Sur l'équation $\xi^2=\eta^3+1$ pour les nombres ordinaux transfinis

par

W. Sierpiński (Warszawa)

THÉORÈME. *L'équation*

$$\xi^2=\eta^3+1 \tag{1}$$

n'a pas de solutions en nombres ordinaux transfinis ξ, η.

Démonstration. Supposons que les nombres ordinaux transfinis ξ et η satisfont à l'équation (1). Le nombre ξ est évidemment de 1re espèce. Supposons que le nombre η est aussi de 1re espèce.

Soient

$$\begin{aligned}\xi&=\omega^{\alpha_1}a_1+\omega^{\alpha_2}a_2+\ldots+\omega^{\alpha_{k-1}}a_{k-1}+a_k\,,\\ \eta&=\omega^{\beta_1}b_1+\omega^{\beta_2}b_2+\ldots+\omega^{\beta_{l-1}}b_{l-1}+b_l\end{aligned} \tag{2}$$

les développements normaux des nombres ξ et η; $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k-1}$ et $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{l-1}$ sont ici des nombres ordinaux, $\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_{k-1}>0$, $\beta_1>\beta_2>\ldots>\beta_{l-1}>0$ et $a_1,a_2,\ldots,a_k$, $b_1,b_2,\ldots,b_l$ sont des nombres naturels, k et l des nombres naturels >1.

D'après (2) on trouve sans peine

$$\begin{aligned}\xi^2=\omega^{\alpha_1\cdot 2}a_1+\omega^{\alpha_1+\alpha_2}a_2+\ldots+\omega^{\alpha_1+\alpha_{k-1}}a_{k-1}+\omega^{\alpha_1}a_1a_k+\\ +\omega^{\alpha_2}a_2+\ldots+\omega^{\alpha_{k-1}}a_{k-1}+a_k\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\eta^3=\omega^{\beta_1\cdot 3}b_1+\omega^{\beta_1\cdot 2+\beta_2}b_2+\ldots+\omega^{\beta_1\cdot 2+\beta_{l-1}}b_{l-1}+\omega^{\beta_1\cdot 2}b_1b_l+\omega^{\beta_1+\beta_2}b_2+\\ +\ldots+\omega^{\beta_1+\beta_{l-1}}b_{l-1}+\omega^{\beta_1}b_1b_l+\omega^{\beta_2}b_2+\ldots+\omega^{\beta_{l-1}}b_{l-1}+b_l\,.\end{aligned} \tag{4}$$

Le développement normal du nombre ξ^2 a donc $2(k-1)+1$ termes et celui de η^3 (et de η^3+1) a $3(l-1)+1$ termes. Le développement normal d'un nombre ordinal étant unique, on a donc, d'après (1), $2(k-1)+1=3(l-1)+1$, d'où $2(k-1)=3(l-1)$ et il existe un nombre naturel r tel que $k-1=3r$, $l-1=2r$, d'où $k=3r+1$, $l=2r+1$.

En utilisant les formules (3) et (4) et en égalant les premiers termes des développements normaux des côtés gauche et droit de la formule (1) on trouve $a_1=b_1$; en égalant les derniers termes on obtient $a_k=b_l+1$; en égalant les l-ièmes termes, vu que $l<k$, on trouve $a_l=b_1b_l$; en égalant

les k-ièmes termes, vu que $k=l+r$, on trouve $a_1a_k=b_{r+1}$ et, comme $r+1<l$, on a $b_{r+1}=a_{r+1}$.

Or, dans le développement normal de η^3+1 les coefficients du l-ième et du $2l-1$-ème termes sont égaux. Il est donc de même dans le développement de ξ^2 et, comme $2l-1=k+r$, on trouve $a_l=a_{r+1}$.

On a ainsi $a_1a_k=a_{r+1}=a_l=b_1b_l=a_1b_l$ d'où $a_1a_k=a_1b_l$ et $a_k=b_l$ contrairement à $a_k=b_l+1$.

Le nombre η est donc de seconde espèce: soit

$$\eta=\omega^{\beta_1}b_1+\omega^{\beta_2}b_2+\ldots+\omega^{\beta_l}b_l \tag{5}$$

son développement normal. On a ici $\beta_1>\beta_2>\ldots>\beta_l>0$.

D'après (5) on trouve

$$\eta^3=\omega^{\beta_1\cdot 3}b_1+\omega^{\beta_1\cdot 2+\beta_2}b_2+\ldots+\omega^{\beta_1\cdot 2+\beta_l}b_l\,.$$

En comparant les développements de ξ^2 et η^3+1 on trouve $2(k-1)+$ $+1=l+1$, donc $l=2(k-1)$ et, comme $k>1$, on a $l\geqslant k$. En comparant les premiers termes des développements, on trouve $a_1\cdot 2=\beta_1\cdot 3$, et en comparant les k-ièmes termes on obtient $a_1=\beta_1\cdot 2+\beta_k$, d'où $\beta_1\cdot 3$ $=a_1\cdot 2=(\beta_1\cdot 2+\beta_k)\cdot 2\geqslant\beta_1\cdot 4$, donc $\beta_1\cdot 3\geqslant\beta_1\cdot 4$, ce qui est impossible.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Or, il est à remarquer que l'équation

$$\xi^2=1+\eta^3 \tag{6}$$

a une infinité de solutions en nombres ordinaux transfinis. En effet, η étant un nombre transfini, on a $1+\eta^3=\eta^3$ et l'équation (6) équivaut à l'équation

$$\xi^2=\eta^3 \tag{7}$$

et, pour avoir des solutions de cette équation, il suffit de poser $\xi=\tau^3$, $\eta=\tau^2$, où τ est un nombre ordinal transfini quelconque. Il existe aussi d'autres solutions, par exemple $\xi=\omega^3+\omega^2$, $\eta=\omega^2+\omega$ ou bien

$$\xi=\omega^{3n}+\omega^{2n}\cdot 2+\omega^n\cdot 2+2\,,\qquad \eta=\omega^{2n}+\omega^n\cdot 2+2\,,\qquad \text{où}\quad n=1,2,\ldots$$

Il ne serait pas difficile de trouver toutes les solutions de l'équation (7) en nombres transfinis ξ et η de seconde espèce, mais le problème de trouver toutes les solutions de cette équation en nombres ordinaux transfinis de première espèce me semble difficile.

Reçu par la Rédaction le 22.9.1955

Continuous functions considered from the standpoint of Dini's conditions *

by

E. Tarnawski (Gdańsk)

Introduction

Let $w(t)$ denote a continuous function defined and not equal to 0 for $t>0$, monotone, non-decreasing and tending to zero for $t\to 0$. By $W(\tau)$ we understand

$$W(\tau)=\int_\tau^1\frac{dt}{w(t)} \tag{1}$$

and suppose that everywhere

$$\lim_{\tau\to+0}W(\tau)=\infty\,. \tag{2}$$

Moreover, we suppose that the functions $f(x)$ always mean continuous, defined and bounded functions in the interval $(-\infty,\infty)$.

The object of this paper is the examination of classes of functions $f(x)$ with regard to their satisfying the generalized Dini condition, *i. e.*

$$\int_0^1\frac{|f(x+t)-f(x)|}{w(t)}\,dt\leqslant M\,[1])\,. \tag{3}$$

Let D_w denote a class of functions $f(x)$ satisfying (3) for every x with a certain constant M. We shall suppose that the function $w(t)$ satisfies condition (2).

From the inequality $w_1(t)\leqslant w_2(t)$, for $0<t<a$ and with a certain constant a, follows $D_{w_1}\subset D_{w_2}$. This permits a classification of $f(x)$ according to $w(t)$. *E. g.*, taking in (3) $w(t)=t^{1+\delta}|\log t|^\gamma$ we obtain a logarithmic-

* This paper was presented to the Poznań University as a part of Doctor's Thesis of the author in December 1951. The author wishes to thank Professor W. Orlicz for having suggested the subject to him, and for his advice and criticism made while the paper was being written.

[1]) For simplicity we denote the upper limit of integration as 1. It is obvious that it can be replaced by a constant positive a arbitrarily chosen for $f(x)$ and $w(t)$.