$ signifie que $A \subset B$ et A se compose des points de densité de B.

Soit $0<h<\delta_1$ et soient k' les indices des segments I_k contenus dans l'intervalle (x_0, x_0+h), et k'' celui du segment I_k qui contient le point x_0+h, si un tel segment existe.

Considérons le cas, où $I_{k''}$ existe. Posons $I_{k''}=(a,b)$. Pour chaque k' on a, en vertu de (84),

$$\operatorname{dist}(F,I_{k'})<h<\delta_1\leqslant\eta/4\,,$$

et l'égalité $F_\varepsilon\cdot(x_0,a)=\sum_{k'}F_{k'}+F\cdot(x_0,a)$ a lieu. Comme $|F|=0$, les relations ci-dessus avec (80) donnent

$$(85)\qquad |F_\varepsilon\cdot(x_0,a)|>\sum_{k'}|G_\varepsilon\cdot I_{k'}|(1-\eta/4)=|G_\varepsilon\cdot(x_0,a)|(1-\eta/4)\,.$$

Posons

$$A'=F_{k''}\cdot(a,x_0+h)\,,\qquad A''=G_\varepsilon\cdot(a,x_0+h)\,,$$
$$B'=F_{k''}\cdot(x_0+h,b)\,,\qquad B''=G_\varepsilon\cdot(x_0+h,b)\,.$$

Alors $|F_{k''}|=|A'|+|B'|$, $|G_\varepsilon\cdot I_{k''}|=|A''|+|B''|$. Si $|A''|>0$, a fortiori $|G_\varepsilon\cdot I_{k''}|>0$ et alors

$$\frac{|A'|}{|A''|}=\begin{cases}\dfrac{|F_{k''}|}{|G_\varepsilon\cdot I_{k''}|}-\left(\dfrac{|B'|}{|B''|}-\dfrac{|F_{k''}|}{|G_\varepsilon\cdot I_{k''}|}\right)\cdot\dfrac{|B''|}{|A''|} & \text{pour}\quad |B''|>0\,,\\[2ex] \dfrac{|F_{k''}|}{|G_\varepsilon\cdot I_{k''}|} & \text{pour}\quad |B''|=0\,.\end{cases}$$

D'après (80), vu que $1\geqslant\delta_1>h>\operatorname{dist}(F,I_{k''})$ et $B'\subset B''$, on en déduit que pour $|B''|>0$ et aussi pour $|B''|=0$, en raison de l'inégalité $b-x_0-h>0$, on a

$$(86)\qquad \frac{|A'|}{|A''|}>1-h-[1-(1-h)]\cdot\frac{|(x_0+h,b)|}{|A''|}=1-h-h\,\frac{b-x_0-h}{|A''|}$$
$$>1-\frac{\eta}{4}-\frac{\eta}{4}\cdot\frac{b-x_0-h}{|A''|}\,.$$

Evaluons maintenant la différence entre les densités moyennes des ensembles G_ε et F_ε dans l'intervalle (x_0,x_0+h). Désignons cette différence par $\Delta(x_0,h)$.

$$\Delta(x_0,h)=\frac{1}{h}|G_\varepsilon\cdot(x_0,x_0+h)|-\frac{1}{h}|F_\varepsilon(x_0,x_0+h)|$$
$$=\frac{1}{h}|(G_\varepsilon-F_\varepsilon)\cdot(x_0,a)|+\frac{1}{h}|A''-A'|$$
$$=\frac{1}{h}|G_\varepsilon\cdot(x_0,a)|-\frac{1}{h}|F_\varepsilon\cdot(x_0,a)|+\frac{1}{h}|A''|\left(1-\frac{|A'|}{|A''|}\right).$$

En vertu de (85), (86) l'égalité suivante a lieu:

$$\Delta(x_0,h)<\frac{1}{h}|G_\varepsilon\cdot(x_0,a)|-\frac{1}{h}|G_\varepsilon\cdot(x_0,a)|\left(1-\frac{\eta}{4}\right)+$$
$$+\frac{1}{h}|A''|\cdot\left[1-\left(1-\frac{\eta}{4}-\frac{\eta(b-x_0-h)}{4|A''|}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{h}\left(|G_\varepsilon\cdot(x_0,a)|\frac{\eta}{4}+\frac{\eta}{4}|A''|+\frac{\eta}{4}(b-x_0-h)\right).$$

Puisque $A''\subset I_{k''}$, $0<b-x_0-h<|I_{k''}|$, et, d'après (79), il vient $h>\operatorname{dist}(F,I_{k''})\geqslant|I_{k''}|$, donc

$$|A''|<h\,,\qquad b-x_0-h<h\,.$$

Ensuite, comme $G_\varepsilon(x_0,a)\subset(x_0,x_0+h)$, on obtient

$$(87)\qquad |G_\varepsilon(x_0,a)|\leqslant h$$

ce qui donne

$$(88)\qquad \Delta(x_0,h)<\tfrac{3}{4}\eta\,.$$

Si $|A''|=0$, alors, d'après (85)

$$(89)\qquad \Delta(x_0,h)=\frac{1}{h}(|G_\varepsilon\cdot(x_0,a)|-|F_\varepsilon\cdot(x_0,a)|)$$
$$<\frac{1}{h}\left[|G_\varepsilon\cdot(x_0,a)|-|G_\varepsilon(x_0,a)|\left(1-\frac{\eta}{4}\right)\right]=\frac{1}{h}|G_\varepsilon\cdot(x_0,a)|\frac{\eta}{4}\,.$$

Il en résulte, en vertu de (87),

$$(90)\qquad \Delta(x_0,h)<\eta/4\,.$$

Dans le cas où $I_{k''}$ n'existe pas, $x_0+h\in A+F$. Posons $x_0+h=a$. Les relations (85), (89), (87) restent vraies, et tout comme ci-dessus pour $|A''|=0$ on obtient (90).

Il résulte de (88), (90) que pour $h<\delta_1$ on a toujours

$$(91)\qquad \Delta(x_0,h)<\tfrac{3}{4}\eta\,.$$

Le point x_0 est un point de densité de l'ensemble G_ε, on peut donc choisir pour η un nombre positif δ_2 tel que pour $0<h<\delta_2$ on ait

$$(92)\qquad \frac{1}{h}|G_\varepsilon\cdot(x_0,x+h)|>1-\frac{\eta}{4}\,.$$

Puisque

$$\frac{1}{h}|F_\varepsilon\cdot(x_0,x_0+h)|=\frac{1}{h}|G_\varepsilon(x_0,x_0+h)|-\Delta(x_0,h)\,,$$

on déduit de (92) et (91)

$$\frac{1}{h}|F_\varepsilon\cdot(x_0,x_0+h)|>1-\frac{\eta}{4}-\frac{3}{4}\eta=1-\eta \quad \text{pour} \quad 0<h<\min(\delta_1,\delta_2).$$

Ainsi on a démontré que le point x_0 appartenant à l'ensemble F est un point de densité à droite de l'ensemble F_ε. D'après (82), on a

(93) $$F\subset F_\varepsilon.$$

Pour tout ensemble F_k qui intervient dans la définition de l'ensemble F_ε comme étant contenu dans G_ε, on a, d'après (77), $F_k\subset G\subset F+G$. D'autre part, si $\xi_0\in F$, ξ_0 est un point de densité de l'ensemble G (et, a fortiori, de l'ensemble $F+G$) par hypothèse, ce qui donne (75) vu (82), (83) et (93).

Lemme 3. *Si un ensemble linéaire E a les propriétés:*

(94) $E\in M_5$

(d'après Zahorski ceci signifie que $E\subset E$ et $E\in F_\sigma$),

(95) $|E\cdot\mathrm{Fr}\,E|=0,$

à chaque nombre λ de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ qui est une fraction binaire finie, on peut faire correspondre un ensemble F_λ tel que

(96) $F_\lambda=\overline{F}_\lambda,$

(97) $|\mathrm{Fr}\,F_\lambda|=0,$

(98) $\sum\limits_{\lambda}F_\lambda=E,$

(99) *si $\lambda_1>\lambda_2$, alors $F_{\lambda_1}\subset F_{\lambda_2}\subset E$.*

De plus, a étant un nombre quelconque de l'intervalle $\langle 0,1\rangle$ et ε un nombre positif quelconque, il existe un nombre $\delta(a,\varepsilon)>0$ tel que les inégalités $|\lambda_1-a|<\delta$, $|\lambda_2-a|<\delta$, $\lambda_2<\lambda_1$ impliquent $|F_{\lambda_2}-F_{\lambda_1}|=|F_{\lambda_2}|-|F_{\lambda_1}|<\varepsilon$.

Démonstration. Si $E=\mathcal{E}^1$, pour tout λ posons $F_\lambda=\mathcal{E}^1$ et le lemme est évidemment vrai. Si $E=0$, posons $F_\lambda=0$, et le lemme est également vrai. Il reste à étudier le cas, où $E\neq\mathcal{E}^1$ et en même temps E n'est pas vide.

On peut représenter l'ensemble E, comme étant du type F_σ, sous la forme

$$E=\sum_{i=1}^{\infty}H_i=\mathrm{Fr}\,E\cdot\sum_{i=1}^{\infty}H_i+\mathrm{Int}\,E=\sum_{i=1}^{\infty}(H_i\cdot\mathrm{Fr}\,E)+\mathrm{Int}\,E,$$

où H_i sont des ensembles fermés. Puisque l'ensemble $\mathrm{Int}E$ est ouvert, on peut le représenter comme la somme d'une quantité dénombrable de segments fermés et bornés I_k. En posant $H_i\cdot\mathrm{Fr}E=J_i$, on a

(100) $$E=\sum_{i=1}^{\infty}J_i+\sum_{i=1}^{\infty}I_i.$$

Pour tout segment I_k il existe un segment I_k^*, tel que

(101) $I_k^*=\overline{I}_k^*,$

(102) $|\mathrm{Fr}\,I_k^*|=0,$

(103) $I\subset I_k^*\subset\mathrm{Int}\,E,$

(104) $|I_k^*-I_k|=|I_k^*|-|I_k|<1.$

Les ensembles J_k ont la propriété suivante:

(105) $$J_k=\overline{J}_k,$$

et il suit de (95) que

(106) $$|J_k|=0.$$

Il résulte aussi de (95) que l'ensemble des points de densité de l'ensemble E coïncide avec celui de l'ensemble $\mathrm{Int}E$. Comme $J_1\subset E$, en vertu de (94) chaque point de l'ensemble J_1 est un point de densité de l'ensemble $\mathrm{Int}E$. Il en résulte, ainsi que de (105) et (106) et en vertu du lemme 2, qu'il existe pour $\varepsilon=1$ un ensemble J_1^* tel que

(107) $J_1^*=\overline{J}_1^*,$

(108) $|\mathrm{Fr}\,J_1^*|=0,$

(109) $|J_1^*|<1,$

(110) $J_1\subset J_1^*\subset J_1+\mathrm{Int}\,E\subset E.$

Définissons l'ensemble F_1 comme suit:

(111) $$F_1=J_1^*+I_1^*.$$

Alors, d'après (101) et (107), on a

(112) $$F_1=\overline{F}_1,$$

d'après (102) et (108), $|\mathrm{Fr}F_1|=0$, et d'après (103) et (110), $F_1\subset E$. Il suit de la dernière relation que $|E-F_1|=|E|-|F_1|>0$, car de $|E-F_1|=0$ il résulterait que $F_1\subset F_1$, ce qui donnerait, d'après (112), $F_1=\mathcal{E}^1$ ou $F_1=0$. Le segment I_1 etant supposé borné, il résulte de (104) et (109) que $|F_1|<\infty$.

Supposons que les ensembles F_λ soient définis pour les nombres $\lambda_0=1$, $\lambda_1=1/2$, $\lambda_{n-1}=1/2^{n-1}$, qu'ils aient les propriétés (96), (97), (99) et que

(113) $$|F_{\lambda_{n-1}}|<\infty.$$

L'ensemble fermé $F_{\lambda_{n-1}}+J_n$ se compose des points de densité de l'ensemble $\mathrm{Int}E$, donc l'ensemble qu'il contient $\mathrm{Fr}\,F_{\lambda_{n-1}}+J_n$ se compose aussi de tels points. D'après (96) et (105), (97) et (106) et en vertu du lemme 2, il existe un ensemble J_n^* tel que

(114) $J_n^* = \bar{J}_n^*$,

(115) $|\mathrm{Fr}\, J_n^*| = 0$,

(116) $|J_n^*| < 1$,

(117) $\mathrm{Fr}\, F_{\lambda_{n-1}} + J_n \subset J_n^* \subset \mathrm{Fr}\, F_{\lambda_{n-1}} + J_n + \mathrm{Int}\, E \subset E$.

Pour $\lambda_n = 1/2^n$ définissons l'ensemble F_{λ_n} comme suit:

(118) $$F_{\lambda_n} = F_{\lambda_{n-1}} + J_n^* + I_n^*.$$

D'après (96), (114) et (101), on a $F_{\lambda_n} = \bar{F}_{\lambda_n}$, c'est-à-dire (96). D'après (97), (115) et (102), on a $|\mathrm{Fr} F_{\lambda_n}| = 0$, c'est-à-dire (97). Comme $\mathrm{Int} F_{\lambda_{n-1}} \subset F_{\lambda_{n-1}} \subset F_{\lambda_n}$, on a, d'après (117) et (118), $F_{\lambda_{n-1}} \subset F_{\lambda_n}$. Il suit de (99), (117), (103), (118) et de la dernière formule que

(119) $$F_{\lambda_{n-1}} \subset F_{\lambda_n} \subset E.$$

Il en résulte que les ensembles $F_{\lambda_1}, F_{\lambda_2}, \ldots, F_{\lambda_n}$ remplissent la condition (99) et, comme plus haut, $|E - F_{\lambda_n}| > 0$ et $|F_{\lambda_n} - F_{\lambda_{n-1}}| > 0$, donc les nombres $|F_{\lambda_n}|$ forment une suite strictement monotone. Il résulte enfin de (104), (113), (116) et (118) que $|F_{\lambda_n}| < \infty$, c'est-à-dire F_{λ_n} satisfait également à la condition (113).

On a défini par l'induction les ensembles F_λ pour $\lambda = 1/2^n$, $(n = 1, 2, \ldots)$, et on a démontré qu'ils ont les propriétés (96), (97), (99) et (113).

Il reste encore à définir F_λ pour $\lambda \neq 1/2^n$. On le fera également par induction; dans la première partie de celle-ci on admettra la définition des ensembles F_λ donnée pour les nombres $\lambda = 1/2^n$, $(n = 0, 1, \ldots)$. Dans la deuxième partie de l'induction on supposera definis les ensembles $F_{\lambda'}$ et $F_{\lambda''}$, où $\lambda'' < \lambda'$, on supposera que pour les nombres λ de l'intervalle (λ'', λ') les ensembles F_λ ne sont pas encore définis et on définira l'ensemble F_λ pour $\lambda = (\lambda'' + \lambda')/2$. Une telle définition englobe, on le voit, tous les ensembles d'indices λ égaux aux fractions binaires finies de l'ensemble $(0, 1\rangle$.

Supposons que les ensembles $F_{\lambda''}$ et $F_{\lambda'}$ $(\lambda' > \lambda'')$ ne soient pas vides, qu'ils soient de mesure finie, et qu'il aient les propriétés (96), (97) et (99). Il résulte de (99) que $|F_{\lambda''} - F_{\lambda'}| > 0$. Choisissons $\varepsilon = \frac{1}{2}|F_{\lambda''} - F_{\lambda'}|$ et supposons $G = \mathrm{Int}\, F_{\lambda''}$, $F = \mathrm{Fr}\, F_{\lambda'}$. En vertu du lemme 2, il existe un ensemble F_ε tel que $F_\varepsilon = \bar{F}_\varepsilon$, $|\mathrm{Fr} F_\varepsilon| = 0$, $|F_\varepsilon| < \varepsilon$, $\mathrm{Fr} F_{\lambda'} \subset F_\varepsilon \subset \mathrm{Fr} F_{\lambda'} + \mathrm{Int} F_{\lambda''}$. Comme $|(F_{\lambda''} - F_{\lambda'}) - F_\varepsilon| > \varepsilon = \frac{1}{2}|F_{\lambda''} - F_{\lambda'}|$, on peut choisir dans l'ensemble ouvert $\mathrm{Int} F_{\lambda''} - F_{\lambda'} - F_\varepsilon$ un nombre fini de segments fermés tels que la mesure de leur somme soit égale à $\frac{1}{2}|F_{\lambda''} - F_{\lambda'}| - |F_\varepsilon - F_{\lambda'}|$. En désignant la somme de ces segments par I, définissons l'ensemble $F_{\lambda'''}$ pour $\lambda''' = (\lambda'' + \lambda')/2$ comme suit:

$$F_{\lambda'''} = F_{\lambda'} + F_\varepsilon + I.$$

Il résulte de cette définition que

(120) $$|F_{\lambda'''}| = \tfrac{1}{2}(|F_{\lambda''}| + |F_{\lambda'}|),$$

(121) $$F_{\lambda'} \subset F_{\lambda'''} \subset F_{\lambda''},$$

que l'ensemble $F_{\lambda'''}$ a les propriétés (96), (97) et (99), et qu'il est de mesure finie. On obtient en tenant compte des formules (100), (117), (103), (111), (118), (121) et (99)

$$E = \sum_{k=1}^{\infty} J_k + \sum_{k=1}^{\infty} I_k \subset \sum_{k=1}^{\infty} J_k^* + \sum_{k=1}^{\infty} I_k^* \subset \sum_{k=1}^{\infty} F_{\lambda_k} = \sum_{\lambda} F_\lambda \subset E,$$

où $\lambda_k = 1/2^k$, ce qui prouve (98).

La fonction $M(\lambda) = |F_\lambda|$ définie dans l'ensemble des fractions binaires finies de l'intervalle $(0, 1\rangle$ est, d'après (99), monotone, d'après (120), elle est linéaire dans chaque intervalle $\langle 1/2^k, 1/2^{k-1}\rangle$, donc continue dans la somme de ces intervalles. (Evidemment ceci est vrai relativement à l'ensemble dans lequel elle est définie, néanmoins elle peut être étendue à une fonction continue dans tout l'intervalle $(0, 1\rangle$.) A tout $\varepsilon > 0$ et à tout a de l'intervalle $(0, 1\rangle$ on peut faire correspondre un nombre $\delta(a, \varepsilon)$ dont les propriétés sont mentionnées dans le lemme.

THÉORÈME 6. *Pour qu'un ensemble linéaire E soit de la forme $E = \{f(x) > a\}$, où $f(x)$ est une fonction approximativement continue, intégrable au sens de Riemann dans tout intervalle fini, il faut et il suffit que*

(122) $E \in M_5$,

(123) $|E \cdot \mathrm{Fr}\, E| = 0$.

Démonstration. Une fonction $f(x)$ intégrable au sens de Riemann est bornée dans chaque intervalle fini. Une fonction continue approximativement et bornée est la dérivée de son intégrale de Lebesgue (Denjoy [1], p. 172). Une fonction $f(x)$, dérivée d'une fonction continue, est de classe 1 de Baire, d'où $E \in F_\sigma$. Pour une fonction approximativement continue, l'ensemble $\{f(x) > a\}$ ne contient que ses points de densité; en tenant compte des considérations précédentes on obtient donc (122). La nécessité de (123) résulte du théorème 1. Il reste à démontrer que la conjonction des conditions (122) et (123) est une condition suffisante.

L'ensemble E remplit les hypothèses du lemme 3, il a donc toutes les propriétés qui y sont mentionnées. En particulier $E = \sum_\lambda F_\lambda$, où λ est une fraction binaire finie appartenant à l'intervalle $\langle 0,1\rangle$, et les ensembles F_λ ont les propriétés (96), (97) et (99). Définissons la fonction $f(x)$ comme suit:

$$f(x)=\begin{cases} \boldsymbol{a}+\sup\limits_{\lambda} \underset{\lambda}{E}[x\in F_\lambda] & \text{pour} \quad x\in E\,, \\ \boldsymbol{a} & \text{pour} \quad x\in \mathrm{C}E\,. \end{cases} \tag{124}$$

(Dans cette formule λ est une fraction binaire, positive, inférieure à 1.) Alors

$$\{f(x)\geqslant a\}=\begin{cases} \mathcal{E}^1 & \text{pour} \quad a\leqslant \boldsymbol{a}\,, \\ \prod\limits_{\lambda<a-\boldsymbol{a}} F_\lambda & \text{pour} \quad \boldsymbol{a}+1\geqslant a>\boldsymbol{a}\,. \end{cases}$$

Tous les ensembles à droite du signe d'égalité sont fermés, et les compléments de ces ensembles, c'est-à-dire les ensembles $\{f(x)<a\}$, sont ouverts et $f(x)$ est semi-continue supérieurement. On a

$$\{f(x)>a\}=\begin{cases} \mathcal{E}^1 & \text{pour} \quad a<\boldsymbol{a}\,, \\ E & \text{pour} \quad a=\boldsymbol{a}\,, \\ \sum\limits_{\lambda>a-\boldsymbol{a}} F_\lambda & \text{pour} \quad \boldsymbol{a}<a<1+\boldsymbol{a}\,, \\ 0 & \text{pour} \quad a\geqslant 1+\boldsymbol{a}\,. \end{cases}$$

Les ensembles $\mathcal{E}^1$, E, 0 se composent des points de leur pleine densité. Démontrons que les ensembles $\sum\limits_{\lambda>a-\boldsymbol{a}} F_\lambda$ ont aussi cette propriété, et il en résultera, en vertu du théorème de Denjoy ([1], p. 169) que $f(x)$ est approximativement continue. En effet, soit $x_0\in \sum\limits_{\lambda>a-\boldsymbol{a}} F_\lambda$. Il existe alors une fraction binaire λ' telle que $\lambda'>a-\boldsymbol{a}$ et $x_0\in F_{\lambda'}$. Choisissons une fraction binaire λ'' telle que $\lambda'>\lambda''>a-\boldsymbol{a}$. Alors $x_0\in F_{\lambda'}\subset F_{\lambda''}\subset \sum\limits_{\lambda>a-\boldsymbol{a}} F_\lambda$. Le point x_0 est donc un point de densité de l'ensemble $F_{\lambda''}$, a fortiori, de l'ensemble $\sum\limits_{\lambda>a-\boldsymbol{a}} F_\lambda$.

Démontrons maintenant que la fonction $f(x)$ est intégrable au sens de Riemann. Pour $a<\boldsymbol{a}$ et $a\geqslant 1+\boldsymbol{a}$, on a

$$\mathrm{Fr}\{f(x)>a\}=0\,. \tag{125}$$

Pour $a-\boldsymbol{a}$ de l'intervalle $(0,1)$ et pour tout $\varepsilon>0$, on choisit d'abord le nombre $\delta(a-\boldsymbol{a},\varepsilon)$ dont les propriétés sont mentionnées dans la partie finale du lemme 3, puis les fractions binaires λ_1 et λ_2 telles que

$$0<\lambda_1-a+\boldsymbol{a}<\delta(a-\boldsymbol{a},\varepsilon) \quad \text{et} \quad 0<a-\boldsymbol{a}-\lambda_2<\delta(a-\boldsymbol{a},\varepsilon)\,.$$

Alors $\mathrm{Int}\, F_{\lambda_1}\subset F_{\lambda_1}\subset\{f(x)>a\}\subset F_{\lambda_2}$. Il en résulte d'après (96)

$$\mathrm{Fr}\,\{f(x)>a\}\subset F_{\lambda_2}-\mathrm{Int}\,F_{\lambda_1}\,. \tag{126}$$

En vertu de (97), on a $|\mathrm{Int}F_{\lambda_1}|=|F_{\lambda_1}|$. En vertu de la partie finale du lemme 3, on a alors $|F_{\lambda_2}-F_{\lambda_1}|<\varepsilon$. Les 2 dernières relations et (99) donnent $|F_{\lambda''}-\mathrm{Int}F_{\lambda'}|<\varepsilon$, d'où, en tenant compte de (126), on a $|\mathrm{Fr}\{f(x)>a\}|<\varepsilon$. Le nombre ε étant arbitraire on obtient, d'après (125),

$$|\mathrm{Fr}\,\{f(x)>a\}|=0 \quad \text{pour} \quad a\neq\boldsymbol{a}\,.$$

L'ensemble des nombres a, pour lesquels $|\mathrm{Fr}\{f(x)>a|>0$, se compose donc d'un nombre $\boldsymbol{a}$. En vertu du théorème 4, l'ensemble des points de discontinuité de la fonction $f(x)$ est de mesure nulle. Comme il résulte de (124) que $\boldsymbol{a}\leqslant f(x)\leqslant \boldsymbol{a}+1$, la fonction $f(x)$ est intégrable au sens de Riemann dans chaque intervalle fini.

Travaux cités

[1] A. Denjoy, *Sur les fonctions dérivées sommables*, Bull. Soc. Math. France 43 (1915), p. 161-248.

[2] P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950.

[3] Z. Zahorski, *Über die Menge der Punkte in welchen die Ableitung unendlich ist*, Tôhoku Math. J. 48 (1941), p. 321-330.

[4] — *Sur la première dérivée*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), p. 1-54.

UNIWERSYTET ŁÓDZKI
UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ

Reçu par la Rédaction le 5.9.1955