Now we can extend $\mathfrak{K}$ so that we obtain a homeomorphism of the closure of A_1 onto itself say $\mathfrak{J}$ with the properties,

$$\text{if} \quad p \in K \quad \mathfrak{J}(p) = \mathfrak{K}(p), \qquad \text{if} \quad p \in L \quad \mathfrak{J}(p) = p.$$

Now define $\mathfrak{J}$ as follows. For $p \in C$, $\mathfrak{J}(p) = \mathfrak{G}(p)$; for $p \in \mathrm{Fr}\, S$ $\mathfrak{J}(p) = p$; for $p \in S^0 - C$ $\mathfrak{J}(p) = \mathfrak{M}_2^{-1}\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{J}\mathfrak{M}_1(p)$; for $p \notin S$ $\mathfrak{J}(p) = p$. Then $\mathfrak{J}$ is a homeomorphism of the required form.

By § 3 we can find a member $\mathfrak{H}$ of Ξ such that for every point z of S, $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{J}$ differ by at most ε. The homeomorphism $\mathfrak{H}$ has the required property and the theorem 4 is proved.

Reçu par la Rédaction le 5. 4. 1954

Über eine Abschwächung des Auswahlpostulates

von

W. Kinna (Solingen) und **K. Wagner** (Köln)

Es sei M eine Menge. Wir bezeichnen die Elemente von M mit $a, b, \ldots$, hingegen die Teilmengen von M mit $A, B, \ldots$ Die Potenzmenge von M (d. h. die Menge sämtlicher Teilmengen von M, einschließlich der leeren Menge 0) bezeichnen wir mit M^*.

Definition. *Wir sagen, eine Menge M habe die Eigenschaft* (E), *wenn es eine eindeutige Abbildung φ von M^* in sich gibt, so daß für jedes aus mindestens zwei Elementen bestehende $A \subseteq M$ gilt:*

$$0 \subset \varphi(A) \subset A\ ^{1)}.$$

Unsere Bedingung (E) steht in einem engen Zusammenhang mit dem bekannten [2]) Auswahlpostulat. Wie man ohne weiteres sieht, ist (E) formal schwächer als das Auswahlpostulat. Man kann aber außerdem leicht zeigen, daß das Kontinuum C noch (E) erfüllt. Denn mittels der unendlichen Folge der rationalen Zahlen gelingt es, da diese relativ zu C dicht liegen, jedes aus mindestens zwei Zahlen bestehende $A \subseteq C$ in ein echtes Anfangsstück und ein echtes Endstück von A zu zerlegen. Versteht man dann unter $\varphi(A)$ dieses echte, nicht leere Anfangsstück von A, so folgt unmittelbar unsere Behauptung. Wir sehen, unser (E) ist nichts weiter als eine gewisse Abschwächung des Auswahlpostulates.

Satz 1. *Jede Menge M mit der Eigenschaft* (E) *läßt sich ordnen.*

Beweis. Wir setzen [3]) $\bar{\varphi}(A) = A - \varphi(A)$ für jedes $A \subseteq M$. Dann folgt auch

$$0 \subset \bar{\varphi}(A) \subset A$$

für jedes aus mindestens zwei Elementen bestehende $A \subseteq M$. Ferner folgt

[1]) D. h. also, $\varphi(A)$ ist eine echte, nicht leere Teilmenge von A. Die vorliegende Arbeit enthält die wesentlichen Ergebnisse der (unveröffentlichten) Dissertation (Köln 1952) des erstgenannten Verfassers, der durch diese vom letztgenannten Verfasser stammende Definition sowie durch den Satz 1 angeregt wurde.

[2]) Siehe [7], Abschnitt 2, S. 514.

[3]) Es ist im folgenden bequem, für die aus nur einem Element bestehenden A, also (kurz geschrieben) für die $a \in M$, einfach $\varphi(a) = a$ vorauszusetzen. Ferner setzen wir im folgenden für die Nullmenge $\varphi(0) = 0$ voraus.

$$\varphi(A) \cup \overline{\varphi}(A) = A$$

für jedes $A \subseteq M$. Nach einem Vorbild von E. Zermelo ([8], S. 108) nennen wir eine Teilmenge $\boldsymbol{K}$ von M^* eine *Kette*, wenn

(1_{K}) $M \in \boldsymbol{K}$ und

(2_{K}) für den Durchschnitt D beliebig (endlich oder unendlich) vieler $A \in \boldsymbol{K}$ stets auch $\varphi(D) \in \boldsymbol{K}$ und $\overline{\varphi}(D) \in \boldsymbol{K}$ gilt.

Es gibt Ketten; z. B. ist das ganze M^* eine Kette. Aus den beiden Ketteneigenschaften folgt leicht, daß der Durchschnitt von Ketten stets wiederum eine Kette ist. Wir betrachten den Durchschnitt sämtlicher Ketten und bezeichnen diesen mit $\boldsymbol{K}_0$. Dieses ist also die „kleinste" Kette (von M^* bezüglich φ).

Wir werden zeigen, daß sich M mit Hilfe von $\boldsymbol{K}_0$ ordnen läßt. Hierzu denken wir uns M^* teilweise geordnet, indem wir $A < B$ dann und nur dann setzen, wenn $B \subset A$ gilt. Dann ist M das erste Element von M^*. Wir interessieren uns im folgenden für bestimmte wohlgeordnete Teilmengen unserer teilweise geordneten Menge M^*. Eine wohlgeordnete Teilmenge $\boldsymbol{F}$ von M^* (d. h. eine Teilmenge von M^*, die als teilweise geordnete Untermenge von M^* aufgefaßt, wohlgeordnet ist) heiße ein *Filter*, wenn

(1_{F}) $M \in \boldsymbol{F}$ und

(2_{F}) für jedes $A \neq M$ aus $\boldsymbol{F}$, unter D den Durchschnitt sämtlicher $B \in \boldsymbol{F}$ mit $B < A$ verstanden, entweder $\varphi(D) = A$ oder $\overline{\varphi}(D) = A$ gilt.

Wir sagen im folgenden statt Element eines Filters $\boldsymbol{F}$ auch Glied von $\boldsymbol{F}$. Z. B. ist, von dem aus dem nur einen Glied M bestehenden (trivialen) Filter abgesehen, das zweite Glied eines jeden Filters entweder gleich $\varphi(M)$ oder gleich $\overline{\varphi}(M)$. Aus den beiden Ketteneigenschaften (1_{K}) und (2_{K}) folgt mittels einfacher Anwendung transfiniter Induktion, daß jedes Filter in jeder Kette als Teilmenge, also auch in $\boldsymbol{K}_0$ als Teilmenge enthalten ist. Folglich ist auch die Vereinigungsmenge sämtlicher Filter eine Teilmenge von $\boldsymbol{K}_0$. Wir werden später aus dem weiteren Verlauf dieses Beweises sehen, daß bereits diese Vereinigungsmenge gleich $\boldsymbol{K}_0$ ist.

Zunächst folgt unmittelbar:

(I) *Ist $\boldsymbol{F}$ ein Filter, dann ist auch jedes Anfangsstück von $\boldsymbol{F}$ ein Filter.*

Entscheidend ist im weiteren:

(II) *Der Durchschnitt je zweier Filter $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ ist ein gemeinsames Anfangsstück $\boldsymbol{F}'$ von beiden (das nach* (I) *also wieder ein Filter ist) und ferner gilt, daß der Durchschnitt eines jeden Gliedes von $\boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}'$ mit jedem Glied von $\boldsymbol{F}_2 - \boldsymbol{F}'$ leer ist. Allgemein gilt: Der Durchschnitt von beliebig vielen Filtern ist gleich einem gemeinsamen Anfangsstück derselben, also nach* (I) *stets wiederum ein Filter.*

Zum Beweis von (II) sei $\boldsymbol{F}_1$ eins der vorgegebenen Filter. Der Durchschnitt $\boldsymbol{D}$ der vorgegebenen Filter ist natürlich eine Teilmenge von $\boldsymbol{F}_1$. Wegen (1_{F}) ist $\boldsymbol{D}$ nicht leer. Im Falle $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{F}_1$ ist nichts mehr zu beweisen. Im entgegengesetzten Falle $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{F}_1$ gibt es ein erstes Element $A \in \boldsymbol{F}_1$, das in $\boldsymbol{D}$ nicht vorkommt. Nach (I) ist die Menge sämtlicher in $\boldsymbol{F}_1$ vorkommenden Vorgänger von diesem A ein Filter $\boldsymbol{F}'$; offenbar ist dieses $\boldsymbol{F}'$ das größte gemeinsame Anfangsstück von $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{D}$. Da A nicht in $\boldsymbol{D}$ vorkommt, gibt es unter den vorgegebenen Filtern ein $\boldsymbol{F}_2$, worin A nicht vorkommt. Nach (2_{F}) ist $\boldsymbol{F}'$ ein Anfangsstück auch von $\boldsymbol{F}_2$. Im Falle $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}_2$ folgt $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{F}'$. Dann ist unsere Behauptung (II) bewiesen. Im entgegengesetzten Falle $\boldsymbol{F}' \subset \boldsymbol{F}_2$ folgt, unter D' den Durchschnitt sämtlicher Glieder von $\boldsymbol{F}'$ verstanden, nach (2_{F}) entweder $\varphi(D') = A$ und weiter, da A in $\boldsymbol{F}_1$ aber nicht in $\boldsymbol{F}_2$ vorkommt, $\varphi(D') \in \boldsymbol{F}_1$ und $\overline{\varphi}(D') \in \boldsymbol{F}_2$ oder nach (2_{F}) folgt $\overline{\varphi}(D') = A$ und wegen $A \in \boldsymbol{F}_1$ dann $\overline{\varphi}(D') \in \boldsymbol{F}_1$ und $\varphi(D') \in \boldsymbol{F}_2$. Da $\varphi(D') \cap \overline{\varphi}(D')$ leer ist und außerdem die Glieder eines jeden Filters, als Teilmengen von M aufgefaßt, wegen (2_{F}) monoton abnehmen, folgt hieraus unmittelbar die erste Behauptung von (II). Die letzte Behauptung von (II) ergibt sich daraus, daß der Durchschnitt von Anfangsstücken von $\boldsymbol{F}_1$ stets wiederum ein Anfangsstück von $\boldsymbol{F}_1$ ist.

Schließlich gilt noch:

(III) *Zu jedem Element $a \in M$ gibt es genau ein Filter $\boldsymbol{F}$ derart, daß der Durchschnitt sämtlicher Glieder von $\boldsymbol{F}$ aus diesem einen Element a besteht.*

Denn es sei $\boldsymbol{V}$ die Vereinigungsmenge sämtlicher Filter, in denen a in jedem Glied vorkommt. Aus (II) folgt leicht, daß $\boldsymbol{V}$ die Bedingung (2_{F}) erfüllt. Da (1_{F}) selbstverständlich für $\boldsymbol{V}$ gilt, ist $\boldsymbol{V}$ ein Filter. Nach Definition von $\boldsymbol{V}$ kommt a in jedem Glied von $\boldsymbol{V}$ vor. Bestünde der Durchschnitt D sämtlicher Glieder von $\boldsymbol{V}$ aus mindestens zwei Elementen, so läge unser a entweder in $\varphi(D)$ oder in $\overline{\varphi}(D)$. Eine dieser beiden Mengen käme dann aber in $\boldsymbol{V}$ vor im Widerspruch zur Bedeutung von D. Schließlich sei $\boldsymbol{V}'$ ein Filter, das ebenfalls noch die in (III) genannte Bedingung erfülle. Dann stimmen $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{V}'$ nach (1_{F}) mindestens in ihrem ersten Glied überein. Nun sei allgemein $\boldsymbol{V}''$ ein gemeinsames (echtes) Anfangsstück von $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{V}'$. Es sei D'' der Durchschnitt sämtlicher Glieder von $\boldsymbol{V}''$. Nach (2_{F}) folgt in dem wohlgeordneten $\boldsymbol{V}$ bzw. $\boldsymbol{V}'$ entweder $\varphi(D'')$ oder $\overline{\varphi}(D'')$ unmittelbar hinter den Gliedern von $\boldsymbol{V}''$. Da jedes Glied von $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{V}'$ aber a als Element enthält und $\varphi(D'') \cap \overline{\varphi}(D'')$ leer ist, folgt entweder für $\varphi(D'')$ oder $\overline{\varphi}(D'')$, daß dasselbe in $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{V}'$ gleichzeitig vorkommt. Also folgt mittels transfiniter Induktion $\boldsymbol{V}' = \boldsymbol{V}$.

Wir bezeichnen dieses $\boldsymbol{V}$ im folgenden mit $\boldsymbol{V}(a)$. Ein Filter $\boldsymbol{F}$ heiße *vollständig*, wenn es entweder mit der leeren Menge 0 oder mit einem

Element aus M als letztes Glied von $\boldsymbol{F}$ schließt. Unsere $\boldsymbol{V}(a)$ sind vollständig, weil nach (III) und wegen $\varphi(a)=a$ jedes $\boldsymbol{V}(a)$ mit seinem a als letztes Glied schließt [4]).

Es folgt nun leicht der vollständige Beweis von Satz 1. Man habe zwei verschiedene Elemente a, $b \in M$. Wir betrachten nach (III) die beiden Filter $\boldsymbol{V}(a)$ und $\boldsymbol{V}(b)$. Wegen $a\neq b$ folgt aus (III) zunächst $\boldsymbol{V}(a)\neq\boldsymbol{V}(b)$. Gemäß (II) betrachten wir das gemeinsame Anfangsstück $\boldsymbol{F}$ von $\boldsymbol{V}(a)$ und $\boldsymbol{V}(b)$. Es sei D der Durchschnitt sämtlicher Glieder von $\boldsymbol{F}$. In D liegen dann also a und b noch beide. Aber $\varphi(D)$ und $\overline{\varphi}(D)$ enthalten je genau eins unserer beiden Elemente a, b. Anschaulich gesprochen, werden a und b in $\boldsymbol{V}(a)$ und $\boldsymbol{V}(b)$ durch $\varphi(D)$ und $\overline{\varphi}(D)$ zum ersten Male (und von da ab natürlich dauernd) getrennt. Wir setzen nunmehr $a<b$, wenn $a\in\varphi(D)$ und also $b\in\overline{\varphi}(D)$ gilt. Dagegen setzen wir $b<a$, wenn umgekehrt $b\in\varphi(D)$ und $a\in\overline{\varphi}(D)$ gilt. Es bleibt nun allein nur noch zu zeigen übrig, daß diese Relation „$<$" in M transitiv ist. Hierzu habe man drei Elemente $a_1, a_2, a_3 \in M$ mit $a_1<a_2$ und $a_2<a_3$. Wir bezeichnen $\boldsymbol{V}(a_\nu)$ kurz durch $\boldsymbol{V}_\nu$ $(\nu=1,2,3)$. Ferner sei entsprechend (II) das gemeinsame Anfangsstück von $\boldsymbol{V}_\nu$ und $\boldsymbol{V}_\mu$ mit $\boldsymbol{F}_{\nu\mu}$ bezeichnet $(\nu,\mu=1,2,3)$. Unter $D_{\nu\mu}$ sei der Durchschnitt sämtlicher Glieder von $\boldsymbol{F}_{\nu\mu}$ verstanden.

Zunächst ergibt sich $\boldsymbol{F}_{12}\neq\boldsymbol{F}_{23}$, da wegen $a_1<a_2$ nach unserer „$<$"-Relation $a_2\in\overline{\varphi}(D_{12})$ folgt und natürlich $a_2<a_3$ analog $a_2\in\varphi(D_{23})$ zur Folge hat, also $D_{12}\neq D_{23}$ und daher auch $\boldsymbol{F}_{12}\neq\boldsymbol{F}_{23}$ folgt. Da $\boldsymbol{F}_{12}$ und $\boldsymbol{F}_{23}$ zwei Anfangsstücke desselben $\boldsymbol{V}_2$ sind, bleibt nur allein noch entweder $\boldsymbol{F}_{12}\subset\boldsymbol{F}_{22}$ oder $\boldsymbol{F}_{23}\subset\boldsymbol{F}_{12}$ übrig.

Es sei $\boldsymbol{F}_{12}\subset\boldsymbol{F}_{23}$. Dann folgt aus (II) unmittelbar

$$\boldsymbol{F}_{13}=\boldsymbol{F}_{12},$$

also $D_{13}=D_{12}$. Dann ist $a_1\in\varphi(D_{12})$ wegen $a_1<a_2$. Wegen $D_{13}=D_{12}$ folgt $a_1\in\varphi(D_{13})$, also auch $a_1<a_3$.

Umgekehrt sei $\boldsymbol{F}_{23}\subset\boldsymbol{F}_{12}$. Dann folgt durch Vertauschung der Indices 1 und 3 analog $D_{13}=D_{32}$ und wegen $a_2<a_3$ weiter $a_3\in\overline{\varphi}(D_{32})$, also $a_3\in\overline{\varphi}(D_{13})$, d. h. $a_1<a_3$. Hiermit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Aus unserem Beweis ergibt sich noch leicht, daß die Kette $\boldsymbol{K}_0$ nichts anderes als die Vereinigungsmenge sämtlicher Filter (d. h. sämtlicher $\boldsymbol{V}(a)$ unter Hinzunahme noch des einen Elementes 0) ist. Denn diese Menge erfüllt offenbar die erste der beiden Kettenbedingungen (1_K). Sie erfüllt auch die zweite Bedingung (2_K). Denn der Durchschnitt beliebig vieler vorgegebener Glieder unserer $\boldsymbol{V}(a)$ (zu beliebigen $a\in M$,

[4]) Es können aber auch noch vollständige Filter existieren, die unter unseren $V(a)$ und $V(a)\cup 0$ nicht vorkommen. Z. B. betrachte man ein aus den offenen Intervallen $(0, 1/n)$, $n=1,2,\ldots$, und 0 (leere Menge) zusammengesetztes Filter.

also nicht notwendig alle zu demselben a gehörig) ist stets entweder leer oder nach (II) liegen diese vorgegebenen Glieder sämtlich in demselben $\boldsymbol{V}(a)$. Hieraus folgt ohne weiteres wegen (2_F) und wegen des monotonen Fallens der Glieder eines jeden Filters, daß die Vereinigungsmenge sämtlicher Filter auch (2_K) erfüllt. Also ist diese Menge eine Kette. Diese ist, wie wir früher sahen, eine Teilmenge von $\boldsymbol{K}_0$. Unser $\boldsymbol{K}_0$ ist aber die kleinste Kette. Also fallen beide zusammen.

Wir wollen im weiteren den Satz 1 noch etwas verschärfen. Hierzu nennen wir eine geordnete Menge M *spaltbar geordnet*, wenn es eine eindeutige Abbildung ψ von M^* in sich derart gibt, daß für jedes aus mindestens zwei Elementen bestehende $A\subseteq M$ die Bildmenge $\psi(A)$ ein echtes, nicht leeres Anfangsstück von A ist.

Dann gilt:

Satz 2. *Eine Menge M besitzt dann und nur dann die Eigenschaft* (E), *wenn es eine spaltbare Ordnung von M gibt.*

Denn ist M spaltbar geordnet, so hat M trivialerweise die Eigenschaft (E). Wir setzen nun umgekehrt voraus, M besitze die Eigenschaft (E). Wir denken uns M mittels unserer $\boldsymbol{V}(a)$ gemäß Beweis von Satz 1 geordnet. Dann sei A eine aus mindestens zwei Elementen bestehende Teilmenge von M. Nach (II) ist der Durchschnitt sämtlicher $\boldsymbol{V}(a)$, $a\in A$, ein gemeinsames Anfangsstück $\boldsymbol{F}$ dieser $\boldsymbol{V}(a)$. Es sei D der Durchschnitt sämtlicher Glieder von $\boldsymbol{F}$. Dann folgt $A\subseteq D$. Ferner gilt $\varphi(D)\cup\overline{\varphi}(D)=D$. In jeder der beiden Mengen $\varphi(D)$ und $\overline{\varphi}(D)$ liegt dann mindestens ein Element von A. Denn enthielte $\varphi(D)$ oder $\overline{\varphi}(D)$ das ganze A als Teilmenge, so käme ja auch noch dieses $\varphi(D)$ bzw. $\overline{\varphi}(D)$ in unserem $\boldsymbol{F}$ als ein Glied vor im Widerspruch zur Bedeutung von D. Ferner geht in dem von uns gemäß Beweis von Satz 1 geordneten M jedes Element von $\varphi(D)$ jedem Element von $\overline{\varphi}(D)$ voraus. Dieses folgt dann natürlich auch für die Elemente der Durchschnitte $\varphi(D)\cap A$ und $\overline{\varphi}(D)\cap A$. Aus $\varphi(D)\cup\overline{\varphi}(D)=D$ folgt weiter $\big(\varphi(D)\cap A\big)\cup\big(\overline{\varphi}(D)\cap A\big)=A$. Da jeder der beiden Summanden dieser Zerlegung von A nicht leer ist, ergibt die Abbildung $\psi(A)=\varphi(D)\cap A$ die gesuchte spaltbare Ordnung von M, w. z. b. w.

An dieser Stelle ist ein Rückblick auf das Auswahlpostulat und unsere Bedingung (E) besonders interessant. Ist speziell jedem nicht leeren $A\subseteq M$ je ein aus nur einem Element bestehendes $\varphi(A)$, d. h. also ein Element von A zugeordnet, so besteht natürlich auch unser voriges $\psi(A)=\varphi(D)\cap A$ nur aus nur einem Element. Dieses ist dann das erste Element von A. Unser Beweis von Satz 1 ergibt also, wenn φ jedem nicht leeren $A\subseteq M$ eine aus nur einem Element bestehende Teilmenge von A zuordnet, ist die im Beweis von Satz 1 definierte Ordnung eine

Wohlordnung. Der Satz 1 und sein Beweis enthalten also als Spezialfall den Wohlordnungssatz.

Wir wollen im folgenden weiter zeigen, daß die Potenzmenge jeder wohlgeordneten Menge die Eigenschaft (E) besitzt und daß auch umgekehrt sich jede Menge mit der Eigenschaft (E) in die Potenzmenge einer wohlgeordneten Menge einbetten läßt. Ungenau gesagt, führen also die Mengen mit unserer Eigenschaft (E) nicht über die Potenzmengen von wohlgeordneten Mengen hinaus.

Genauer gesagt, gilt:

Satz 3. *Eine Menge M besitzt dann und nur dann die Eigenschaft* (E), *wenn es eine wohlgeordnete Menge N und hierzu eine mit M äquivalente Teilmenge der Potenzmenge N^* von N gibt.*

Beweis. Wir setzen zunächst voraus, M habe die Eigenschaft (E). Wir betrachten die Menge sämtlicher Filter von M (bezüglich des vorgegebenen φ). Mit Hilfe dieser Menge konstruiere man die folgende wohlgeordnete Menge N. Es seien $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ zwei Filter. Man setze $\boldsymbol{F}_1 < \boldsymbol{F}_2$, wenn es ein echtes, mit $\boldsymbol{F}_1$ ähnliches (d. h. auf $\boldsymbol{F}_1$ ähnlich abbildbares) Anfangsstück von $\boldsymbol{F}_2$ gibt. Dagegen setze man $\boldsymbol{F}_2 < \boldsymbol{F}_1$, wenn es ein echtes, mit $\boldsymbol{F}_2$ ähnliches Anfangsstück von $\boldsymbol{F}_1$ gibt. Dann denke man sich die Menge sämtlicher Filter in die (elementfremden) Teilmengen je untereinander ähnlicher Filter zerlegt und fasse diese Teilmengen als die Elemente einer Menge N auf. Durch Übertragung unserer vorigen Relation „$<$" für die Filter auf die Elemente von N folgt leicht, daß N wohlgeordnet ist. Ferner folgt, da je zwei verschiedene Anfangsstücke desselben Filters niemals miteinander ähnlich sind, daß jedes Filter mit (genau) einem Anfangsstück von N ähnlich ist. Nunmehr ordnen wir jedem Element $a \epsilon M$ jeweils die folgende Teilmenge N_a von N zu: Ein Element $\alpha \epsilon N$ werde in N_a aufgenommen, wenn bei der ähnlichen Abbildung von $\boldsymbol{V}(a)$ auf das Anfangsstück von N das α in diesem Anfangsstück vorkommt und für sein Urbild A in $\boldsymbol{V}(a)$ entweder $A = M$ oder die erste der beiden Gleichungen von (2_F), also $\varphi(D) = A$ gilt. Kommt dagegen das α in dem Anfangsstück von N nicht vor oder kommt es vor und gilt für sein Urbild A in $\boldsymbol{V}(a)$ die letzte Gleichung von (2_F) $\overline{\varphi}(D) = A$, so werde das betreffende α nicht in N_a aufgenommen. Unsere Abbildung $a \to N_a$ ist eineindeutig, da für je zwei verschiedene Elemente $a, b \epsilon M$ nach (II) und (III) $N_a \neq N_b$ folgt. Also gibt es eine mit M äquivalente Teilmenge von N^*.

Wir setzen nun umgekehrt voraus, es existiere eine wohlgeordnete Menge N, deren Potenzmenge N^* mit M äquivalent sei. Wir dürfen hier sogleich die Äquivalenz von M mit dem ganzen N^* voraussetzen, da die Eigenschaft (E), wenn sie für eine Menge zutrifft, dann ja auch für jede Teilmenge dieser Menge zutrifft.

Man habe nunmehr ein aus mindestens zwei Elementen bestehendes $A \subseteq M$. Das Bild von $a \epsilon A$ vermöge der Äquivalenz $M \sim N^*$ bezeichne man mit N_a. Wir betrachten die Vereinigungsmenge sämtlicher N_a, $a \epsilon A$, und bezeichnen sie mit N_A. Da A aus mindestens zwei Elementen besteht, ist N_A nicht leer.

Es existiert somit ein erstes Element von N_A. Dieses Element bezeichnen wir mit α.

Kommt α in wenigstens einem der N_a $(a \epsilon A)$ nicht vor, so sei $\varphi(A)$ die Menge derjenigen $a \epsilon A$, in deren N_a unser α vorkommt.

Kommt dagegen α in jedem N_a $(a \epsilon A)$ vor, so betrachten wir den Durchschnitt Δ sämtlicher N_a $(a \epsilon A)$. Wegen $\alpha \epsilon \Delta$ ist Δ nicht leer. Da A aus mindestens zwei Elementen besteht, ist auch $N_A - \Delta$ nicht leer. Es existiert somit ein erstes Element β von $N_A - \Delta$. Dieses β kommt dann also in mindestens einem N_a, aber nicht in allen N_a $(a \epsilon A)$ gleichzeitig vor. Dann verstehe man unter $\varphi(A)$ die Menge derjenigen $a \epsilon A$, in deren N_a das β vorkommt. In jedem Falle hat sich eine echte, nicht leere Teilmenge $\varphi(A)$ von A ergeben, womit Satz 3 vollständig bewiesen ist.

Wir schließen mit einem allgemeinen Beispiel für Mengen, die stets die Eigenschaft (E) besitzen.

Hierzu sei M eine geordnete Menge. *Gibt es (mindestens) eine relativ zu M dichte Teilmenge $N \subseteq M$, die sich außerdem wohlordnen läßt*, so wollen wir zeigen, daß *dann M die Eigenschaft* (E) *hat.*

Denn ist $A \subseteq M$ vorgegeben und besteht A aus mindestens zwei Elementen, so gibt es Elemente $n \epsilon N$, die zwischen mindestens zwei Elementen von A im strengen Sinne liegen. Folglich gibt es in N auch ein erstes Element n_A dieser Art. Dann verstehe man unter $\varphi(A)$ die Menge sämtlicher $a \epsilon A$ mit $a < n_A$. Offenbar ist $\varphi(A)$ ein echtes, nicht leeres Anfangsstück von A.

Dieses Beispiel zeigt uns nochmals als Spezialfall, daß das Kontinuum die Eigenschaft (E) besitzt.

In Untersuchungen von A. Fraenkel ([1] und [3]), A. Mostowski ([5] und [6]) und A. Lindenbaum mit A. Mostowski [4] wurde u. a. gezeigt, daß das Ordnungstheorem von den üblichen Axiomen der Mengenlehre [5]) (das Auswahlaxiom aber nicht mit dazu genommen) unabhängig ist. Da nach Satz 1 das Ordnungstheorem aus (E) folgt, ist auch (E) unabhängig von den Axiomen der Mengenlehre. Ob aber unser (E) auch unabhängig vom Ordnungstheorem bzw. ob das Auswahlpostulat auch unabhängig von (E) ist, ist uns nicht bekannt [6]).

---

[5]) Vgl. [2], [8] und [9].

[6]) A. Fraenkel und A. Tarski schlugen uns vor, die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms von unserem (E) mittels der in der Arbeit von Mostowski [5] entwickelten Methoden nachzuweisen.

Zitate

[1] A. Fraenkel, *Über den Begriff Definit und die Unabhängigkeit des Auswahlaxioms*, Sitzungsberichte Preuß. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. (1922), S. 253-257.

[2] — *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre*, Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 250-273.

[3] — *Über die Ordnungsfähigkeit beliebiger Mengen*, Sitzungsberichte Preuß. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl. (1928), S. 90-91.

[4] A. Lindenbaum und A. Mostowski, *O niezależności pewnika wyboru i niektórych jego konsekwencji*, C. R. Soc. Varsovie 31 (1938), S. 21-32.

[5] A. Mostowski, *Über die Unabhängigkeit des Wohlordnungssatzes vom Ordnungsprinzip*, Fund. Math. 32 (1939), S. 201-252.

[6] — *On the principle of dependent choices*, Fund. Math. 35 (1948), S. 127-130.

[7] E. Zermelo, *Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann*, Math. Ann. 59 (1904), S. 514-516.

[8] — *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, Math. Ann. 65 (1908), S. 107-128.

[9] — *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, Math. Ann. 65 (1908), S. 261-281.

Reçu par la Rédaction le 15. 4. 1954

An application of lattices to logic

by

H. Rasiowa and **R. Sikorski** (Warszawa)

This paper is a continuation of our papers "*Algebraic treatment of the notion of satisfiability*" [6] and "*On existential theorems in non-classical functional calculi*" [7] cited hereafter as [AT] and [ET] respectively.

The method used in this paper is indeed the same as in [AT] and [ET], but the subjects of research are sentential calculi with quantifiers. Analogously to [AT] we shall first examine a non-specified sentential calculus with quantifiers $\overline{\mathcal{S}}$, determined in an obvious way by a sentential calculus $\mathcal{S}$. Later on we shall study some special sentential calculi with quantifiers $\overline{\mathcal{S}}_\varkappa$, $\overline{\mathcal{S}}_\lambda$, $\overline{\mathcal{S}}_\chi$, $\overline{\mathcal{S}}_\mu$, determined by the classical calculus $\mathcal{S}_\varkappa$, the Lewis calculus $\mathcal{S}_\lambda$, the Heyting calculus $\mathcal{S}_\chi$, and the minimal calculus $\mathcal{S}_\mu$, respectively. Since the positive sentential calculus with quantifiers is equivalent (in a certain sense) to $\overline{\mathcal{S}}_\chi$, we shall not examine it separately.

We shall formulate a necessary and sufficient condition for a given formula a to be a theorem of one of these calculi with quantifiers. This condition will be formulated in the language of the lattice theory. We shall show later that, in the cases of $\overline{\mathcal{S}}_\lambda$, $\overline{\mathcal{S}}_\chi$ and $\overline{\mathcal{S}}_\mu$, this condition can also be expressed in a topological form.

As an application we shall obtain — by means of the same method as in [ET] — some theorems on the elimination of the quantifier $\sum\limits_a$ in systems $\overline{\mathcal{S}}_\lambda$, $\overline{\mathcal{S}}_\chi$ and $\overline{\mathcal{S}}_\mu$ (see 5.5, 6.5, 7.5). These theorems are analogous to Theorems (λ), (χ), (μ) in [ET]. However, in contrast to [ET], theorems on elimination of quantifiers in sentential calculi with quantifiers do not imply directly the decidability of formulas of the form $\Xi\beta$ where, roughly speaking, Ξ is a sequence of quantifiers, and β is a formula without quantifiers (see [ET], Theorems (λ'), (χ')). The problem of decidability remains open. An algebraical interpretation of the theorems on elimination of quantifiers will be given in theorems 6.7 and 7.7.

As the second application we shall prove (see 5.4, 6.4, 7.4) that in systems $\overline{\mathcal{S}}_\chi$, $\overline{\mathcal{S}}_\lambda$, $\overline{\mathcal{S}}_\mu$ there exist infinite sequences of closed non-equivalent formulas in contrast to the classical calculus $\overline{\mathcal{S}}_\varkappa$, which is com-