Sur une propriété des nombres ordinaux

par

W. Sierpiński (Warszawa)

Le but de cette Note est de démontrer, sans utiliser les formes canoniques des nombres ordinaux, le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *m et n étant deux nombres naturels donnés quelconques (égaux ou non) les égalités $\alpha\beta=\beta\alpha$ et $\alpha^m\beta^n=\beta^n\alpha^m$ sont équivalentes pour les nombres ordinaux α et β.*

LEMME 1. *Si α et β sont des nombres ordinaux tels que $\alpha\beta>\beta\alpha$ et si m et n sont des nombres naturels, on a $\alpha^m\beta^n>\beta^n\alpha^m$.*

Démonstration du lemme 1. Soit s un nombre naturel et supposons que le lemme 1 est vrai pour les nombres naturels m et n, où $m\leqslant s$ et $n\leqslant s$ (ce qui est vrai pour $s=1$, puisque $\alpha\beta>\beta\alpha$). Soit n un nombre naturel $\leqslant s$: on a donc $\alpha^s\beta^n>\beta^n\alpha^s$. Or, si $n>1$, on a $\alpha\beta^{n-1}>\beta^{n-1}\alpha$ et si $n=1$ alors (vu que $\beta>0$, puisque $\alpha\beta>\beta\alpha$) on trouve $\alpha\beta^{n-1}=\beta^{n-1}\alpha$. En tout cas on a donc $\alpha\beta^{n-1}\geqslant\beta^{n-1}\alpha$. On a ainsi (vu que $\alpha>0$) $\alpha^{s+1}\beta^n=$ $=\alpha(\alpha^s\beta^n)>\alpha(\beta^n\alpha^s)=\alpha\beta(\beta^{n-1}\alpha^s)\geqslant\beta\alpha(\beta^{n-1}\alpha^s)=\beta(\alpha\beta^{n-1})\alpha^s\geqslant\beta(\beta^{n-1}\alpha)\alpha^s=\beta^n\alpha^{s+1}$. On a ainsi $\alpha^{s+1}\beta^n>\beta^n\alpha^{s+1}$ pour $n\leqslant s$. Or, soit m un nombre naturel $\leqslant s+1$: on a donc $\alpha^m\beta^s>\beta^s\alpha^m$ et $\alpha^m\beta>\beta\alpha^m$, d'où $\alpha^m\beta^{s+1}=(\alpha^m\beta^s)\beta\geqslant(\beta^s\alpha^m)\beta=$ $=\beta^s(\alpha^m\beta)>\beta^s(\beta\alpha^m)=\beta^{s+1}\alpha^m$, donc $\alpha^m\beta^{s+1}>\beta^{s+1}\alpha^m$. Le lemme 1 est donc vrai pour $m\leqslant s+1$ et $n\leqslant s+1$. La démonstration du lemme 1 résulte donc par induction (par rapport à s).

On voit aisément qu'en modifiant un peu la démonstration du lemme 1 on obtient le

LEMME 2. *Si α et β sont des nombres ordinaux tels que $\alpha\beta\geqslant\beta\alpha$ et si m et n sont des nombres naturels, on a $\alpha^m\beta^n\geqslant\beta^n\alpha^m$.*

En échangeant les lettres α et β ainsi que les lettres m et n, on obtient tout de suite des lemmes 1 et 2 les deux lemmes suivants:

LEMME 3. *Si α et β sont des nombres ordinaux tels que $\alpha\beta<\beta\alpha$ et si m et n sont des nombres naturels, on a $\alpha^m\beta^n<\beta^n\alpha^m$.*

LEMME 4. *Si α et β sont des nombres ordinaux tels que $\alpha\beta\leqslant\beta\alpha$ et si m et n sont des nombres naturels, on a $\alpha^m\beta^n\leqslant\beta^n\alpha^m$.*

Démonstration du théorème 1. Soient m et n deux nombres naturels, α et β deux nombres ordinaux tels que $\alpha\beta=\beta\alpha$. D'après les lemmes 2 et 4 on trouve $\alpha^m\beta^n\geqslant\beta^n\alpha^m$ et $\alpha^m\beta^n\leqslant\beta^n\alpha^m$, ce qui donne $\alpha^m\beta^n=\beta^n\alpha^m$.

D'autre part soient m et n deux nombres naturels et α et β deux nombres ordinaux tels que $\alpha^m\beta^n=\beta^n\alpha^m$. S'il était $\alpha\beta>\beta\alpha$, on aurait, d'après le lemme 1, $\alpha^m\beta^n>\beta^n\alpha^m$, contrairement à l'hypothèse. On a donc $\alpha\beta\leqslant\beta\alpha$. Or, s'il était $\alpha\beta<\beta\alpha$, on aurait, d'après le lemme 3, $\alpha^m\beta^n<\beta^n\alpha^m$, contrairement a l'hypothèse. On a donc $\alpha\beta=\beta\alpha$.

Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Il en résulte, en particulier, que si deux nombres ordinaux α et β sont multiplicativement commutables, des puissances quelconques de ces nombres d'exposants naturels sont aussi multiplicativement commutables. Or, cela n'est pas vrai pour les exposants transfinis, puisque, par exemple $2\cdot 3=3\cdot 2$, mais $2\cdot 3^\omega\neq 3^\omega\cdot 2$ (vu que $2\cdot 3^\omega=2\omega=\omega$ et $3^\omega\cdot 2=\omega\cdot 2>\omega$). On a aussi $\omega^\omega(\omega+1)^\omega=(\omega+1)^\omega\omega^\omega$, mais $\omega(\omega+1)\neq(\omega+1)\omega$, ce qui prouve que dans le théorème 1 les nombres m et n ne peuvent être remplacés par le nombre ω.

Corollaire. *Si l'on a pour les nombres ordinaux α et β et pour les nombres naturels m et n l'égalité $\alpha^m=\beta^n$, alors $\alpha\beta=\beta\alpha$.*

Démonstration. Supposons que α et β étant deux nombres ordinaux et m et n deux nombres naturels, on a $\alpha^m=\beta^n$. On a donc $\alpha^m\beta^m=$ $=\beta^{n+m}=\beta^{m+n}=\beta^m\alpha^m$ et il résulte du théorème 1 que $\alpha\beta=\beta\alpha$, c. q. f. d.

On démontre aussi que si l'on a pour les nombres ordinaux α et β l'égalité $\alpha\beta=\beta\alpha$, il existe des nombres naturels m et n tels que $\alpha^m=\beta^n$, mais la démonstration est assez longue: voir E. Jacobsthal [1], p. 484; voir aussi mon livre [2], Chapitre XIV, § 25, Théorème 44.

En modifiant un peu la démonstration du théorème 1 on démontre que pour les types ordinaux α et β et pour les nombres naturels m et n l'égalité $\alpha\beta=\beta\alpha$ entraîne l'égalité $\alpha^m\beta^n=\beta^n\alpha^m$. Or, le problème se pose si l'implication inverse a aussi lieu, en particulier si, pour les types ordinaux α et β, l'égalité $\alpha^2\beta^2=\beta^2\alpha^2$ entraîne l'égalité $\alpha\beta=\beta\alpha$.

Travaux cités

[1] E. Jacobsthal, *Vertauschbarkeit transfiniter Ordnungszahlen*, Math. Ann. 64 (1907), p. 475-488.

[2] W. Sierpiński, *Cardinal and ordinal numbers*, Warszawa 1956 (à paraître).

Reçu par la Rédaction le 29.9.1955