Sur une méthode de métrisation complète de certains espaces d'ensembles compacts

par

K. Kuratowski (Warszawa)

La méthode dont il est question dans cet ouvrage [1]) permet, parmi autres, de métriser de façon complète les espaces suivants:

A. l'espace $LC^n(\mathcal{Y})$ des sous-ensembles compacts LC^n (localement connexes en dimensions $\leqslant n$ au sens d'homotopie) d'un espace complet $\mathcal{Y}$,

B. l'espace $lc^n(\mathcal{Y})$ des sous-ensembles compacts lc^n (localement connexes en dimensions $\leqslant n$ au sens d'homologie) d'un espace complet $\mathcal{Y}$,

C. l'espace $P(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ des fonctions continues (partielles) définies sur des sous-ensembles compacts d'un espace complet $\mathfrak{X}$ et dont les valeurs appartiennent à un espace complet $\mathcal{Y}$,

D. l'espace $\mathfrak{P}(\mathcal{Y})$ des sous-continus localement connexes d'un espace complet $\mathcal{Y}$.

La même méthode permet aussi de métriser de façon complète, pour tout espace complet $\mathcal{Y}$ de dimension finie, l'espace de tous les sous-ensembles compacts de $\mathcal{Y}$ qui sont des rétractes absolus de voisinage [2]). Ces ensembles coïncident en effet avec les ensembles LC^n où n est la dimension de $\mathcal{Y}$.

Première partie. Théorèmes sur la métrisation complète

1. Rappelons d'abord le théorème suivant (voir [6], p. 80):

THÉORÈME 1. *Soit $\mathfrak{X}$ un espace métrique. Imaginons que $\mathfrak{X}$ est un espace $\mathcal{L}$ (de Fréchet) par rapport à la convergence, désignée par $x_i \to x$. Admettons que cette convergence entraîne la convergence déterminée par la distance*:

$$(1)\qquad (x_i \to x) \Rightarrow (\lim_{i\to\infty} |x_i - x| = 0)\,.$$

[1]) Présenté à la Société Polonaise de Mathématiques, Section de Varsovie, le 25 février 1955.

[2]) Ce problème a été résolu sur une autre voie par K. Borsuk [2].

Admettons, en outre, que $f_1, f_2, \ldots$ est une suite de fonctions définies sur $\mathfrak{X}$, à valeurs réelles et continues relativement à la convergence $x_i \to x$. Admettons enfin que toute suite $x_1, x_2, \ldots$, qui satisfait à la condition de Cauchy et pour laquelle toute suite $f_m(x_1), f_m(x_2), \ldots$ (pour $m = 1, 2, \ldots$) est bornée, converge vers un élément x de $\mathfrak{X}$: $x_i \to x$.

Dans ces hypothèses, en posant pour tout couple x, y de $\mathfrak{X}$:

$$(2)\qquad \|x-y\| = |x-y| + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{|f_m(x) - f_m(y)|}{1 + |f_m(x) - f_m(y)|}\,,$$

on attribue à $\mathfrak{X}$ le caractère d'un espace complet [3]) *et la „nouvelle distance” est conforme à la convergence $x_i \to x$, c'est-à-dire que*

$$(3)\qquad (\lim_{i\to\infty} \|x_i - x\| = 0) \equiv (x_i \to x)\,.$$

Nous déduirons du théorème 1 le théorème suivant qui est plus maniable pour les applications dont il est question dans cet ouvrage.

THÉORÈME 2. *Soit $\mathfrak{X}$ un espace métrique. Imaginons que l'on a fait correspondre à tout point x de $\mathfrak{X}$ une fonction positive non décroissante $\varphi_x(t)$, où $0 < t \leqslant 1$, et telle que $\varphi_x(t) \leqslant 1$.*

Nous dirons que la suite $x_1, x_2, \ldots$ „converge vers x au sens de l'opération φ” — en symbole $x_i \underset{\varphi}{\to} x$ — lorsqu'elle converge au sens de la distance, c'est-à-dire que

$$(4)\qquad \lim_{i\to\infty} |x_i - x| = 0\,,$$

et qu'en outre

$$(5)\qquad \lim_{i\to\infty} \varphi_{x_i}(t) = \varphi_x(t) \text{ si la fonction } \varphi_x \text{ est continue au point } t.$$

Admettons que toute suite $x_1, x_2, \ldots$ qui satisfait à la condition de Cauchy, ainsi qu'à la condition suivante

$$(6)\qquad \inf_i \varphi_{x_i}(t) > 0 \text{ quel que soit } t > 0\,,$$

converge vers un élément x de $\mathfrak{X}$ au sens de l'opération φ, c'est-à-dire que

$$x_i \underset{\varphi}{\to} x\,.$$

Dans cette hypothèse, on peut introduire dans l'espace $\mathfrak{X}$ une „nouvelle distance”, que nous désignerons par $\|x-y\|$, conforme à la convergence $x_i \underset{\varphi}{\to} x$, c'est-à-dire que

$$(7)\qquad (\lim_{i\to\infty} \|x_i - x\| = 0) \equiv (x_i \underset{\varphi}{\to} x)\,,$$

et telle que par rapport à cette distance l'espace $\mathfrak{X}$ soit complet.

[3]) Un espace métrique est dit *complet* lorsque toute suite de ses points qui satisfait à la condition de Cauchy converge vers un point de cet espace.

Plus précisément, en posant

$$(8)\qquad f_m(x)=1:\int_0^{1/m}\varphi_x(t)\,dt\,,$$

on définit la nouvelle distance par la formule (2).

Démonstration. En vertu du théorème 1, tout revient à démontrer que:

1° $f_m(x)$ est une fonction continue de x (dans le sens de la convergence φ),

2° si la suite $f_m(x_1), f_m(x_2), \ldots$ est bornée quel que soit m, la condition (6) est satisfaite.

Afin d'établir 1°, posons $x_i \underset{\varphi}{\to} x$. L'égalité (5) est donc réalisée presque partout. Comme en outre les fonctions φ_{x_i} sont uniformément bornées, on a

$$\int_0^{1/m}\varphi_x(t)\,dt=\lim_{i\to\infty}\int_0^{1/m}\varphi_{x_i}(t)\,dt\,,\qquad \text{c'est-à-dire}\qquad f_m(x)=\lim_{i\to\infty}f_m(x_i)\,.$$

Pour établir 2°, posons

$$\gamma(t)=\inf_i\varphi_{x_i}(t)\,.$$

Supposons, contrairement à (6), que $\gamma(t_0)=0$ pour un $t_0>0$. La fonction γ étant non-décroissante, il vient $\gamma(t)=0$ pour tout $t<t_0$.

Soit $m>1/t_0$. Il vient $\gamma(1/m)=0$ et d'autre part

$$\int_0^{1/m}\varphi_{x_i}(t)\,dt\leqslant\frac{1}{m}\,\varphi_{x_i}\!\left(\frac{1}{m}\right),$$

d'où

$$\inf_i\int_0^{1/m}\varphi_{x_i}(t)\,dt\leqslant\frac{1}{m}\cdot\inf_i\varphi_{x_i}\!\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m}\,\gamma\!\left(\frac{1}{m}\right)=0\,.$$

La suite $f_m(x_1), f_m(x_2), \ldots$ est donc non-bornée.

Remarques. 1. *Si l'hypothèse du théorème* 2 *est satisfaite, la condition* $x_i \underset{\varphi}{\to} x$ *équivaut à la condition* (4) *rapprochée de* (6).

C'est une conséquence directe du fait que les fonctions φ_x sont non-décroissantes et positives pour $t>0$.

2. *Dans le cas particulier où la condition* (4) *implique* (5), *on peut remplacer dans le théorème* 2 *la condition* $x_i \underset{\varphi}{\to} x$ *par la condition* (4).

Car dans ce cas, ces deux conditions sont équivalentes.

2. La possibilité d'appliquer le théorème 2 à la métrisation des espaces d'ensembles possédant l'une des quatre propriétés citées dans l'introduction, repose tout d'abord sur le fait que les définitions de ces propriétés sont équivalentes à des conditions de la forme [4]):

$$(9)\qquad \prod_t\sum_u \alpha_x(t,u)\,,$$

α étant une fonction propositionnelle de trois variables x, t et u, où t et u parcourent l'intervalle $0<\tau\leqslant 1$ et x parcourt un espace complet $\mathcal{M}$ donné (ou bien — comme dans le cas C — un sous-ensemble de cet espace). En outre, α satisfait aux deux implications suivantes:

$$(0<u'<u)\,\alpha_x(t,u)\Rightarrow\alpha_x(t,u')\,,\qquad (0<t'<t)\,\alpha_x(t',u)\Rightarrow\alpha_x(t,u)\,.$$

A savoir:

(A) La condition $A\in LC^n(\mathcal{Y})$ s'exprime par la condition (9) en posant [5]):

$$(10)\qquad \alpha_A(t,u)\equiv\prod_f\Big\{[\delta f(\mathcal{S}_m)<u]\Rightarrow\sum_{f^*}(f\subset f^*)[\delta f^*(\mathcal{Q}_{m+1})\leqslant t]\Big\}\,,$$

où la variable f parcourt les espaces $A^{\mathcal{S}_m}$ avec $m=1,2,\ldots,n$, f^* parcourt $A^{\mathcal{Q}_{m+1}}$ et la variable A parcourt l'espace $\mathcal{M}$ (métrisé par la distance de Hausdorff [6])) de tous les sous-ensembles compacts non vides de l'espace complet $\mathcal{Y}$ (cf. le lemme du N° 3).

---

[4]) L'opérateur logique $\prod\limits_t$ signifie „quel que soit t". $\sum\limits_t$ signifie „il existe un t tel que".

[5]) Le *diamètre* de l'ensemble X, c'est-à-dire la borne supérieure des distances des points de X, est désignée par $\delta(X)$.

X étant compact (au sens de Fréchet, cf. [4], p. 90) et Y métrique, Y^X désigne l'espace des fonctions continues définies sur X et à valeurs dans Y. La distance de deux éléments f et g de Y^X est définie par l'égalité

$$|f-g|=\sup|f(x)-g(x)|\,.$$

$\mathcal{Q}_{n+1}$, où $n\geqslant 0$, désigne la boule composée des points $(x_1,x_2,\ldots,x_{n+1})$ de l'espace euclidien à $n+1$ dimensions tels que

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{n+1}^2\leqslant 1.$$

En remplaçant dans cette inégalité $\leqslant$ par $=$, on obtient la définition de la sphère $\mathcal{S}_n$.

Nous convenons que $\mathcal{Q}_0$ se compose du point 0 et que $\mathcal{S}_{-1}$ est l'ensemble vide. Un ensemble est donc LC^{-1} lorsqu'il est non vide.

$f\subset g$ veut dire que la fonction g est un prolongement de la fonction f.

[6]) En posant $\varrho(p,X)=\inf|p-x|$ où x parcourt X, on appelle *distance de Hausdorff* de deux ensembles bornés et non vides A et B, dénotée par $\mathrm{dist}(A,B)$, la borne supérieure des nombres $\varrho(x,B)$ où $x\in A$ et $\varrho(y,A)$ où $y\in B$.

(B) D'une façon analogue, $A \in lc^n(\mathcal{Y})$ équivaut à la condition (9) en posant

(11) $$a_A(t,u) \equiv \prod_{\Gamma} \Big\{[\delta(\Gamma)<u] \Rightarrow \sum_{L} (\Gamma=\partial L)[\delta(L)\leqslant t]\Big\},$$

où la variable Γ parcourt les cycles (de Vietoris) de dimension $m\leqslant n$ situés sur A et L parcourt les chaînes de dimension $\leqslant m+1$ situées sur A.

(C) Pour obtenir une condition équivalente à $f \in P(\mathcal{X}_0,\mathcal{Y}_0)$, on pose dans (9):

(12) $$a_f(t,u)\equiv \prod_{x,x'\in A_f}\{(|x-x'|<u)\Rightarrow[|f(x)-f(x')|\leqslant t]\},$$

où A_f désigne l'ensemble des arguments de la fonction f dont les valeurs appartiennent à $\mathcal{Y}_0$; ici le rôle de l'espace $\mathcal{M}$ joue l'espace des sous-ensembles compacts non vides du produit cartésien $\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0$ des espaces complets $\mathcal{X}_0$ et $\mathcal{Y}_0$ (f étant conçu comme sous-ensemble de $\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0$ et parcourant les sous-ensembles compacts de $\mathcal{X}_0\times\mathcal{Y}_0$ qui représentent des fonctions).

(D) x et y étant deux points d'un continu, désignons par $\varrho_C(x,y)$ leur distance relative, c'est-à-dire le diamètre du plus petit sous-continu de C qui contient ces points; la propriété d'être un continu localement connexe équivaut à la continuité de la distance relative (cf. [5], p. 181); elle s'exprime donc par la condition (9) en y posant:

(13) $$a_C(t,u)\equiv\prod_{x,x'\in C}\{(|x-x'|<u)\Rightarrow[\varrho_C(x,x')\leqslant t]\}.$$

Ici le rôle de l'espace $\mathcal{M}$ joue l'espace des sous-continus d'un espace complet donné $\mathcal{Y}$.

Désignons, d'une façon générale, par $\mathcal{X}$ l'ensemble des x satisfaisant à la condition (9). Comme sous-ensemble de l'espace métrique $\mathcal{M}$, l'espace $\mathcal{X}$ est métrique. En même temps, $\mathcal{X}$ peut être muni d'une notion de convergence, imposée par la fonction propositionnelle a (et qui, en général, est différente de la notion de convergence qui dérive de la métrique de l'espace $\mathcal{X}$). C'est bien „la convergence au sens de l'opération φ" (cf. N° 1, théorème 2), cette opération étant définie pour tout $x\in\mathcal{X}$, comme suit [7]):

(14) $\varphi_x(t)$, *où* $0<t\leqslant 1$, *est la borne supérieure des nombres* u *tels que*
$$u\leqslant t \quad \textit{et} \quad a_x(t,u).$$

[7]) Le sens topologique de cette convergence sera analysé de plus près dans les N^{os} **4**, 9 et 12.

On constate aussitôt que:

1° *φ_x est une fonction non-décroissante de la variable t,*

2° *$\varphi_x(t)>0$ quel que soit $t>0$.*

On parvient ainsi à la conclusion que, pour pouvoir métriser l'espace $\mathcal{X}$ de façon complète conformément à la convergence $x_i \underset{\varphi}{\to} x$, il suffit de démontrer que l'hypothèse du théorème 2 est satisfaite; la formule (2) donne alors la métrique demandée.

La démonstration de l'hypothèse du théorème 2 se ramène dans chacun des quatre cas considérés à la démonstration des deux propositions suivantes (en tenant compte du fait que l'espace $\mathcal{M}$ est complet):

PROPOSITION 1. *$x_1,x_2,\ldots$ étant une suite d'éléments de $\mathcal{X}$ et x — un élément de $\mathcal{M}$ satisfaisant aux conditions* (4) *et* (6), *on a $x\in\mathcal{X}$.*

PROPOSITION 2. *$x,x_1,x_2,\ldots$ étant une suite d'éléments de $\mathcal{X}$, les conditions* (4) *et* (6) *entraînent* (5).

Remarque. *La condition* (6) *équivaut à*

(15) $$\prod_t\sum_u\prod_i a_{x_i}(t,u).$$

En effet, en supposant que la condition (6) est satisfaite, à tout t correspond un $u>0$ tel que, quel que soit i, on a $u<\varphi_{x_i}(t)$, donc que $a_{x_i}(t,u)$. La condition (15) est donc satisfaite.

Inversement, en admettant la condition (15), il existe, pour t fixe, un u tel que $a_{x_i}(t,u)$ pour $i=1,2,\ldots$ et que $0<u\leqslant t$. On a donc selon (14) $u\leqslant\varphi_{x_i}(t)$, d'où l'inégalité (6).

Il est à remarquer que la condition (15) signifie que les éléments $x_1,x_2,\ldots$ jouissent uniformément de la propriété (9) (en intervertant l'ordre des opérateurs $\sum_u$ et $\prod_i$, on n'affirmerait que le fait que tous les éléments $x_1,x_2,\ldots$ jouissent de la propriété (9), mais en général u dépenderait de i).

Ainsi, dans les cas (A) et (B), la condition (15) signifie que les ensembles $A_1,A_2,\ldots$ sont *uniformément* LC^n resp. lc^n; dans les cas (C) et (D) — elle veut dire que les fonctions $f_1,f_2,\ldots$, resp. les fonctions $\varrho_{C_1},\varrho_{C_2},\ldots$ sont *également continues*.

3. LEMME. *$\mathcal{Y}$ étant un espace complet, la famille de tous ses sous-ensembles compacts (non vides), métrisée par la distance de Hausdorff, est un espace complet.*

Démonstration. L'espace de tous les sous-ensembles bornés et fermés (non vides) de $\mathcal{Y}$ étant complet (d'après un théorème de Hahn, cf. [4], p. 314), il s'agit de démontrer que la famille considérée constitue un sous-ensemble fermé de cet espace.

Soient donc $A_1, A_2, \ldots$ une suite de sous-ensembles compacts de $\mathcal{Y}$ telle que

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{dist}(A_i, A) = 0 . \tag{16}$$

Il s'agit de montrer que A est compact.

Soit $p_j \in A$ pour $j = 1, 2, \ldots$ Posons $\varepsilon_i = \operatorname{dist}(A_i, A)$. Donc $\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$. Soit

$$q_{i,j} \in A_i \quad \text{et} \quad |q_{i,j} - p_j| \leqslant \varepsilon_i . \tag{17}$$

L'ensemble A_1 étant compact, la suite $q_{1,1}, q_{1,2}, \ldots$ contient une sous-suite convergente; soit

$$\lim_{j\to\infty} q_{1,k_j} = q_1 \in A_1 . \tag{18}$$

D'une façon analogue, soit

$$\lim_{j\to\infty} q_{2,m_{k_j}} = q_2 \in A_2 \tag{19}$$

et ainsi de suite.

La suite $q_1, q_2, \ldots$, ainsi définie, satisfait à la condition de Cauchy, car d'après (17)

$$|q_{1,m_{k_j}} - q_{2,m_{k_j}}| \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 , \quad \text{d'où} \quad |q_1 - q_2| \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 ,$$

et d'une façon générale $|q_s - q_t| \leqslant \varepsilon_s + \varepsilon_t$.

L'espace $\mathcal{Y}$ étant complet, soit

$$q = \lim_{i\to\infty} q_i . \tag{20}$$

D'après (16) $q \in A$. Nous allons démontrer que la suite $p_1, p_2, \ldots$ contient une suite partielle qui converge vers q (ce qui achèvera la démonstration du lemme).

Supposons par contre qu'il existe un $\delta > 0$ tel que

$$|p_i - q| > \delta \tag{21}$$

pour tout i suffisamment grand. Soit conformément à (20) i un indice tel que

$$|q_i - q| < \delta/3 \quad \text{et} \quad \varepsilon_i < \delta/3 . \tag{22}$$

D'après la définition de q_i (cf. (18) et (19)), il existe un nombre r_i aussi grand que l'on veut et tel que

$$|q_{i,r_i} - q_i| < \delta/3 ,$$

d'où, en vertu de (17) et (22), $|p_{r_i} - q| < \delta$, contrairement à (21).

Deuxième partie. Applications

A. L'espace $LC^n(Y)$

4. A étant un ensemble compact non vide, désignons par $a_A^n(t)$ la borne supérieure des nombres $u \leqslant t$ tels que toute fonction $f \in A^{\mathcal{S}_m}$ satisfaisant à l'inégalité $\delta[f(\mathcal{S}_m)] < u$ admet une extension $f^* \in A^{\mathcal{Q}_{m+1}}$ telle que $\delta[f^*(\mathcal{Q}_{m+1})] \leqslant t$ quel que soit $m \leqslant n$.

La fonction $a_A^n(t)$ coïncide évidemment avec la fonction $\varphi_X(t)$ de la formule (14), a étant défini par l'équivalence (10).

Dans le cas où n est fixe — cas qui interviendra d'habitude dans la suite — nous omettrons l'indice n en écrivant $a_A(t)$ au lieu de $a_A^n(t)$.

Théorème A. *Soit $\mathcal{Y}$ un espace complet. En posant pour tout couple d'éléments A et B de $LC^n(\mathcal{Y})$ (pour n fixe):*

$$\sigma(A, B) = \operatorname{dist}(A, B) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{|f_m(A) - f_m(B)|}{1 + |f_m(A) - f_m(B)|} ,$$

où

$$f_m(X) = 1 : \int_0^{1/m} a_X(t)\, dt ,$$

on attribue à $LC^n(\mathcal{Y})$ le caractère d'un espace métrique complet tel que, pour que l'on ait

$$\lim_{i\to\infty} \sigma(A_i, A) = 0 , \tag{23}$$

où $A_1, A_2, \ldots$ appartiennent à $LC^n(\mathcal{Y})$, il faut et il suffit que

$$\lim_{i\to\infty} \operatorname{dist}(A_i, A) = 0 \tag{24}$$

et que les ensembles $A_1, A_2, \ldots$ soient uniformément [8]) *LC^n* [9]).

Pour déduire ce théorème du théorème 2 du N° 1, il s'agit de démontrer les deux théorèmes suivants (cf. la remarque 1 du N° 1; les propositions 1 et 2 et la remarque du N° 2):

[8]) Rappelons (cf. la remarque du N° 2) que les ensembles $A_1, A_2, \ldots$ sont dits *uniformément LC^n* (pour n fixe) lorsqu'à tout $t > 0$ correspond un $u > 0$ tel que toute fonction $f \in A_i^{\mathcal{S}_m}$ pour laquelle $\delta f(\mathcal{S}_m) < u$ admet une extension $f^* \in A_i^{\mathcal{Q}_{m+1}}$ telle que $\delta f^*(\mathcal{Q}_{m+1}) \leqslant t$ quel que soient $i = 1, 2, \ldots$ et $m \leqslant n$.

[9]) C'est-à-dire que la métrique σ est conforme à la *convergence régulière* au sens de Curtis (qui signifie que l'égalité (24) a lieu et que les ensembles $A_1, A_2, \ldots$ sont uniformément LC^n). Voir [3] et cf. [10] pour le cas des ensembles lc^n.

Théorème A_1. *$\mathcal{Y}$ étant complet et $A_1, A_2, \ldots$ appartenant à $LC^n(\mathcal{Y})$, les conditions* (24) *et*

$$\inf_i a_{A_i}(t) > 0 \quad \textit{quel que soit } t > 0\,, \tag{25}$$

entraînent $A \in LC^n(\mathcal{Y})$.

Théorème A_2. *Les ensembles $A, A_1, A_2, \ldots$ appartenant à $LC^n(\mathcal{Y})$, les conditions* (24) *et* (25) *impliquent que*

$$\lim_{i\to\infty} a_{A_i}(t) = a_A(t) \tag{26}$$

pour tout t qui est un point de continuité de la fonction a_A.

5. Notations et théorèmes auxiliaires. On constate aussitôt que:

(27) $a_A^n(t) \leqslant a_A^{n-1}(t) \leqslant t$,

(28) $a_A^{-1}(t) = t$,

(29) *les conditions $f \in A^{S_m}$, $m \leqslant n$ et $\delta f < a_A(t)$*[10]) *impliquent l'existence d'une fonction $f^* \in A^{Q_{m+1}}$ telle que $f \subset f^*$ et $\delta f^* \leqslant t$,*

(30) *la condition $a_A(t) < \eta \leqslant t$ implique l'existence d'un $m \leqslant n$ et d'une fonction $f \in A^{S_m}$ telle que $\delta f < \eta$ et qui n'admet aucune extension $f^* \in A^{Q_{m+1}}$ avec $\delta f^* \leqslant t$,*

(31) $0 < t \leqslant t' \leqslant 1 \Rightarrow a_A(t) \leqslant a_A(t')$.

Remarque. La fonction $a_A^n(t)$ peut être, en général, discontinue par rapport à chacune des variables: t et A.

Pour s'en convaincre, désignons par A l'arc $\varrho = \frac{1}{4}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{5}{3}\pi$ (en coordonnées polaires). Il vient

$$a_A^0(t) = \begin{cases} t & \text{pour} \quad 0 < t \leqslant \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{4} & \text{pour} \quad \frac{1}{4} \leqslant t < \frac{1}{2}, \\ t & \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{32}$$

La fonction $a_A^0(t)$ est donc discontinue au point $t = \frac{1}{2}$.

Soit, en second lieu, A_i l'arc $\varrho = 1/4 + 1/i$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{5}{3}\pi$. Il vient $a_{A_i}^0(\frac{1}{2}) = 1/4 + 1/i$ (pour $i \geqslant 4$), tandis que $a_A^0(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Comme A_i converge vers A, $a_A^0(\frac{1}{2})$ n'est pas une fonctionnelle continue de A.

[10]) Pour abréger nous écrivons δf au lieu de $\delta f(X)$, lorsque X est l'ensemble des arguments de la fonction f.

Définition. La fonction $b_A^n(t)$ est définie par induction comme suit:

$$b_A^{-1}(t) = a_A^{-1}(t)\,, \tag{33}$$

$$b_A^n(t) = b_A^{n-1}[\tfrac{1}{4} a_A^n(t/4)]\,. \tag{34}$$

En particulier:

$$b_A^0(t) = \tfrac{1}{4} a_A^0(t/4), \qquad b_A^1(t) = \tfrac{1}{4} a_A^0[\tfrac{1}{16} a_A^1(t/4)]\,.$$

On vérifie facilement que

(35) *si A est un LC^n, on a $b_A^n(t) > 0$ pour $t > 0$,*

(36) *$b_A^n(t)$ est une fonction non décroissante de t,*

(37) $b_A^n(t) \leqslant b_A^{n-1}(t)$,

(38) $b_A^n(t) \leqslant a_A^n(t) \leqslant t$.

Nous allons démontrer que la condition (25) implique la suivante:

(39) $\inf_i b_{A_i}^n(t) > 0$ *quel que soit* $t > 0$.

Procédons par induction. Pour $n = -1$ cette implication est une conséquence de (33).

Admettons qu'elle soit vraie pour $n-1$. Soit $t > 0$. Posons

$$t' = \inf_i a_{A_i}^n(t/4)\,. \tag{40}$$

D'après (25), $t' > 0$. Selon (27) on a pour tout $u > 0$

$$\inf_i a_{A_i}^{n-1}(u) \geqslant \inf_i a_{A_i}^n(u) > 0\,.$$

Il en résulte par hypothèse (en posant $u = t'/4$) que

$$\inf_i b_{A_i}^{n-1}(t'/4) > 0\,.$$

Il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que

$$b_{A_i}^{n-1}(t'/4) > \varepsilon \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots \tag{41}$$

Comme d'autre part (selon (40)) $a_{A_i}^n(t/4) \geqslant t'$, il vient d'après (34), (36) et (41):

$$b_{A_i}^n(t) = b_{A_i}^{n-1}[\tfrac{1}{4} a_{A_i}^n(t/4)] \geqslant b_{A_i}^{n-1}(t'/4) > \varepsilon\,,$$

d'où l'inégalité (39).

6. Lemme 1. *Etant données deux fonctions $f, g \in \mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$, on a*

$$\delta[g(\mathcal{X})] \leqslant \delta[f(\mathcal{X})] + 2|g - f|\,.$$

Car $|g(x) - g(x')| \leqslant |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(x')| + |f(x') - g(x')|$.

LEMME 2. *Soient A et B deux ensembles compacts, dont le premier est un LC^n. Soit P un polytope simplicial de dimension $\leqslant n+1$; soient $f \in B^P$ et $t>0$. En supposant que*

(42) $$\operatorname{dist}(A,B)<b_A^n(t),$$

il existe une fonction $g \in A^P$ telle que

(43) $$|g-f|<t.$$

Plus encore: *en supposant que P est un polytope de dimension arbitraire, que P_0 est un sous-polytope de P tel que*

(44) $$\dim(P-P_0)\leqslant n+1,$$

et que $g_0 \in A^{P_0}$, où [11])

(45) $$|g_0-(f|P_0)|<b_A^n(t),$$

on peut assujettir la fonction g à la condition supplémentaire qu'elle soit une extension de la fonction g_0:

(46) $$g_0 \subset g \in A^P.$$

Démonstration. Procédons par induction.

1. Pour $n=-1$, $P-P_0$ est un polytope de dimension 0, c'est-à-dire un ensemble fini de points: $P-P_0=(p_1,\ldots,p_m)$. En outre $b_A^{-1}(t)=t$. On définit la fonction $g \in A^P$ en admettant que $g(p)=g_0(p)$ pour $p \in P_0$ et que $g(p_j)$, pour $j=1,2,\ldots,m$, est un point de l'ensemble A tel que

$$|g(p_j)-f(p_j)|<t.$$

L'existence d'un tel point résulte de la condition (42).

2. Admettons que le lemme est vrai pour un entier $n-1$ (où $n\geqslant 0$); nous allons l'établir pour n.

Il est évidemment légitime d'admettre que les simplexes (ouverts) Δ_i de la décomposition simpliciale du polytope $P=\sum\Delta_i$ sont suffisamment petits pour que l'on ait, pour tout i,

(47) $$\delta[f(\Delta_i)]<\tfrac{1}{2}a_A^n(t/4).$$

Soit P_1 le polytope P_0 augmenté de tous les simplexes Δ_i de dimension $\leqslant n$.

On a donc $\dim(P_1-P_0)\leqslant n$. D'après (42) et (34) on a

(48) $$\operatorname{dist}(A,B)<b_A^{n-1}[\tfrac{1}{4}a_A^n(t/4)]$$

[11]) Nous désignons par $f|P$ la fonction partielle, qui s'obtient de f en restreignant la variabilité de son argument à l'ensemble P.

et d'après (45):

(49) $$|g_0-(f|P_0)|<b_A^{n-1}[\tfrac{1}{4}a_A^n(t/4)].$$

A étant un LC^{n-1}, le lemme est donc applicable pour le cas de $n-1$; on en déduit l'existence d'une fonction $h \in A^{P_1}$ telle que

(50) $$|h-(f|P_1)|<\tfrac{1}{4}a_A^n(t/4) \quad\text{et}\quad g_0\subset h.$$

Soit Δ_j un simplexe contenu dans $P-P_1$. Par définition de P_1, le bord $\dot{\Delta}_j$ de Δ_j est contenu dans P_1; les fonctions h et $f|P_1$ sont donc définies sur $\dot{\Delta}_j$. D'après le lemme 1 et (50), il vient

$$\delta[h(\dot{\Delta}_j)]\leqslant\delta[f(\dot{\Delta}_j)]+2|h-(f|P_1)|<\delta[f(\Delta_j)]+\tfrac{1}{2}a_A^n(t/4),$$

d'où en vertu de (47)

(51) $$\delta[h(\dot{\Delta}_j)]<a_A^n(t/4).$$

L'ensemble A étant un LC^n et $\bar{\Delta}_j$ étant de dimension $n+1$ (donc homéomorphe à la boule $\mathfrak{Q}_{n+1}$) la fonction $h^j=h|\dot{\Delta}_j$ admet une extension continue g^j sur $\bar{\Delta}_j$ telle que (cf. (29)):

(52) $$\delta[g^j(\Delta_j)]<t/4.$$

On peut admettre de plus que cette extension a été exécutée simultanément pour tous les simplexes Δ_j de $P-P_1$, de sorte que

(53) $$h\subset g\in A^P$$

et

(54) $$\delta[g(\Delta_j)]<t/4 \quad\text{pour tout } j.$$

L'inégalité (43) en résulte. En effet, dans le cas où $x\in P_1$, l'inégalité $|g(x)-f(x)|<t$ résulte de (50) et (53). Dans le cas où $x\in\Delta_j$, soit $x'\in\dot{\Delta}$, il vient

$$\begin{aligned}|g(x)-f(x)|&\leqslant|g(x)-g(x')|+|g(x')-f(x')|+|f(x')-f(x)|\\&\leqslant\delta[g(\Delta_j)]+|h-(f|P_1)|+\delta[f(\Delta_j)]<t\end{aligned}$$

selon (53), (50) et (47).

Finalement, (46) résulte de (50) et (53).

LEMME 3. *Soient A et B deux ensembles LC^n compacts, $t>0$ et*

(55) $$0<\varepsilon<a_A(t)\ ^{12}).$$

En supposant que

(56) $$\operatorname{dist}(A,B)<b_A[b_B(\varepsilon/2)],$$

on a

(57) $$a_A(t)\leqslant a_B(t+\varepsilon)+\varepsilon.$$

[12]) Désormais nous écrivons $a_A(t)$ au lieu de $a_A^n(t)$ et $b_A(t)$ au lieu de $b_A^n(t)$, n étant considéré comme fixe.

Démonstration. Soit $f \in B^{\mathcal{S}_m}$, où $m \leqslant n$, et

(58) $$\delta f < a_A(t) - \varepsilon .$$

L'inégalité (56) implique en vertu du lemme 2 (pour $P = \mathcal{S}_m$) l'existence d'une fonction $g \in A^{\mathcal{S}_m}$ telle que

(59) $$|g - f| < b_B(\varepsilon/2) .$$

Il en résulte d'après le lemme 1 et les formules (38) et (58) que

$$\delta g \leqslant \delta f + 2|g - f| < \delta f + \varepsilon < a_A(t) .$$

La fonction g admet donc (cf. (29)) une extension $g^* \in A^{Q_{m+1}}$ telle que

(60) $$\delta g^* \leqslant t .$$

Comme d'autre part, les formules (56) et (59) entraînent:

(61) $$\operatorname{dist}(A, B) < b_B(\varepsilon/2) \quad \text{et} \quad |f - (g^* | \mathcal{S}_m)| < b_B(\varepsilon/2) ,$$

il existe d'après le lemme 2 (en remplaçant P par Q_{m+1}, P_0 par $\mathcal{S}_m$, f par g^* et g_0 par f) une extension $f^* \in B^{Q_{m+1}}$ de f telle que

(62) $$|f^* - g^*| < \varepsilon/2 .$$

Il en résulte d'après le lemme 1 et la formule (60) que

(63) $$\delta f^* \leqslant \delta g^* + 2|f^* - g^*| < t + \varepsilon .$$

Nous parvenons ainsi à la conclusion que toute fonction $f \in B^{\mathcal{S}_m}$ (où $m \leqslant n$), satisfaisant à la condition (58), admet une extension $f^* \in B^{Q_{m+1}}$ telle que $\delta f^* \leqslant t + \varepsilon$. On a donc (cf. (30)):

$$a_B(t + \varepsilon) \geqslant a_A(t) - \varepsilon ,$$

d'où l'inégalité (57).

7. Démonstration du théorème A_1. Soient $n \geqslant 0$ et $t > 0$. Par hypothèse l'inégalité (25), donc l'inégalité (39) est remplie. Il existe par conséquent un $u > 0$ tel que

(64) $$b_{A_i}(t/2) > u \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots$$

Soit $f \in A^{\mathcal{S}_m} (m \leqslant n)$ où

(65) $$\delta f < u .$$

Pour prouver que $A \in LC^n(\mathcal{Y})$, il suffit de démontrer que la fonction f admet une extension $f^* \in A^{Q_{m+1}}$ telle que

(66) $$\delta f^* \leqslant t .$$

Soient a_i et β_i deux nombres positifs tels que

(67) $$a_i < \tfrac{1}{2} b_{A_j}(t/2^{i+2}) \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots,$$

(68) $$\beta_i < b_{A_j}(a_i) \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots$$

On peut admettre en outre que

(69) $$a_1 > a_2 > \ldots$$

En remplaçant la suite $A_1, A_2, \ldots$ par une suite extraite d'une façon convenable, on peut admettre aussi (conformément à (24)) que

(70) $$\operatorname{dist}(A, A_i) < \beta_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots$$

D'après (70) et (68) il vient

(71) $$\operatorname{dist}(A, A_i) < b_{A_i}(a_i)$$

et on déduit du lemme 2 l'existence d'une fonction $f_i \in A_i^{\mathcal{S}_m}$ telle que

(72) $$|f_i - f| < a_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots$$

Par conséquent (cf. le lemme 1, (65), (72), (64) et (67))

$$\delta f_i \leqslant \delta f + 2|f_i - f| < u + 2a_i < 2b_{A_i}(t/2) ,$$

d'où (cf. (34))

(73) $$\delta f_i < a_{A_i}(t/2) .$$

Nous allons définir par induction une suite de fonctions f_i^*, $i = 1, 2, \ldots$, satisfaisant à la condition de Cauchy ainsi qu'aux conditions:

(74) $$f_i \subset f_i^* \in A_i^{Q_{m+1}},$$

(75) $$\delta f_i^* \leqslant t\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \ldots + (\tfrac{1}{2})^i\right) ,$$

(76) $$|f_{i+1}^* - f_i^*| < t/2^{i+2} .$$

Pour $i = 1$ l'existence de la fonction f_i^* satisfaisant aux conditions (74) et (75) résulte directement de l'inégalité (73).

Admettons que, pour un i donné, la fonction f_i^* satisfasse aux conditions (74) et (75). Or il vient, d'après (70), (68) et (69),

$$\operatorname{dist}(A_i, A_{i+1}) < \beta_i + \beta_{i+1} < a_i + a_{i+1} < 2a_i ,$$

d'où selon (67)

(77) $$\operatorname{dist}(A_i, A_{i+1}) < b_{A_{i+1}}(t/2^{i+2}) .$$

D'autre part, selon (72), (69) et (67),

(78) $$|f_i - f_{i+1}| < a_i + a_{i+1} < 2a_i < b_{A_{i+1}}(t/2^{i+2}) .$$

En appliquant le lemme 2 (en y remplaçant A par A_{i+1}, B par A_i, f par f_i^* et g_0 par f_{i+1}), on déduit de (77) et (78) l'existence d'une fonction f_{i+1}^* telle que

$$f_{i+1} \subset f_{i+1}^* \in A_{i+1}^{Q_{m+1}}$$

et que l'inégalité (76) est satisfaite.

Il en résulte en vertu du lemme 1 et de (75) que

$$\delta f_{i+1}^* \leqslant \delta f_i^* + 2|f_{i+1}^* - f_i^*| < t\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\ldots+(\tfrac{1}{2})^i+(\tfrac{1}{2})^{i+1}\right).$$

L'existence de la suite de fonctions f_i^* satisfaisant aux conditions (74)-(76) se trouve ainsi établie par induction. En outre, il résulte aussitôt de l'inégalité (76) que cette suite satisfait à la condition de Cauchy. L'espace fonctionnel $\mathcal{Y}^{Q_{m+1}}$ étant complet, cette suite est convergente: soit

$$f^*(p) = \lim_{i\to\infty} f_i^*(p) \quad \text{pour} \quad p \in Q_{m+1}. \tag{79}$$

Comme $f_i^*(p) \in A_i$, il vient $f^*(p) \in A$, d'où $f^* \in A^{Q_{m+1}}$. Puis, en vertu de (74), on a pour $p \in \mathcal{S}_m$, $f_i^*(p) = f_i(p)$ et comme, selon (67), $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$, il vient d'après (72) $\lim\limits_{i\to\infty} f_i(p) = f(p)$, d'où $f \subset f^*$.

Finalement on déduit (66) de l'inégalité $\delta f_i^* \leqslant t$, qui est une conséquence directe de (75).

8. Démonstration du théorème A_2 (p. 122). La démonstration se compose de deux parties:

1° $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}}\, a_{A_i}(t) \leqslant a_A(t)$.

Soit t un nombre positif fixe. D'après (25) il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\varepsilon < a_{A_i}(t) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots \tag{80}$$

Posons $\varrho = b_A(\varepsilon/2)$. D'après (25) et (39) il existe un $\eta > 0$ tel que

$$\eta < b_{A_i}(\varrho) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots \tag{81}$$

D'après (24) il vient $\operatorname{dist}(A_i, A) < \eta$ pour i suffisamment grand, d'où selon (81)

$$\operatorname{dist}(A_i, A) < b_{A_i}[b_A(\varepsilon/2)]. \tag{82}$$

Les formules (80) et (82) impliquent en vertu du lemme 3 que

$$a_{A_i}(t) \leqslant a_A(t+\varepsilon) + \varepsilon,$$

d'où

$$\overline{\lim_{i\to\infty}}\, a_{A_i}(t) \leqslant a_A(t+\varepsilon) + \varepsilon. \tag{83}$$

En faisant tendre ε vers 0 et en tenant compte de la continuité de la fonction a_A au point t, on déduit de (83) l'inégalité 1°.

2° $a_A(t) \leqslant \underline{\lim\limits_{i\to\infty}}\, a_{A_i}(t)$.

Soit $t > 0$ fixe. Soit

$$0 < \varepsilon < a_A(t/2). \tag{84}$$

On a par conséquent $2\varepsilon < t$, d'où $t/2 < t - \varepsilon$. La fonction a_A étant non-décroissante, il vient $a_A(t/2) \leqslant a_A(t-\varepsilon)$ et d'après (84)

$$\varepsilon < a_A(t-\varepsilon). \tag{85}$$

Soit, conformément à (39), $\eta > 0$ tel que

$$\eta < b_{A_i}(\varepsilon/2) \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots \tag{86}$$

D'après (24), on a pour i suffisamment grand

$$\operatorname{dist}(A, A_i) < b_A(\eta),$$

d'où selon (86),

$$\operatorname{dist}(A, A_i) < b_A[b_{A_i}(\varepsilon/2)]. \tag{87}$$

En remplaçant, dans le lemme 3, B par A_i et t par $t - \varepsilon$, on conclut des formules (85) et (87) que l'on a (pour i suffisamment grand)

$$a_A(t-\varepsilon) \leqslant a_{A_i}(t) + \varepsilon,$$

d'où

$$a_A(t-\varepsilon) \leqslant \underline{\lim_{i\to\infty}}\, a_{A_i}(t) + \varepsilon. \tag{88}$$

Comme dans la première partie de la démonstration, on fait tendre ε vers 0 et on déduit 2° de (88).

B. L'espace $lc^n(\mathcal{Y})$

En me basant sur les résultats de M. Begle [1], j'ai démontré dans la note [6] comment la méthode générale exposée ici pouvait être appliquée au cas d'ensembles lc^n. La marche des raisonnements est d'ailleurs tout à fait analogue à celle du chapitre A (et réciproquement, l'idée directrice des démonstrations du chapitre A m'a été suggérée par l'ouvrage cité de M. Begle).

C. L'espace $P(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

9. Conformément aux notations adoptées au N° 2 (formule (14)) nous posons, pour tout $f \in P(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$,

$\varphi_f(t)$ = *borne supérieure des nombres* $u \leqslant t$ *tels que*

$$|x - x'| < u \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leqslant t, \tag{89}$$

quels que soient les points x *et* x' *de* A_f.

Il en résulte aussitôt que:

(90) $$|x-x'|<\varphi_f(t) \Rightarrow |f(x)-f(x')|\leqslant t\,,$$

(91) *si* $\varphi_f(t)<\eta\leqslant t$, *il existe un couple* x, x' *tel que*

$$|x-x'|<\eta \quad \text{et} \quad |f(x)-f(x')|>t\,.$$

Remarque. La fonction $\varphi_f(t)$ est évidemment une fonction non-décroissante de l'argument t. Cependant, elle n'est pas nécessairement continue. Pour s'en convaincre considérons la fonction $f(x)$ égale à $-2x$ pour $x\leqslant 0$ et à x pour $x\geqslant 0$, et restreignons la variabilité de x à l'intervalle $-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1$.

On constate aussitôt que $\varphi_f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$, tandis que $\varphi_f(t)=t/2$ pour $t<\frac{1}{2}$.

La fonction $\varphi_f(t)$ peut être aussi discontinue par rapport à la variable f. Désignons, dans ce but, par f_i la fonction f définie auparavant, sauf que la variabilité de x est restreinte à l'intervalle $-1/4-1/i\leqslant x\leqslant 1$. Il vient $\varphi_{f_i}(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$, tandis que $\varphi_f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$.

Nous allons établir le théorème suivant:

Théorème C. *Soient $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces complets. En posant pour tout couple d'éléments f et g de $P(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$*

(92) $$\|f-g\|=\operatorname{dist}(f,g)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2^m}\cdot\frac{|S_m(f)-S_m(g)|}{1+|S_m(f)-S_m(g)|}\,,$$

où

$$S_m(f)=1:\int_0^{1/m}\varphi_f(t)\,dt\,,$$

on attribue à $P(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ le caractère d'un espace complet.

En outre, pour que l'on ait

(93) $$\lim_{i\to\infty}\|f_i-f\|=0\,,$$

il faut et il suffit que

(94) $$\lim_{i\to\infty}\operatorname{dist}(A_{f_i},A_f)=0$$

et que la convergence de f_i à f soit continue, c'est-à-dire que:

(95) $$(\lim_{i\to\infty}x_i=x)(x_i\in A_{f_i})(x\in A_f)\Rightarrow(\lim_{i\to\infty}f_i(x_i)=f(x))\,.$$

Avant d'aborder la démonstration de ce théorème, rappelons le théorème auxiliaire suivant:

Théorème C_0 [13]). *La condition* (94), *rapprochée de la convergence continue de la suite $f_1,f_2,\ldots$, équivaut à la condition*

(96) $$\lim_{i\to\infty}\operatorname{dist}(f_i,f)=0\,.$$

Par conséquent, pour déduire le théorème C du théorème 2 du N° 1 (p. 115), il suffit de tenir compte de la remarque 2 du N° 1 et d'établir les deux théorèmes suivants (cf. les propositions 1 et 2 du N° 2):

Théorème C_1. *$f_1,f_2,\ldots$ étant une suite d'éléments de $P(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ assujettie aux conditions*

(97) $$\lim_{i\to\infty}\operatorname{dist}(f_i,F)=0$$

et

(98) $$\inf_i\varphi_{f_i}(t)>0 \text{ quel que soit } t>0\,,$$

on a $F\in P(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$.

Théorème C_2. *$f,f_1,f_2,\ldots$ étant une suite d'éléments de $P(\mathfrak{X},\mathcal{Y})$ satisfaisant à la condition* (96), *donc (d'après le théorème C_0) aux conditions* (94) *et* (95), *on a*

(99) $$\lim_{i\to\infty}\varphi_{f_i}(t)=\varphi_f(t)$$

pour tout point de continuité de la fonction φ_f.

10. Démonstration du théorème C_1. L'ensemble F étant compact, il s'agit de prouver qu'il représente une fonction, c'est-à-dire qu'il ne contient aucun couple (x,y) et (x,y') tel que $y\neq y'$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et posons $t=|y-y'|$. D'après (97), il existe deux suites $x_1,x_2,\ldots$ et $x'_1,x'_2,\ldots$ telles que

$$\lim_{i\to\infty}x_i=x=\lim_{i\to\infty}x'_i,\quad \lim_{i\to\infty}f_i(x_i)=y,\quad \lim_{i\to\infty}f_i(x'_i)=y'\,.$$

On en conclut que $|f_i(x_i)-f_i(x'_i)|>t/2$ pour i suffisamment grand, d'où (cf. (90)) $\varphi_{f_i}(t/2)\leqslant|x_i-x'_i|$. Comme, d'autre part, $\lim_{i\to\infty}|x_i-x'_i|=0$, il vient $\lim_{i\to\infty}\varphi_{f_i}(t/2)=0$; mais cela contredit la condition (98).

11. Démonstration du théorème C_2. Soit $t>0$ un point de continuité de la fonction φ_f. La suite $\varphi_{f_1}(t),\varphi_{f_2}(t),\ldots$ étant bornée, il s'agit — pour établir (99) — de démontrer que, $\varphi_{f_{k_1}}(t),\varphi_{f_{k_2}}(t),\ldots$ étant une suite convergente arbitraire (avec $k_1<k_2<\ldots$), on a

$$\lim_{i\to\infty}\varphi_{f_{k_i}}(t)=\varphi_f(t)\,.$$

[13]) Ce théorème a été établi dans [7] sous l'hypothèse de compacité des espaces $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$. La démonstration dans le cas où $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont complets ne demande que des légères modifications.

Posons, pour abréger,

(100) $$\eta = \lim_{i\to\infty} \varphi_{f_{k_i}}(t)\,.$$

Il s'agit donc de montrer que

(101) $\eta = \varphi_f(t)$, c'est-à-dire que $\eta \leqslant \varphi_f(t)$ et $\varphi_f(t) \leqslant \eta$.

Afin d'établir la première des inégalités (101), il est évidemment légitime d'admettre que $\eta > 0$.

Soient x et x' deux points de A_f tels que

(102) $$|x - x'| < \eta\,.$$

Comme $\eta \leqslant t$, l'inégalité $\eta \leqslant \varphi_f(t)$ sera établie (conformément à (91)) dès que nous aurons démontré que

(103) $$|f(x) - f(x')| \leqslant t\,.$$

Or, d'après (94), il existe deux suites de points $x_1, x_2, \ldots$ et $x_1', x_2', \ldots$ telles que

(104) $$x = \lim_{i\to\infty} x_i\,, \quad x' = \lim_{i\to\infty} x_i'\,, \quad x_i, x_i' \in A_{f_{k_i}}.$$

Il en résulte d'après (102) que $|x_i - x_i'| < \eta$, donc selon (100) que $x_i - x_i'| < \varphi_{f_{k_i}}(t)$ pour i suffisamment grand. Par conséquent (cf. (90)):

(105) $$|f_{k_i}(x_i) - f_{k_i}(x_i')| \leqslant t\,.$$

D'autre part, les conditions (104) impliquent (cf. (95)) que

(106) $$\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x_i) = f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x_i') = f(x')\,,$$

d'où on tire (103) en vertu de (105).

Passons à la démonstration de l'inégalité $\varphi_f(t) \leqslant \eta$.

Il est évidemment légitime d'admettre que $\eta < t$, donc que $\varphi_{f_{k_i}}(t) < t$. Il existe donc (cf. (91)) pour i suffisamment grand, un couple de points x_i, x_i' tel que

(107) $$|x_i - x_i'| < \varphi_{f_{k_i}}(t) + 1/i \quad \text{et} \quad |f_{k_i}(x_i) - f_{k_i}(x_i')| > t\,.$$

Sans restreindre la généralité, on peut admettre que les suites $x_1, x_2, \ldots$ et $x_1', x_2', \ldots$ sont convergentes, donc que la condition (104) est satisfaite. On en conclut en raison de (95) que les égalités (106) sont satisfaites. Les formules (107), (104) et (100) donnent $|x - x'| \leqslant \eta$ et, en même temps, les formules (107) et (106) donnent

$$|f(x) - f(x')| \geqslant t, \quad \text{d'où} \quad |f(x) - f(x')| > t - \varepsilon$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

Il en résulte (cf. (90)) que $\varphi_f(t - \varepsilon) \leqslant \eta$. En tenant compte de la continuité de la fonction φ_f au point t, on en conclut que $\varphi_f(t) \leqslant \eta$.

D. L'espace $\mathfrak{P}(\mathcal{Y})$

12. C étant un continu localement connexe et $\varrho_C(x, y)$ désignant la distance relative des points x et y de C (cf. № 2, (D)), posons

$\varphi_C(t) =$ *borne supérieure des nombres* $u \leqslant t$ *tels que*

(108) $$|x - x'| < u \Rightarrow \varrho_C(x, x') \leqslant t\,,$$

quels que soient les points x *et* x' *de* C [14]).

Nous allons établir le théorème suivant:

THÉORÈME D [15]). *Soit* $\mathcal{Y}$ *un espace complet. En posant pour tout couple de sous-continus* C *et* K *de* $\mathcal{Y}$:

$$\gamma(C, K) = \operatorname{dist}(C, K) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \cdot \frac{|r_m(C) - r_m(K)|}{1 + |r_m(C) - r_m(K)|}\,,$$

où

$$r_m(C) = 1 : \int_0^{1/m} \varphi_C(t)\,dt\,,$$

on attribue à $\mathfrak{P}(\mathcal{Y})$ *le caractère d'un espace complet.*

En outre, pour que l'on ait

(109) $$\lim_{i\to\infty} \gamma(C_i, C) = 0\,,$$

il faut et il suffit que

(110) $$\lim_{i\to\infty} \operatorname{dist}(C_i, C) = 0$$

et que la distance relative ϱ_{C_i} *converge vers* ϱ_C *de façon continue; c'est-à-dire que les conditions*

(111) $$\lim_{i\to\infty} x_i = x, \quad \lim_{i\to\infty} x_i' = x', \quad \text{où} \quad x_i, x_i' \in C_i \quad \text{et} \quad x, x' \in C\,,$$

entraînent

(112) $$\lim_{i\to\infty} \varrho_{C_i}(x_i, x_i') = \varrho_C(x, x')\,.$$

Afin de déduire ce théorème du théorème 2 du № 1 (p. 115), il s'agit (en tenant compte de la remarque 1 du № 1) d'établir les trois théorèmes suivants:

---

[14]) On peut démontrer que $\varphi_C(t) = a_C^0(t)$ dans le sens établi au № 4.

[15]) La métrisation complète de l'espace $\mathfrak{P}(\mathcal{Y})$ peut être obtenue — d'une façon moins directe et moins élémentaire — comme cas particulier du théorème A du № 4, p. 121 (cas où $n = 0$). Le même problème a été résolu par S. Mazurkiewicz sur une voie différente [8].

THÉORÈME D_0. *Soit $C_1, C_2, \ldots$ une suite de continus localement connexes satisfaisant à l'égalité* (110). *La condition*

(113) $$\inf_i \varphi_{C_i}(t) > 0 \text{ quel que soit } t > 0\,,$$

équivaut alors à la convergence continue de ϱ_{C_i} vers ϱ_C.

THÉORÈME D_1. *$C_1, C_2, \ldots$ étant une suite de continus localement connexes satisfaisant aux conditions* (110) *et* (113), *C est un continu localement connexe.*

THÉORÈME D_2. *$C, C_1, C_2, \ldots$ étant une suite de continus localement connexes satisfaisant aux conditions* (110) *et* (113), *on a*

(114) $$\lim_{i\to\infty} \varphi_{C_i}(t) = \varphi_C(t)$$

pour tout point de continuité de la fonction φ_C.

13. Démonstration du théorème D_0. Admettons d'abord que la formule (113) est satisfaite. Il s'agit de démontrer qu'en admettant les formules (110) et (111), on a (112).

Soit K_i un sous-continu de C_i tel que

(115) $$x_i, x_i' \in K_i \quad \text{et} \quad \delta(K_i) = \varrho_{C_i}(x_i, x_i')\,.$$

L'ensemble $C + C_1 + C_2 + \ldots$ étant compact (en vertu de (110)), la suite $K_1, K_2, \ldots$ contient une sous-suite convergente $K_{j_1}, K_{j_2}, \ldots$; soit K sa limite. Il vient

$$x, x' \in K \subset C \quad \text{et} \quad \delta(K) = \lim_{i\to\infty} \delta(K_{j_i})\,,$$

d'où en vertu de (115):

(116) $$\varrho_C(x, x') \leqslant \lim_{i\to\infty} \varrho_{C_{j_i}}(x_{j_i}, x'_{j_i})\,.$$

On a donc

(117) $$\varrho_C(x, x') \leqslant \underline{\lim}_{i\to\infty} \varrho_{C_i}(x_i, x_i')\,.$$

Nous allons établir à présent l'inégalité

(118) $$\overline{\lim}_{i\to\infty} \varrho_{C_i}(x_i, x_i') \leqslant \varrho_C(x, x')\,,$$

qui rapprochée de (117) donnera (112).

Soit $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer que l'on a pour i suffisamment grand

(119) $$\varrho_{C_i}(x_i, x_i') \leqslant \varrho_C(x, x') + 3\varepsilon\,;$$

cela suffira évidemment pour en déduire la formule (118).

Posons conformément à (113)

(120) $$0 < \eta < \inf_i \varphi_{C_i}(\varepsilon)\,.$$

Soit i un nombre suffisamment grand pour que l'on ait (conformément à (110) et à (111)):

(121) $$\operatorname{dist}(C_i, C) < \eta/4\,, \qquad |x_i - x| < \eta/4\,, \qquad |x_i' - x'| < \eta/4\,.$$

Soit K un sous-continu de C unissant x à x' et tel que

(122) $$\delta(K) = \varrho_C(x, x')\,.$$

Soit $x = p_0, p_1, p_2, \ldots, p_k = x'$ un système fini de points extraits de K tels que

(123) $$|p_j - p_{j-1}| < \eta/2 \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Conformément à (121), il existe pour tout i un point q_{ij} de C_i tel que

(124) $$q_{i0} = x_i\,, \quad q_{ik} = x_i' \quad \text{et} \quad |q_{ij} - p_j| < \eta/4 \quad \text{pour} \quad j = 0, 1, \ldots, k\,.$$

D'après (123), (124) et (120), il vient

$$|q_{i,j-1} - q_{ij}| < \eta < \varphi_{C_i}(\varepsilon)\,.$$

On a donc selon (108)

$$\varrho_{C_i}(q_{i,j-1}, q_{ij}) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots, k\,,$$

ce qui veut dire qu'il existe un système de continus $Q_{i1}, Q_{i2}, \ldots, Q_{ik}$ tels que

(125) $$q_{i,j-1}, q_{ij} \in Q_{ij} \subset C_i \quad \text{et} \quad \delta(Q_{ij}) \leqslant \varepsilon\,.$$

Posons $K_i = Q_{i1} + \ldots + Q_{ik}$. K est donc un sous-continu de C_i unissant x_i à x_i'. Nous allons montrer que

(126) $$\delta(K_i) \leqslant \varrho_C(x, x') + 3\varepsilon\,,$$

d'où on déduira l'inégalité (119).

En effet, a et a' étant deux points arbitraires de K_i, soient $a \in Q_{ij}$ et $a' \in Q_{ij'}$. On a donc, en appliquant les formules (125), (124), (122) et (120):

$$\begin{aligned} |a - a'| &\leqslant \delta(Q_{ij}) + |q_{ij} - q_{ij'}| + \delta(Q_{ij'}) \\ &\leqslant 2\varepsilon + |q_{ij} - p_j| + |q_{ij'} - p_{j'}| + |p_j - p_{j'}| \\ &\leqslant 2\varepsilon + \eta/2 + \delta(K) \leqslant \varrho_C(x, x') + 3\varepsilon\,, \end{aligned}$$

d'où résulte l'inégalité (126).

Passons à la deuxième partie de la démonstration. Admettons que pour un $t>0$ fixe on a

(127) $$\inf_i \varphi_{C_i}(t)=0\,.$$

Il existe donc (cf. (108)) deux suites de points x_{k_i}, x'_{k_i} $(i=1,2,\ldots)$ extraits de C_{k_i} tels que

(128) $$\lim_{i\to\infty}|x_{k_i}-x'_{k_i}|=0$$

et

(129) $$\varrho_{C_{k_i}}(x_{k_i},x'_{k_i})>t\,.$$

On peut admettre que ces suites sont convergentes:

(130) $$\lim_{i\to\infty}x_{k_i}=x=\lim_{i\to\infty}x'_{k_i}\,.$$

D'après (110), $x\in C$ et on peut définir évidemment les points x_i et x'_i pour les indices i qui n'appartiennent pas à la suite $k_1,k_2,\ldots$ de façon à satisfaire aux conditions (111).

D'autre part, on constate aussitôt en tenant compte de (129) que l'égalité (112) n'est pas réalisée (puisque $\varrho_C(x,x)=0$).

14. Démonstration du théorème D_1. C étant un continu, il s'agit de prouver que, x étant un point fixe de C, à tout $\varepsilon>0$ correspond un $\eta>0$ tel que, pour tout point x' de C satisfaisant à la condition

(131) $$|x-x'|<\eta\,,$$

on a

(132) $$\varrho_C(x,x')\leqslant\varepsilon\,.$$

L'inégalité (113) étant remplie par hypothèse, nous allons montrer que pour η on peut prendre tout nombre satisfaisant à la condition (120).

En effet, vu l'égalité (110), il existe deux suites $x_1,x_2,\ldots$ et $x'_1,x'_2,\ldots$ satisfaisant aux conditions (111).

On a par conséquent, en vertu de (131) et (120),

$$|x_i-x'_i|<\eta<\varphi_{C_i}(\varepsilon)$$

pour i suffisamment grand.

Il en résulte (cf. (108)) que $\varrho_{C_i}(x_i,x'_i)\leqslant\varepsilon$. L'égalité (112) étant satisfaite en raison du théorème 1, on en tire l'inégalité (132).

15. Démonstration du théorème D_2. La démonstration est tout-à-fait analogue à celle du théorème C_2.

Soit, pour t fixe, $\varphi_{C_{k_1}}(t),\varphi_{C_{k_2}}(t),\ldots$ une suite convergente:

(133) $$\eta=\lim_{i\to\infty}\varphi_{C_{k_i}}(t)\,.$$

Il s'agit de montrer que

(134) $$\eta=\varphi_C(t),\quad \text{c'est-à-dire que}\quad \eta\leqslant\varphi_C(t)\quad\text{et}\quad\varphi_C(t)\leqslant\eta\,.$$

Admettons que $\eta>0$. Soient x et x' deux points de C tels que

(135) $$|x-x'|<\eta$$

et admettons conformément à (110) que les relations (111) sont remplies.

Il vient, d'après (111), (135) et (133), pour i suffisamment grand, $|x_i-x'_i|<\varphi_{C_{k_i}}(t)$, d'où on conclut que $\varrho_{C_{k_i}}(x_i,x'_i)\leqslant t$. D'autre part, on a par hypothèse l'inégalité (113), donc d'après le théorème D_0, la condition (111) implique (112); il vient par conséquent

(136) $$\varrho_C(x,x')\leqslant t\,.$$

Nous parvenons ainsi à la conclusion que l'inégalité (135) implique (136); on en déduit la première inégalité (134).

Pour établir la deuxième, posons $\eta<t$, d'où

(137) $$\varphi_{C_{k_i}}(t)<t$$

pour i suffisamment grand. Il existe donc un couple de points $x_i,x'_i\in C_{k_i}$ tel que

(138) $$|x_i-x'_i|<\varphi_{C_{k_i}}(t)+1/i\quad\text{et}\quad\varrho_{C_{k_i}}(x_i,x'_i)>t\,.$$

En admettant (ce qui est évidemment légitime) que les suites $x_1,x_2,\ldots$ et $x'_1,x'_2,\ldots$ sont convergentes, donc que les formules (111) sont satisfaites, il vient en vertu de (138), (137) et (112):

$$|x-x'|\leqslant\eta\quad\text{et}\quad\varrho_C(x,x')\geqslant t>t-\varepsilon\,,$$

quel que soit $\varepsilon>0$.

Autrement dit $\varphi_C(t-\varepsilon)\leqslant\eta$. La fonction φ_C étant continue au point t, la deuxième inégalité (134) en résulte aussitôt.

Travaux cités

[1] E. G. Begle, *Regular convergence*, Duke Math. J. 11 (1944), p. 441-450.

[2] K. Borsuk, *On some metrizations of the hyperspace of compact sets*, Fund. Math. 41 (1955), p. 168-202.

[3] M. L. Curtis, *Deformations-free continua*, Ann. of Math. 57 (1953), p. 231-247.

[4] K. Kuratowski, *Topologie I*, Monogr. Mat., Warszawa 1948.

[5] — *Topologie II*, Monogr. Mat., Warszawa 1950.

[6] K. Kuratowski, *Un théorème sur les espaces complets et ses applications à l'étude de la connexité locale*, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III, 3 (1955), p. 75-80.

[7] — *Sur l'espace des fonctions partielles*, Ann. di Mat. 40 (1955), p. 61-67.

[8] S. Mazurkiewicz, *Sur l'espace des continus péaniens*, Fund. Math. 24 (1935), p. 118-134.

[9] P. A. White, *Regular convergence*, Bull. Amer. Math. Soc. 60 (1954), p. 431-443.

[10] G. T. Whyburn, *On sequences and limiting sets*, Fund. Math. 25 (1935), p. 408-426.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 22.9.1955

Sur une propriété des nombres ordinaux

par

W. Sierpiński (Warszawa)

Le but de cette Note est de démontrer, sans utiliser les formes canoniques des nombres ordinaux, le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *m et n étant deux nombres naturels donnés quelconques (égaux ou non) les égalités $\alpha\beta=\beta\alpha$ et $\alpha^m\beta^n=\beta^n\alpha^m$ sont équivalentes pour les nombres ordinaux α et β.*

LEMME 1. *Si α et β sont des nombres ordinaux tels que $\alpha\beta>\beta\alpha$ et si m et n sont des nombres naturels, on a $\alpha^m\beta^n>\beta^n\alpha^m$.*

Démonstration du lemme 1. Soit s un nombre naturel et supposons que le lemme 1 est vrai pour les nombres naturels m et n, où $m\leqslant s$ et $n\leqslant s$ (ce qui est vrai pour $s=1$, puisque $\alpha\beta>\beta\alpha$). Soit n un nombre naturel $\leqslant s$: on a donc $\alpha^s\beta^n>\beta^n\alpha^s$. Or, si $n>1$, on a $\alpha\beta^{n-1}>\beta^{n-1}\alpha$ et si $n=1$ alors (vu que $\beta>0$, puisque $\alpha\beta>\beta\alpha$) on trouve $\alpha\beta^{n-1}=\beta^{n-1}\alpha$. En tout cas on a donc $\alpha\beta^{n-1}\geqslant\beta^{n-1}\alpha$. On a ainsi (vu que $\alpha>0$) $\alpha^{s+1}\beta^n=\alpha(\alpha^s\beta^n)>\alpha(\beta^n\alpha^s)=\alpha\beta(\beta^{n-1}\alpha^s)\geqslant\beta\alpha(\beta^{n-1}\alpha^s)=\beta(\alpha\beta^{n-1})\alpha^s\geqslant\beta(\beta^{n-1}\alpha)\alpha^s=\beta^n\alpha^{s+1}$. On a ainsi $\alpha^{s+1}\beta^n>\beta^n\alpha^{s+1}$ pour $n\leqslant s$. Or, soit m un nombre naturel $\leqslant s+1$: on a donc $\alpha^m\beta^s>\beta^s\alpha^m$ et $\alpha^m\beta>\beta\alpha^m$, d'où $\alpha^m\beta^{s+1}=(\alpha^m\beta^s)\beta\geqslant(\beta^s\alpha^m)\beta=\beta^s(\alpha^m\beta)>\beta^s(\beta\alpha^m)=\beta^{s+1}\alpha^m$, donc $\alpha^m\beta^{s+1}>\beta^{s+1}\alpha^m$. Le lemme 1 est donc vrai pour $m\leqslant s+1$ et $n\leqslant s+1$. La démonstration du lemme 1 résulte donc par induction (par rapport à s).

On voit aisément qu'en modifiant un peu la démonstration du lemme 1 on obtient le

LEMME 2. *Si α et β sont des nombres ordinaux tels que $\alpha\beta\geqslant\beta\alpha$ et si m et n sont des nombres naturels, on a $\alpha^m\beta^n\geqslant\beta^n\alpha^m$.*

En échangeant les lettres α et β ainsi que les lettres m et n, on obtient tout de suite des lemmes 1 et 2 les deux lemmes suivants:

LEMME 3. *Si α et β sont des nombres ordinaux tels que $\alpha\beta<\beta\alpha$ et si m et n sont des nombres naturels, on a $\alpha^m\beta^n<\beta^n\alpha^m$.*

LEMME 4. *Si α et β sont des nombres ordinaux tels que $\alpha\beta\leqslant\beta\alpha$ et si m et n sont des nombres naturels, on a $\alpha^m\beta^n\leqslant\beta^n\alpha^m$.*