# Remarques sur un théorème de F. J. Dyson relatif à la sphère

par

**I. Berstein** (București)

**1.** F. J. Dyson [2] a démontré le théorème suivant:

*Si $f(x)$ est une fonction à valeurs réelles, définie sur la sphère (à deux dimensions) $S^2$, on peut toujours trouver un carré inscrit dans un grand cercle de $S^2$, de sommets $a,b,a^*,b^*$, tels que*

$$f(a)=f(b)=f(a^*)=f(b^*).$$

Ce théorème a été généralisé presque simultanément par Zarankiewicz [9] et Livesay [5]. Ils ont montré que le théorème reste valable, même si l'on remplace le carré par un rectangle quelconque, dont le rapport des côtés peut être fixé d'avance.

Nous nous proposons de montrer que, en combinant la démonstration de Zarankiewicz avec celle de Livesay, on aboutit à un théorème encore plus général.

Soit $E$ un continu (supposé un espace métrique) localement connexe et unicohérent [1]). Soit encore $T\colon E\to E$ une involution topologique (c. à d. une transformation topologique de $E$ en lui-même, dont le carré est l'identité: $T(T(x))=x$). Nous supposons toujours que $T$ n'a pas de point fixe. Alors $\inf\varrho(x,T(x))=\delta>0$ car $E$ est compact ($\varrho(x,y)$ est la distance des points $x,y$ dans la métrique de $E$). Nous convenons de dire que $\delta$ est le *diamètre* de l'involution $T$. La généralisation annoncée du théorème de Dyson a alors l'énoncé suivant:

*Quel que soit le nombre $d$, $0<d\leqslant\delta$, on peut toujours trouver deux points $a,b\in E$, tels que $\varrho(a,b)=d$, et que $f(a)=f(b)=f(a^*)=f(b^*)$.*

Nous avons désigné par $a^*,b^*$, les „antipodes" des points $a$ et $b$ par l'involution $T$, c. à d.

$$a^*=T(a),\qquad b^*=T(b)\ .$$

---

[1]) Un espace $E$ connexe s'appelle *unicohérent* si, pour chaque décomposition $E=F_1\cup F_2$, où $F_1$ et $F_2$ sont fermés et connexes, $F_1\cap F_2$ est connexe.

On obtient de là le théorème de Dyson dans sa forme plus générale de [9] ou [5] en remplaçant $E$ par la sphère $S^2$, et $T$ par la transformation antipodique de $S^2$; $\delta$ devient tout simplement le diamètre de la sphère.

**2.** Dans sa démonstration Zarankiewicz utilise le lemme suivant (lemme de Kuratowski):

*Soit $E$ un continu localement connexe et unicohérent, $T$: $E\to E$ une involution topologique et $F\subset E$ un ensemble fermé antipodique* (c. à d. tel que $T(F)=F$). *Alors, si $F$ ne possède aucune composante antipodique, l'ensemble complémentaire $E-F$ en possède toujours une.*

La démonstration que Zarankiewicz donne de ce lemme, suppose que le nombre de composantes de $F$ est fini. Mais, il observe lui-même plus loin qu'en modifiant convenablement cette démonstration, on obtient le cas plus général que nous avons énoncé [2]).

**3.** Nous utiliserons les notations du N°1, en désignant toujours par $x^*$ l'„antipode" de $x$, c'est-à-dire le point $x^*=T(x)$. Considérons l'ensemble:

$$G_\varepsilon=\{x\,|\,x\in E,\ |f(x)-f(x^*)|<\varepsilon\},\qquad \varepsilon>0\,.$$

$G_\varepsilon$ est un ensemble ouvert. Chaque composante de $G_\varepsilon$ est connexe par arcs, car l'espace $E$ est localement connexe (cf. par exemple [7], p. 38, théorème (3.8)). Cet ensemble n'est pas vide, car on a $x=(x^*)^*$ et la fonction $g(x)=f(x)-f(x^*)$ satisfait à la relation $g(x)=-g(x^*)$; il existe donc un point $a$ tel que $g(a)=0$; évidemment $a\in G_\varepsilon$.

On peut montrer sans difficulté (voir [5] et aussi [9]), qu'aucune composante de $E-G_\varepsilon$ n'est antipodique. Alors, le lemme de Kuratowski affirme l'existence d'une composante antipodique $D_\varepsilon$ de l'en-

[2]) En effet, en vertu de la connexité locale de $E$, $F$ peut être recouvert par un ensemble, fermé et localement connexe $F'$, tel que $F\subset F'\subset\{x\,|\,\varrho(x,F)<\varepsilon\}$ (voir [4], § 45, III). Nous pouvons admettre que si $K'$ est une composante quelconque de $F'$, $K'\cap F\neq\emptyset$. En désignant par $K_\alpha$, $K_\alpha^*=T(K_\alpha)$, les composantes de $F$, *l'hypothèse* $K_\alpha\neq K_\alpha^*$ implique que $\inf\limits_{K_\alpha\subset F}\varrho(K_\alpha,K_\alpha^*)=\eta>0$. (Dans le cas contraire, on pourrait trouver deux suites $K_{\alpha_n}$, $K_{\alpha_n}^*$, qui convergent vers le même continu antipodique $K\subset F$.) En choisissant $\varepsilon<\eta/3$ et suffisamment petit, l'ensemble $F=F'\cup F'^*$ est fermé, localement connexe et antipodique: $F\subset\widetilde{F}\subset\{x\,|\,\varphi(x,F)<\eta/3\}$.

$\widetilde{F}$ n'a qu'un nombre fini de composantes. On s'aperçoit sans difficulté qu'aucune composante de $\widetilde{F}$ ne peut être antipodique. En appliquant le lemme de Kuratowski dans sa forme particulière, on aboutit à l'existence d'une composante antipodique de l'ensemble $\widetilde{G}=E-\widetilde{F}$. L'inclusion $G\supset\widetilde{G}$ implique alors l'existence d'une composante antipodique de $G$.

Note ajoutée à la correction des épreuves. Entre temps Haman et Kuratowski [3] ont publié la démonstration du lemme pour le cas d'une infinité de composantes.



semble $G_\varepsilon$. $D_\varepsilon$ est connexe par arcs; donc on peut trouver un arc $\alpha\subset D$ qui unit deux points antipodiques $x,x^*\in D_\varepsilon$. Soit $\alpha^*=T(\alpha)$ et $p,q\in\alpha\cup\alpha^*$ deux points tels que $f(p)=\sup\limits_{x\in\alpha\cup\alpha^*}f(x)$, $f(q)=\inf\limits_{x\in\alpha\cup\alpha^*}f(x)$. Nous reproduisons les considérations de [5], avec la seule modification que le diamètre $\delta$ de l'involution remplace l'angle maximum $\pi$ formé par deux rayons de la sphère. Soit $q^*=T(q)$. Par définition de $G_\varepsilon\supset D_\varepsilon$, $|f(q^*)-f(q)|<\varepsilon$, et par la définition du diamètre de l'involution, $\varrho(q,q^*)\geqslant\delta$. Envisageons les sous-arcs suivants de $\alpha\cup\alpha^*$: $\gamma_1=\widehat{pq}$, $\gamma_2=\widehat{pq^*}$. Soient $h_i(t_i)$, $t_i\in I=[0,1]$, $h_1(0)=p$, $h_1(1)=q$, $h_2(0)=p$, $h_2(1)=q^*$ des paramétrisations des arcs $\gamma_i$. L'ensemble $K$ des points $(t_1,t_2)\in I\times I$, tels que $\varrho\big(h_1(t_1),h_2(t_2)\big)=d$ sépare le carré $I\times I$ entre les deux points $(0,0)\in I\times I$ et $(1,1)\in I\times I$. (En effet, la fonction $\psi(t_1,t_2)=\varrho\big(h_1(t_1),(h_2(t_2)\big)$ est continue et $\psi(0,0)=0$, $\psi(1,1)=\varrho(q,q^*)\geqslant\delta\geqslant d$.) Par suite de l'unicohérence du carré $I\times I$, il existe un continu $C\subset K$ qui sépare $I\times I$ entre $(0,0)$ et $(1,1)$ (voir [4], § 52, II, théorème 5). Les ensembles $\beta_1=(0\times I)\cup(I\times 1)$ et $\beta_2=(I\times 0)\cup(1\times I)$ sont des arcs qui unissent $(0,0)$ à $(1,1)$, donc l'intersection $\beta_1\cap C$ et $\beta_2\cap C$ n'est pas vide. Désignons par $F(t_1,t_2)$ la fonction

$$F(t_1,t_2)=f\big(h_1(t_1)\big)-f\big(h_2(t_2)\big)\,.$$

$f(x)$ prend sa valeur maximum en $x=p=h_1(0)=h_2(0)$ et sa valeur minimum en $x=q=h_1(1)$, et $|f(q^*)-f(q)|<\varepsilon$ (voir la définition de $D_\varepsilon$). Cela signifie que sur $\beta_1$, $F(t_1,t_2)\geqslant-\varepsilon$ et sur $\beta_2$, $F(t_1,t_2)\leqslant 0$. Il existe donc un point $(t_1^0,t_2^0)\in C$, tel que $|F(t_1^0,t_2^0)|\leqslant\varepsilon$ c. à d. $\big|f\big(h_1(t_1^0)\big)-f\big(h_2(t_2^0)\big)\big|\leqslant\varepsilon$. En posant $p_0=h_1(t_1^0)$, $q_0=h_2(t_2^0)$, on a $|f(p_0)-f(q_0)|\leqslant\varepsilon$, $\varrho(p_0,q_0)=d$ (car $(t_1^0,t_2^0)\in C\subset K$). $p_0,q_0\in D_\varepsilon\subset G_\varepsilon$, implique aussi:

$$|f(p_0)-f(p_0^*)|<\varepsilon,\qquad |f(q_0)-f(q_0^*)|<\varepsilon$$

donc on a aussi $|f(p_0^*)-f(q_0^*)|\leqslant 3\varepsilon$.

L'espace $E$ étant supposé compact, et $\varepsilon$ étant arbitraire, on peut choisir une suite $\varepsilon_n\to 0$ telle que les points respectifs $p_{0n},q_{0n},p_{0n}^*,q_{0n}^*$ convergent vers les points $a,b,a^*,b^*$, satisfaisant aux conditions données $\big(f(a)=f(b)=f(a^*)=f(b^*),\ \varrho(a,b)=d\big)$ [3]).

La méthode utilisée dans la dernière partie de la démonstration de Zarankiewicz n'est pas applicable ici, car elle est basée sur la possibilité d'approximation simpliciale des fonctions définies sur $S^2$. De même, la première partie de la démonstration de Livesay, qui a un caractère combinatoire, n'est pas utilisable.

[3]) Dans certains cas, on peut avoir $a=b^*$, $b=a^*$; voir par exemple le cas de la sphère $S^2$ (pour $d=\delta$).

Le théorème peut être énoncé sous une forme un peu plus générale.

*Considérons une décomposition de l'espace* $E\times E$, $E\times E=X_1\cup X_2$, *où* $X_1$ *et* $X_2$ *sont des ensembles fermés tels que*:

1. $(x,y)\in X_i\to(y,x)\in X_i, \quad (i=1,2)$,
2. $(x,x)\in X_1$,
3. $(x,x^*)\in X_2$

*pour chaque* $x,y\in E$.

*Alors, pour chaque fonction continue* $f(x)$, $x\in E$, *on peut trouver deux points* $a,b\in E$, $(a,b)\in X_1\cap X_2$ *tels que* $f(a)=f(b)=f(a^*)=f(b^*)$.

La démonstration de ce cas ne diffère guère de celle du premier théorème. On s'aperçoit que nous y avons pris

$$X_1=\{(x,y)\,|\,\varrho(x,y)\leqslant d\}, \qquad X_2=\{(x,y)\,|\,\varrho(x,y)\geqslant d\}.$$

Ajoutons encore que les conditions 1, 2, 3 sont un peu plus faibles que celles considérées dans [8].

**4.** Dans un mémoire récent [8], Chung-Tao Yang a obtenu des résultats qui constituent une vaste extension du théorème de Dyson pour les espaces généraux. On obtient de ces résultats, comme cas très particulier, le correspondant du théorème de Dyson pour la sphère à $n$ dimensions. On pourrait s'attendre à ce que le théorème de cette note soit aussi une conséquence des résultats de Chung-Tao Yang; nous nous proposons de montrer qu'il n'en est pas ainsi.

En effet envisageons l'espace projectif à trois dimensions $P^3$ et l'involution $T$ suivante:

$$\varrho x_1^*=x_2, \qquad \varrho x_2^*=-x_1, \qquad \varrho x_3^*=x_4, \qquad \varrho x_4^*=-x_3.$$

$x_i$ et $x_i^*$ sont les coordonnées homogènes des points $x$ et $x^*=T(x)$. $T$ est une involution sans points fixes. En identifiant les points $x$ et $x^*$ on obtient une variété $V^3$ [4]) dont $P^3$ forme un recouvrement total et régulier. Alors, le groupe des automorphismes topologiques de $P^3$ qui permutent les points $x$ et $x^*$, correspondant à un même $\widetilde{x}\in V^3$, est le groupe facteur du groupe fondamental de $V^3$ par un sous-groupe isomorphe au groupe fondamental de $P^3$. Il en résulte que le groupe fondamental de $V^3$ est le groupe cyclique $G_4$ d'ordre 4 (celui de $P^3$ est le groupe cyclique $G_2$ d'ordre 2). Le groupe d'homologie de dimension 1 à coefficients entiers est alors aussi isomorphe à $G_4$. $P^3$ est unicohérent, compact et localement connexe; en le supposant métrisé on peut appliquer le théorème de cette note à chaque fonction continue $f(x)$, $x\in P^3$. Par contre, les résultats de Chung-Tao Yang ne peuvent être appliqués à ce cas. Ces résultats

[4]) C'est l'espace-lentille (Linsenraum) (voir [6], § 60, 4.1).



se rapportent aux couples $(X,T)$ „d'indice $\geqslant n$" [8] ($X$ — espace de Hausdorff compact, $T$ — involution topologique sans point fixe).

Nous allons montrer que le couple $(P^3,T)$ défini plus haut est seulement *d'indice* $\leqslant 1$. C'est-à-dire, pour ce couple, les résultats de [8] ne donnent qu'un „théorème de Dyson" correspondant à la dimension 1 (qui affirme l'existence d'un point $a\in P^3$ tel que $f(a)=f(T(a))$.

En supposant que $X$ est un polytope, dont les simplexes sont permutés par $T$, $(X,T)$ est d'indice $\geqslant 2$ selon [8], si la condition suivante est satisfaite:

On peut trouver un cycle bidimensionnel invariant par $T$: $z^2=c^2+T(c^2)$ (le groupe des coefficients étant le groupe cyclique d'ordre 2), tel que $\partial c^2=c^1+T(c^1)$ et $KI(\partial c^1)\neq 0$ [5]). Si $c^1+T(c^1)$ est le bord d'une chaîne *invariante*, $KI(\partial c^1)=0$ (voir [8]).

Les groupes d'homologie que nous allons considérer plus bas sont tous de dimension 1. L'indice 2 indiquera que les coefficients sont pris dans le groupe cyclique d'ordre 2 (homologie modulo 2), l'indice 0 désignera les groupes d'homologie à coefficients entiers. Par $H_2(P^3,T)$ nous désignerons le groupe d'homologie spéciale du couple $(P^3,T)$ (voir [7]). Pour former ce groupe on ne considère que les cycles qui sont invariants par $T$. Les cycles homologues à zéro sont les bords des chaînes invariantes.

Selon [8] on a l'isomorphisme $H_2(P^3,T)\approx H_2(V^3)$. On a $H_0(V^3)\approx G_4$, et en utilisant une formule connue (voir par exemple [1], p. 358) on déduit $H_2(V^3_3)\approx G_2$ ($G_2$ est le groupe cyclique d'ordre 2). Donc, on a $H_2(P^3,T)\approx G_2$. D'autre part, $H_2(P^3)\approx G_2$. Si à chaque cycle invariant on fait correspondre le même cycle, mais considéré comme un cycle ordinaire, on obtient un homomorphisme $\alpha$: $H_2(P^3,T)\to H_2(P^3_2)$. L'image de $H_2(P^3,T)$ par $\alpha$ est tout le groupe $H_2(P^3)$, car il existe un cycle invariant non homologue à zéro dans $P^3$ (par exemple la droite projective $x_1=0$, $x_2=0$). On en déduit que $\alpha$ est un isomorphisme. Cela veut dire que si un cycle invariant $c^1+T(c^1)$ est le bord d'une chaîne *quelconque* $c^2$ de $P^3$, on peut trouver une chaîne *invariante* de $(P^3,T)$, dont le bord soit $c^1+T(c^1)$. Selon l'observation que nous avons faite, $KI(\partial c^1)=0$. Mais $c^2$ est quelconque, donc l'indice du couple $(P^3,T)$ ne peut être 2, il est donc $\leqslant 1$.

## Travaux cités


[1] П. С. Александров, *Комбинаторная топология*, Москва-Ленинград 1947.

[2] F. J. Dyson, *Continuous functions defined on spheres*, Ann. of Math. 54 (1951), p. 534-536.


[5]) $\partial$ est l'opérateur bord. $KI(c)$ désigne la valeur algébrique du cycle zéro-dimensionnel $c$ (voir [6], § 18).

[3] K. Haman et K. Kuratowski, *Sur quelques propriétés des fonctions définies sur des continus unicohérents*, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III, 3 (1955), p. 243-246.

[4] K. Kuratowski, *Topologie II*, Warszawa 1952.

[5] G. R. Livesay, *On a theorem of F. J. Dyson*, Ann. of Math. 59 (1954), p. 227-229.

[6] H. Seifert und W. Thrélfall, *Lehrbuch der Topologie*, New York 1947.

[7] G. T. Whyburn, *Analytic topology*, New York 1942.

[8] Ch. T. Yang, *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson, I*, Ann. of Math. 60 (1954), p. 262-282.

[9] K. Zarankiewicz, *Un théorème sur l'uniformisation des fonctions continues et son application à la démonstration du théorème de F. J. Dyson sur les transformations de la surface sphérique*, Bull. Acad. Pol. Sci., Cl. III, 2 (1954), p. 117-120.

*Reçu par la Rédaction le 1.9.1955*

# On a concept of dependence for continuous mappings *

by

**K. Borsuk** (Warszawa)

The present note is concerned with a concept of dependence of mappings. This concept, belonging to the homotopy theory, is extremely elementary, but it quickly leads to hard problems. Our knowledge of the relations between the dependence of mappings and other concepts of the algebraic topology is meagre. Only in the classical case (of H. Hopf), concerning the mappings of a compactum of dimension $\leqslant n$ into the Euclidean $n$-sphere, the concept of dependence is partly reduced to the homology theory. In other cases only partial results are obtained.

**1.** Only metric spaces will be considered. We denote by $Y_0^{X_0}$ the set of all continuous mappings of a space $X_0$ into subsets of another space $Y_0$. If $X_0$ is a compactum, we define a metric in $Y_0^{X_0}$ by setting

$$\varrho(f,g)=\sup_{x\in X_0}\varrho(f(x),g(x)) \quad \text{for every} \quad f,g\in Y_0^{X_0}.$$

In this paper we shall restrict ourselves to the case where $X_0$ is a compactum and $Y_0$ is an ANR set (= absolute neighbourhood retract). Then the space $Y_0^{X_0}$ is locally connected (even locally contractible). The component of $Y_0^{X_0}$ containing a given function $f\in Y_0^{X_0}$ will be denoted by $[f]$ and called the *homotopy class* of $f$. Two functions $f,g\in Y_0^{X_0}$ belonging to the same homotopy class are said to be *homotopic*.

A function $f\in Y_0^{X_0}$ is said to be *extendable* over a space $X\supset X_0$ (with respect to $Y_0$) provided that there exists a function $f'\in Y_0^X$ (called *extension* of $f$) satisfying the condition

$$f'(x)=f(x) \quad \text{for every} \quad x\in X_0.$$

It is known (see for instance [9], p. 86) that if $f$ is extendable over $X$ and $g\in[f]$, then $g$ is also extendable over $X$. The functions $f\in Y_0^{X_0}$ extendable over every compactum $X\supset X_0$ will be called *zero-functions* (cf. [4]). Evidently, they coincide with the functions homotopic with functions mapping $X_0$ onto singular points of $Y_0$.

* Most of the results were published without proof in a preliminary report [5].