Sur l'égalité $2^{\aleph_\lambda}=\aleph_{\lambda+1}$

par

J. Popruženko (Łódź)

Le but de cette Note est d'établir une propriété générale des relations d'ordre partiel et d'en déduire deux théorèmes d'équivalence pour l'égalité $2^{\aleph_\lambda}=\aleph_{\lambda+1}$.

Ceci fait, je démontre une proposition équivalente à l'hypothèse du continu, qui se rattache aux problèmes étudiés précédemment.

Il est à remarquer dès le début que, dans les raisonnements qui vont suivre, nous nous appuyons constamment sur l'axiome du choix.

1. Soit $\mathcal{M}$ un espace abstrait indénombrable de puissance $\mathfrak{m}=\aleph_\mu$ $(\mu\geqslant 1)$, ϱ — une relation d'ordre partiel existant dans $\mathcal{M}$. Cette relation est donc définie dans un certain ensemble de couples formés d'éléments de $\mathcal{M}$; par hypothèse, elle est non-réflexive et transitive.

Soit $\mathfrak{l}$ un nombre cardinal vérifiant l'inégalité

$$\aleph_0\leqslant\mathfrak{l}<\mathfrak{m}. \tag{1}$$

Considérons les 4 énoncés suivants:

1° *Quel que soit l'ensemble E $(E\subset\mathcal{M})$ de puissance $\leqslant\mathfrak{l}$, il existe un élément a de $\mathcal{M}$ tel que $b\varrho a$ pour tout $b\in E$.*

2° *Il n'existe aucun nombre cardinal $\mathfrak{k}$ satisfaisant à l'inégalité $\mathfrak{l}<\mathfrak{k}<\mathfrak{m}$.*

3° *Il existe une suite transfinie*

$$\{a_\xi\}_{\xi<\omega_\mu}, \tag{2}$$

bien ordonnée selon la relation ϱ[1]) *et contenant, pour tout $a\in\mathcal{M}$, un terme a_ξ tel que $a\varrho a_\xi$.*

4° *Il existe un ensemble K de puissance $\mathfrak{m}$ tel que, K_a étant l'ensemble de tous ses éléments c satisfaisant à la condition $c\varrho a$, on a $\overline{\overline{K}}_a\leqslant\mathfrak{l}$, quel que soit $a\in\mathcal{M}$.*

Nous ne savons pas si ces énoncés sont vrais ou non.

Quoi qu'il en soit, nous allons démontrer que la proposition suivante est vraie:

[1]) *C. à d. que l'inégalité $\xi<\xi'$ entraîne toujours $a_\xi\varrho a_{\xi'}$.*

Lemme. *L'existence simultanée des propriétés 1°-2° entraîne celle des propriétés 3°-4°, et réciproquement.*

Démonstration. I. Supposons les conditions 1° et 2° remplies.

En premier lieu, vu l'inégalité (1), il résulte de 2° qu'il existe un nombre ordinal $\lambda\geqslant 0$ tel que $\mu=\lambda+1$, $\mathfrak{l}=\aleph_\lambda$ et $\mathfrak{m}=\aleph_{\lambda+1}$. On conclut de là, en vertu d'un théorème connu de l'Arithmétique des nombres transfinis, que $\omega_{\lambda+1}$, dont l'indice est de première espèce, est un nombre initial régulier.

Ceci étant, soit

$$\{p_\eta\}_{\eta<\omega_{\lambda+1}} \tag{3}$$

une suite transfinie composée de tous les éléments de $\mathcal{M}$ et contenant chacun d'eux une seule fois. Définissons une suite transfinie extraite de (3) en procédant comme il suit.

Posons $a_0=p_0=p_{\eta_0}$, $\eta_0=0$.

ξ étant un nombre ordinal satisfaisant à l'inégalité $0<\xi<\omega_{\lambda+1}$, supposons que l'on ait déjà défini tous les indices η_γ, donc aussi tous les termes $a_\gamma=p_{\eta_\gamma}$, pour $0\leqslant\gamma<\xi$. Soit η^0 le plus petit nombre $<\omega_{\lambda+1}$ vérifiant l'inégalité $\eta_\gamma<\eta^0$ pour $0\leqslant\gamma<\xi$; en vertu de la régularité du nombre $\omega_{\lambda+1}$, un tel nombre η^0 existe. La puissance $\overline{\eta^0}$ de l'ensemble de tous les termes de la suite $\{p_\eta\}_{\eta<\eta^0}$ étant $<\overline{\omega}_{\lambda+1}=\mathfrak{m}$, on a d'après (1) et 2°, $\overline{\eta^0}\leqslant\mathfrak{l}$, d'où il résulte, en vertu de 1°, qu'il existe un élément p de $\mathcal{M}$ tel que $p_\eta\varrho p$ pour $\eta<\eta^0$. Soit $p_{\eta'}$ le premier terme de la suite (3) ayant cette propriété. On a évidemment $\eta'\geqslant\eta^0>\eta_\gamma$ $(0\leqslant\gamma<\xi)$. Posons $\eta_\xi=\eta'$ et $a_\xi=p_{\eta_\xi}$.

On définit ainsi par induction une suite de la forme (2), extraite de la suite (3), et l'on vérifie aussitôt qu'elle satisfait à la condition 3°.

Si l'on désigne par K l'ensemble de tous ses termes, on obtient un ensemble ayant la propriété 4°.

Il est ainsi démontré que la coexistence des propriétés 1° et 2° entraîne celle des propriétés 3° et 4°.

II. Supposons que les affirmations 3° et 4° soient vraies.

Démontrons d'abord que, dans cette hypothèse, le nombre ω_μ est régulier.

En effet, supposons le contraire. Alors, il existe un nombre ordinal σ_0 et une suite croissante de nombres ordinaux $\{\xi_\sigma\}_{\sigma<\sigma_0}$ tels que

$$\sigma_0<\omega_\mu \tag{4}$$

et

$$\lim_{\sigma\to\sigma_0}\xi_\sigma=\omega_\mu. \tag{5}$$

Soit c un élément de K. Soit ξ_c le premier indice dans la suite (2) tel que $c\varrho a_{\xi_c}$. Soit σ' le premier nombre ordinal $<\sigma_0$ tel que $\xi_{\sigma'}>\xi_c$; un tel nombre existe d'après (5).

On a donc $a_{\xi_c}\varrho a_{\xi_{\sigma'}}$, ce qui donne $c\varrho a_{\xi_{\sigma'}}$. Posons $\sigma'=\sigma(c)$.

Cette fonction se trouve ainsi définie d'une façon univoque pour tout $c\in K$. Comme l'inégalité (4) entraîne $\overline{\sigma}_0<\overline{\omega}_\mu=\mathfrak{m}$, l'ensemble de ses valeurs est de puissance $<\mathfrak{m}$.

D'autre part, d'après la définition même,

$$c\in K_{a_{\xi_{\sigma(c)}}}$$

d'où

$$K=\sum_{c\in K}K_{a_{\xi_{\sigma(c)}}}. \tag{6}$$

La formule (6) entraîne donc, en conséquence de la propriété 4° rapprochée de l'inégalité (1),

$$\overline{\overline{K}}\leqslant\mathfrak{l}\overline{\sigma}_0<\mathfrak{m},$$

contrairement à la condition $\overline{\overline{K}}=\mathfrak{m}$. Ceci démontre que ω_μ est un nombre initial régulier.

Cette propriété établie, les conditions 1° et 2° en sont des conséquences immédiates.

En effet, soit $E\subset\mathcal{M}$ un ensemble quelconque de puissance $\leqslant\mathfrak{l}$. Désignons, pour $b\in E$, par ξ_b le premier indice dans la suite (2) pour lequel $b\varrho a_{\xi_b}$; un tel a_{ξ_b} existe toujours en vertu de la condition 3° supposée vraie. Comme l'ensemble de tous ces termes est de puissance $\leqslant\mathfrak{l}<\mathfrak{m}=\overline{\omega}_\mu$, il existe dans la suite (2), d'après la régularité démontrée du nombre ω_μ, un terme a_{ξ_0} d'ordre plus élevé que tous les a_{ξ_b}. Il vient alors $b\varrho a_{\xi_b}\varrho a_{\xi_0}$ pour tout $b\in E$, ce qui démontre la propriété 1°.

Supposons maintenant qu'il existe un nombre cardinal $\mathfrak{k}$ satisfaisant à l'inégalité $\mathfrak{l}<\mathfrak{k}<\mathfrak{m}$ et soit K_1 un sous-ensemble de K de puissance $\mathfrak{k}$. En faisant correspondre à tout élément c de K_1 un terme a_{ξ_c} de la suite (2) de sorte que l'on ait $c\varrho a_{\xi_c}$, on constate comme plus haut qu'il existe dans (2) un terme a_{ξ_1} tel que $c\varrho a_{\xi_1}$ pour tout $c\in K_1$. Il s'en suit

$$K_{a_{\xi_1}}\supset K_1,$$

d'où

$$\overline{\overline{K}}_{a_{\xi_1}}\geqslant\overline{\overline{K}}_1=\mathfrak{k}>\mathfrak{l},$$

en contradiction avec 4°. Ceci démontre la propriété 2° et achève la démonstration du Lemme.

2. Appliquons maintenant le résultat acquis dans certains espaces concrets.

Posons dans (1) $\mathfrak{l}=\aleph_\lambda$ et interprétons l'espace $\mathcal{M}$ comme celui des suites transfinies de type ω_λ formées de nombres ordinaux $<\omega_\lambda$. Pour la puissance $\overline{\overline{\mathcal{M}}}$, on obtient alors la formule

$$\overline{\overline{\mathcal{M}}}=\mathfrak{m}=\mathfrak{l}^{\mathfrak{l}}=2^{\mathfrak{l}}=\aleph_\mu.$$

Soient $a=\{\alpha_\xi\}_{\xi<\omega_\lambda}$ et $b=\{\beta_\xi\}_{\xi<\omega_\lambda}$ deux éléments de $\mathcal{M}$.

Convenons d'écrire $a\precsim b$ lorsqu'il existe un indice $\xi=\xi_0$ tel que $\alpha_\xi<\beta_\xi$ pour $\xi_0\leqslant\xi<\omega_\lambda$, et dans ce cas seulement.

Il est clair que la relation $\precsim$ établit dans $\mathcal{M}$ un ordre partiel. Nous pouvons l'identifier avec la relation ϱ envisagée plus haut.

Supposons que ω_λ soit un nombre initial régulier. Je dis que, dans cette hypothèse, la propriété 1° peut être démontrée pour la relation $\precsim$. En effet, soit $E\subset\mathcal{M}$ un ensemble de puissance $\leqslant\mathfrak{l}$ et soit $\{b_\eta\}_{\eta<\omega_\lambda}$ une suite transfinie quelconque formée de tous ses éléments (on y pose au besoin $b_\eta=(0,0,\ldots)$ à partir d'un certain indice $\eta=\eta_0$).

On a donc

$$b_\eta=(\alpha_0^\eta,\alpha_1^\eta,\ldots,\alpha_\xi^\eta,\ldots),$$

où $\xi<\omega_\lambda$, $\eta<\omega_\lambda$ et $\alpha_\xi^\eta<\omega_\lambda$.

Posons

$$\gamma_\xi=\sum_{\eta\leqslant\xi}\alpha_\xi^\eta \tag{7}$$

pour $0\leqslant\xi<\omega_\lambda$. La série du second membre montre que γ_ξ est toujours un nombre ordinal, qu'il vérifie l'inégalité $\gamma_\xi\geqslant\alpha_\xi^{\xi_0}$ pour $\xi\geqslant\xi_0$, $0\leqslant\xi_0<\omega_\lambda$, et que l'on a, *pour* ω_λ *régulier*, $\overline{\gamma}_\xi<\overline{\omega}_\lambda$, donc $\gamma_\xi<\omega_\lambda$. D'après ces considérations, si l'on pose

$$a=\{\gamma_\xi+1\}_{\xi<\omega_\lambda}, \tag{8}$$

on obtient un élément de $\mathcal{M}$ satisfaisant à la condition $b\precsim a$ pour tout $b\in E$, ce qui démontre la propriété 1°.

Cela permet d'établir le théorème d'équivalence que voici:

THÉORÈME I. *Pour que l'on ait*

$$2^{\aleph_\lambda}=\aleph_{\lambda+1}\quad(\lambda\geqslant0), \tag{9}$$

il suffit et, si le nombre ω_λ *est régulier, il faut que les deux propositions suivantes soient simultanément vraies:*

(P_1) *Il existe une suite transfinie*

$$\{s_\eta\}_{\eta<\omega_\mu} \tag{10}$$

dont les termes sont des suites de type ω_λ de nombres ordinaux $<\omega_\lambda$, bien ordonnée selon la relation $\precsim$ et ayant la propriété suivante: à toute suite s de type ω_λ composée de nombres ordinaux $<\omega_\lambda$, appartenant à (10) *ou non, correspond un terme s_η de* (10) *tel que $s \precsim s_\eta$.*

(P$_2$) *Il existe une famille F de puissance $\aleph_\mu$ se composant de suites de type ω_λ de nombres ordinaux $<\omega_\lambda$ telle que, s étant une suite arbitraire de cette nature, appartenant à F ou non, l'ensemble de toutes les suites t de F vérifiant la relation $t \precsim s$ est de puissance $\leqslant \aleph_\lambda$.*

Pour $\lambda=0$, on retrouve le résultat dû à M.M. F. Rothberger ([2], p. 225) et W. Sierpiński.

Posons maintenant $\mathfrak{m}=2^{\mathfrak{l}}=2^{\aleph_\lambda}=\aleph_\mu$ et définissons $\mathcal{M}$ comme l'espace de toutes les suites de type ω_λ formées de nombres ordinaux $<\omega_\mu$. On a alors

$$\overline{\overline{\mathcal{M}}}=\mathfrak{m}^{\mathfrak{l}}=(2^{\mathfrak{l}})^{\mathfrak{l}}=(2^{\aleph_\lambda})^{\aleph_\lambda}=2^{\aleph_\lambda}=\aleph_\mu=\mathfrak{m}\,.$$

La relation $\precsim$ conservant son sens, on voit que si l'on admet la propriété 2°, qui entraîne dans nos conditions l'égalité (9), la propriété 1° se laisse démontrer sans aucune restriction. En effet, nous aurons alors $\omega_\mu=\omega_{\lambda+1}$; ce nombre étant régulier, les nombres γ_ξ de la formule (7) (où l'on a maintenant $a_\xi^\eta<\omega_{\lambda+1}$) satisferont toujours à l'inégalité $\gamma_\xi<\omega_{\lambda+1}$ et fourniront la suite (8) appartenant à $\mathcal{M}$ et satisfaisant à 1°.

Désignons par (Q$_i$) ($i=1,2$) les propositions qu'on obtient de (P$_i$) ($i=1,2$) en y remplaçant l'expression „de nombres ordinaux $<\omega_\lambda$" par „de nombres ordinaux $<\omega_\mu$". D'après notre Lemme, le théorème suivant est vrai:

THÉORÈME II. *L'égalité* (9) *équivaut à l'affirmation simultanée des propositions* (Q$_1$) *et* (Q$_2$).

(Dans ce théorème, la restriction: „si le nombre ω_λ est régulier" n'intervient pas.)

3. Les recherches de S. Braun et W. Sierpiński [1] sur le même sujet reposent sur une idée différente. Les méthodes imaginées par ces auteurs admettent plusieurs applications.

En les modifiant convenablement, on démontre le théorème suivant qui se rattache à notre Théorème II:

THÉORÈME III. *Pour qu'il n'existe aucun nombre cardinal intermédiaire entre $\mathfrak{l}=\aleph_\lambda$ et $2^{\mathfrak{l}}=\aleph_\mu$, il faut et il suffit qu'il existe une famille G de puissance $\aleph_\mu$ se composant de suites de type ω_λ de nombres ordinaux $<\omega_\mu$ et jouissant de la propriété suivante: quelle que soit la suite $s=\{a_\xi\}_{\xi<\omega_\lambda}$ de cette nature (appartenant à G ou non), l'ensemble des suites $t=\{\beta_\xi\}_{\xi<\omega_\lambda}$ de G telles que $a_\xi\neq\beta_\xi$ pour $0\leqslant\xi<\omega_\lambda$ est de puissance $\leqslant\aleph_\lambda$* (comp. [1], p. 6, Théorème II (Proposition (P))).

Nous omettons la démonstration, car ce n'est que le cas particulier où $\lambda=0$ qui nous intéresse ici. Dans ce cas, on obtient l'équivalence suivante:

L'égalité $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ équivaut à l'existence d'une famille G, de puissance du continu, composée de suites infinies de nombres ordinaux finis ou dénombrables et jouissant de la propriété suivante: quelle que soit la suite infinie $s=(a_1,a_2,\ldots)$ où $a_i<\omega_1$, l'ensemble des suites $t=(\beta_1,\beta_2,\ldots)$ de G telles que $a_i\neq\beta_i$ pour $i=1,2,\ldots$ est au plus dénombrable.

Nous nous proposons d'éliminer le transfini de cet énoncé et d'établir une condition équivalente à l'hypothèse du continu basée uniquement sur les propriétés des suites infinies d'entiers positifs.

Dans ce but, introduisons les notations suivantes:

Soit

$$t=(n_1,n_2,\ldots,n_k,\ldots)$$

une suite infinie d'entiers positifs. Désignons, d'une manière générale, par (t) le nombre irrationnel

$$(t)=\frac{1|}{|n_1}+\frac{1|}{|n_2}+\ldots+\frac{1|}{|n_k}+\ldots$$

Par Π_t^i ($i=0,1,2,\ldots$) désignons la suite

$$\Pi_t^i=\{n_{2^i(2j-1)}\}\qquad (j=1,2,\ldots)$$

extraite de la suite t.

a et b étant deux suites, nous n'écrirons $a=b$ que dans le cas où ces suites sont identiques.

Cela posé, démontrons le théorème suivant:

THÉORÈME IV. *Pour que l'on ait $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il faut et il suffit qu'il existe une famille Φ de puissance $2^{\aleph_0}$ de suites infinies d'entiers positifs jouissant de la propriété suivante: quelle que soit la suite s de cette nature (appartenant à Φ ou non), l'ensemble des suites t de Φ telles que $\Pi_t^i\neq\Pi_s^i$ pour $i=1,2,\ldots$ est au plus dénombrable.*

Démonstration. I. La condition est nécessaire. On s'appuie sur la propriété suivante des systèmes dénombrables de suites infinies d'entiers positifs:

$s_i=(n_1^i,n_2^i,\ldots,n_k^i,\ldots)$, où $i=1,2,\ldots$, étant un tel système, il existe une suite s différente de toutes les suites s_i et satisfaisant à la condition $\Pi_s^i=\Pi_{s_i}^i$ pour $i=1,2,\ldots$

En effet, on définit une telle suite s en posant

$$\Pi_s^0=\{n_{2j-1}^j+1\}\qquad (j=1,2,\ldots)$$

et

$$\Pi_s^i=\Pi_{s_i}^i\qquad (i=1,2,\ldots).$$

Ceci établi, admettons l'égalité $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Il existe alors une suite transfinie de type ω_1 formée de toutes les suites infinies d'entiers positifs et contenant chacune d'elles une seule fois. En s'appuyant toujours sur la propriété démontrée tout à l'heure, on définit par induction une suite extraite de la suite mentionnée, également de type ω_1, dont l'ensemble des termes représente la famille Φ demandée.

Le raisonnement ne diffère en rien de celui que nous avons déjà employé plus haut (démonstration du Lemme, I).

II. La condition est suffisante. La famille Φ satisfaisant aux conditions du Théorème, il existe une application de Φ au continu, soit à l'intervalle $I=[0\leqslant y\leqslant 1]$, ce que nous mettons en évidence en écrivant, pour $t\in\Phi$, $t=t^y$ $(y\in I)$. Ceci posé, définissons, pour tout i naturel et tout x irrationnel de l'intervalle $0<x<1$, les ensembles A_x^i par la formule

$$A_x^i=\underset{y}{E}\{t^y\in\Phi,\ (\Pi^i_{t^y})=x\}. \tag{11}$$

Ces ensembles jouissent, d'après leur définition même, des deux propriétés suivantes:

$$I=\sum_x A_x^i \qquad (i=1,2,\ldots), \tag{12}$$

la sommation s'étendant toujours à tous les nombres irrationnels x de l'intervalle $0<x<1$, et

$$A_x^iA_{x'}^i=0 \qquad (i=1,2,\ldots) \tag{13}$$

pour $x\neq x'$.

Démontrons que, quelle que soit la suite x_i $(i=1,2,\ldots)$ de nombres x, l'ensemble

$$D=I-\sum_{i=1}^{\infty}A_{x_i}^i \tag{14}$$

est au plus dénombrable (comp. [1], p. 3-4, Proposition (Q). Voir aussi [3], p. 15-18, Proposition P_4).

En effet, soit

$$x_i=\frac{1|}{|m_1^i}+\frac{1|}{|m_2^i}+\ldots+\frac{1|}{|m_k^i}+\ldots$$

Définissons la suite s en posant

$$\Pi_s^{\bar{i}}=(1,1,\ldots) \qquad \text{et} \qquad \Pi_s^i=(m_1^i,m_2^i,\ldots)$$

pour $i=1,2,\ldots$ Considérons un nombre y_0 de l'ensemble D et la suite correspondante t^{y_0} appartenant à Φ. D'après (14), on a $y_0\in A_{x_i}^i$ pour $i=1,2,\ldots$, d'où il résulte d'après (11) que $(\Pi^i_{t^{y_0}})\neq(\Pi^i_s)$, donc aussi $\Pi^i_{t^{y_0}}\neq\Pi^{\bar{i}}_s$ pour $i=1,2,\ldots$ Or, l'ensemble de toutes les suites t^y de la famille Φ satisfaisant à ce système de conditions étant par hypothèse au plus dénombrable, il en est de même de l'ensemble de leurs indices y. Comme tout nombre y_0 de D y est contenu, on a $\bar{\bar{D}}\leqslant\aleph_0$.

Soit maintenant N un sous-ensemble indénombrable de I.

Je dis qu'il existe un indice $i=i_0$ tel que

$$NA_x^{i_0}\neq 0 \tag{15}$$

pour tout indice x. En effet, dans le cas contraire, il existerait pour tout $\bar{i}$ naturel un nombre irrationnel x_i, $0<x_i<1$, tel que $NA_{x_i}^i=0$. On aurait donc, d'après (14), $N\subset D$, ce qui est impossible puisque D est au plus dénombrable.

La formule (15) établie, on a d'après (12)

$$N=\sum_x NA_x^{i_0},$$

d'où il résulte, en vertu de (13) et (15), que $\bar{\bar{N}}=2^{\aleph_0}$.

Comme N est un sous-ensemble indénombrable arbitraire de I, ceci démontre l'égalité $2^{\aleph_0}=\aleph_1$.

Le Théorème IV est ainsi établi.

Travaux cités

[1] S. Braun et W. Sierpiński, *Sur quelques propositions équivalentes à l'hypothèse du continu*, Fund. Math. 19 (1932), p. 1-7.

[2] F. Rothberger, *Une remarque concernant l'hypothèse du continu*, Fund. Math. 31 (1938), p. 224-226.

[3] W. Sierpiński, *Hypothèse du continu*, Warszawa-Lwów 1934.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 18.2.1955