Мера Хаара топологической группы обладает всеми свойствами, перечисленными в предположениях леммы, а так как по лемме 1 группа с сепарабельной мерой Хаара метризуема, следует отсюда непосредственно наша теорема. Остаётся только доказать лемму 2.

Доказательство. Из условий, которым удовлетворяет мера, следует, что счётный класс $\boldsymbol{M}$ может состоять из компактных множеств. Каждое множество M из класса $\boldsymbol{M}$ разобьём на конечное число измеримых множеств, имеющих диаметр меньше $1/n$. Это разбиение возможно, так как компактное множество M можно покрыть конечным числом произвольно малых окрестностей.

Обозначим через $\boldsymbol{M}_n$ класс множеств, полученных путём такого разбиения всех множеств класса $\boldsymbol{M}$. Класс $\boldsymbol{M}_n$ тоже счётен. Возьмём теперь для всякого множества M из класса $\boldsymbol{M}_{3n}$ его $1/3n$-оболочку

$$K\left(M,\frac{1}{3n}\right)=\underset{p}{E}\left\{\varrho(p,M)>\frac{1}{3n}\right\}.$$

Эта оболочка является открытым множеством и имеет диаметр не больше $1/n$. Счётный класс таких оболочек для всех множеств класса $\boldsymbol{M}_{3n}$ обозначим через $\boldsymbol{B}_n$. Класс $\boldsymbol{B}=\bigcup\limits_n \boldsymbol{B}_n$ является счётной базой открытых множеств пространства X. Действительно, пусть p — произвольная точка пространства, а ε — произвольное положительное число; покажем, что в $\boldsymbol{B}$ существует множество содержащее точку p и имеющее диаметр меньше ε. Возьмём для $n>1/\varepsilon$ шар $K=K(p,1/3n)$ с центром в точке p и радиусом $1/3n$. Выбрав достаточно большое n, можно, благодаря локальной компактности пространства, добиться того, чтобы шар K имел конечную положительную меру; пусть эта мера $\mu(K)=\alpha$. В классе $\boldsymbol{M}$ имеется множество M такое, что $\mu(K\dot{-}M)<\alpha$ и, следовательно, множества K и M имеют общую точку. Но тогда и в классе $\boldsymbol{M}_{3n}$ имеется множество N, имеющее общую точку с K. Дальше, $1/3n$-оболочка этого множества N принадлежит классу $\boldsymbol{B}_n$, а следовательно также и классу $\boldsymbol{B}$, имеет диаметр меньше $1/n<\varepsilon$ и содержит точку p. Таким образом мы показали, что действительно $\boldsymbol{B}$ является счётной базой пространства, чем и завершили доказательство леммы 2.

Цитированная литература

[1] P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950, ch. XII.

[2] S. Kakutani, *Über die Metrisation der topologischen Gruppen*, Proc. Imp. Ac. Jap. 12 (1936), S. 82-84.

[3] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Paris 1940.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Reçu par la Rédaction le 24. 2. 1954

Sur la mesure d'une somme vectorielle *)

par

A. Shields (New Orleans)

Le but de cette note est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit G un groupe topologique compact, connexe, abélien, et satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité. Soit m la mesure de Haar, avec $m(G)=1$. Soient $A,B\subset G$ mesurables, non-vides, tels que $m(A)+m(B)\leqslant 1$. Alors*

$$m_i(A+B)\geqslant m(A)+m(B),$$

où m_i est la mesure intérieure, $m_i(E)=\sup m(F)$ sur tous les ensembles fermés $F\subset E$, et $A+B$ est l'ensemble des $a+b$, $a\in A$, $b\in B$ (la somme vectorielle de A et B).

Pour les nombres réels mod 1 ce résultat est dû à M. Raikov [5]. M. Macbeath [3] a prouvé le théorème si $G=T^n$ (n-fois produit cartésien des nombres réels mod 1).

Nous aurons besoin des résultats suivants:

LEMME 1. *Soit G un groupe compact, connexe, abélien. Soit T la transformation définie par: $T(g)=g+g$. Alors, $m(T^{-1}A)=m(A)$ pour tout ensemble borelien.*

Démonstration [1]). Nous avons

$$T(G)=G. \tag{1}$$

En effet, dans le cas contraire, il existe un caractère non-trivial φ du groupe connexe $G/T(G)$. Alors, $\varphi\big(G/T(G)\big)$ est un sous-groupe compact, connexe, non-trivial de R_1 (les nombres complexes de norme 1); c'est-à-dire $\varphi\big(G/T(G)\big)=R_1$. Mais ce n'est pas possible puisque chaque élément de $G/T(G)$ est d'ordre deux.

Il suffit alors de démontrer le résultat suivant: soit q un homomorphisme continu de G en G tel que $q(G)=G$. Alors on a

$$m(q^{-1}E)=m(E) \tag{2}$$

pour tout ensemble borelien E.

*) Présenté au American Mathematical Society le 29 novembre 1952 et 30 décembre 1953.

[1]) Dû à MM. Ryll-Nardzewski et A. D. Wallace.

Posons $p(E)=m(q^{-1}E)$. La mesure p est invariante. En effet, soit $x \in G$ donné. Il existe alors $y \in G$ tel que $q(y)=x$, d'où

$$p(x+E)=m[q^{-1}(qy+E)] \geqslant m(y+q^{-1}E)=m(q^{-1}E)=p(E).$$

De l'inégalité $p(x+E)\geqslant p(E)$ vérifiée par chaque x résulte par symétrie l'inégalité $P(E)\geqslant p(x+E)$, alors $p(x+E)=p(E)$.

En outre on a évidemment $p(G)=m(G)$. En vertu de l'unicité de la mesure de Haar, on a $p=m$, c. q. f. d.

LEMME 2. *Soit* $A \subset G$ *mesurable,* $m(A)>0$. *Soit* k *un entier* >0. *Il y a un voisinage* U *de l'identité* O *tel que, si* $u \in U$, *il existe un ensemble* $A_u \subset A$, $m(A_u)>0$, *qui, si* $x \in A_u$, *alors* $x, x+u, \ldots, x+ku \in A$.

Démonstration. Soit φ la fonction caractéristique de A, et posons

$$F(u)=\int \varphi_A(x)\varphi_A(x+u)\ldots\varphi_A(x+ku)\,dm(x). \tag{3}$$

$F(u)$ est continue, $F(0)=m(A)>0$. Il existe alors un voisinage U de O tel que $F(u)>0$ dans U, c. q. f. d.

$g \in G$ s'appelle un *générateur* de G si le sous-groupe cyclique engendré par g est partout dense dans G.

THÉORÈME I (Halmos-Sammelson [2], Eckmann [1]). *Soit G le groupe du théorème 1. Soit A l'ensemble des générateurs de G. Alors on a* $m(A)=1$.

THÉORÈME II. *Soient* $f \in L_1(G)$, *et* g *un générateur de* G. *Alors,*

$$\lim \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(x+ng)=\int f(y)\,dm(y)$$

pour presque tout $x \in G$.

C'est un cas particulier du théorème ergodique individuel, la transformation $T(x)=x+g$ étant indécomposable (c'est-à-dire, tout ensemble invariant est de mesure 0 ou 1; voir par exemple [1]).

THÉORÈME III (Ostmann [4]). *Soient P et Q deux ensembles d'entiers non-négatifs. Soit $P(n)$ le nombre des éléments de P qui sont* $\leqslant n$, *et posons* $d(P)=\underline{\lim}\,(P(n)/n)$. *Admettons les mêmes définitions pour Q et supposons que*

(a) $d(P)+d(Q)\leqslant 1$,

(b) $O \in P$,

(c) *Q contient k entiers consécutifs.*

Alors on a

$$d(P+Q)\geqslant d(P)+\left(\frac{k-1}{k}\right)d(Q).$$

Passons à la démonstration du théorème 1. Il suffit de considérer le cas où A et B sont F_σ (réunion dénombrable des ensembles fermés). En effet, dans le cas général il existe $A' \subset A$, $B' \subset B$, $m(A')=m(A)$, $m(B')=m(B)$, A' et B' sont des F_σ. En supposant le théorème déjà démontré pour A' et B', on a

$$m_i(A+B)\geqslant m(A'+B')\geqslant m(A')+m(B')=m(A)+m(B).$$

Supposons alors que A et B sont F_σ. $A+B$ est aussi F_σ, donc mesurable.

Soient $a \in A$, $b \in B$. Alors $(a+B)\cup(A+b)\subset A+B$, donc $m(A+B)\geqslant \max[m(A), m(B)]$. Le théorème est une trivialité si $m(A)=0$ ou $m(B)=0$.

Supposons que $m(A)>0$, $m(B)>0$, et soit $k>0$ un entier donné. Soient U l'ensemble du lemme 2 (pour B), $g \in U$ un générateur fixe, et $B_g \subset B$ l'ensemble du lemme 2. (Un tel $g \in U$ existe d'après le théorème I.)

On dira qu'un *point $x \in G$ est d'accord avec un ensemble mesurable C* si

$$\lim \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\varphi_C(x+ng)=m(C),$$

où φ_C est la fonction caractéristique de C, et g est le générateur qu'on a fixé ci-dessus.

Cherchons un point $x_0 \in G$ tel que

(i) x_0 est d'accord avec A, B, et B_g,

(ii) x_0+x_0 est d'accord avec $A+B$,

(iii) $x_0 \in A$.

En vertu du théorème II, la condition (i) est valable pour presque tout $x \in G$.

En outre, presque tout $x \in G$ satisfait à la condition (ii). En effet, soit E l'ensemble des $y \in G$ qui sont d'accord avec $A+B$. D'après le théorème II, $m(E)=1$. D'après le lemme 1, $m(T^{-1}E)=1$, c'est-à-dire, pour presque tout $x \in G$, on a $x+x \in E$.

De plus $m(A)>0$, donc il existe un x_0 qui satisfait à toutes les conditions.

Soit A^* l'ensemble des entiers non-négatifs n, tel que $x_0+ng \in A$. Donc, $O \in A^*$, et $d(A^*)=m(A)$. (Voir théorème III pour la définition de $d(A^*)$.)

Soit B^* le même ensemble pour B. Donc, $d(B^*)=m(B)$. En outre, il existe un n_0 d'après la condition (i) tel que $x_0+ng \in B_g$. Alors, $n_0, n_0+1, \ldots, n_0+k \in B^*$, c'est-à-dire B^* contient k entiers consécutifs.

Soit $(A+B)^*$ l'ensemble des entiers non-négatifs n, tel que $(x_0+x_0)+ +ng \subset A+B$. Donc, $d[(A+B)^*]=m(A+B)$. De plus, $A^*+B^*\subset(A+B)^*$. En appliquant le théorème III on a

$$m(A+B)=d[(A+B)^*]\geqslant d(A^*+B^*)\geqslant d(A^*)+\left(\frac{k}{k+1}\right)d(B^*)$$
$$=m(A)+\left(\frac{k}{k+1}\right)m(B).$$

Mais k étant arbitraire, $m(A+B)\geqslant m(A)+m(B)$, c. q. f. d.

Remarquons que le théorème peut être faux sans l'hypothèse que G soit connexe. En effet, soit $G=\{0,1\}$ un groupe de deux éléments, chacun de mesure 1/2. Soit $A=B=\{O\}$. Alors, $A+B=\{O\}$.

THÉORÈME 2. *Soit G un groupe topologique compact quelconque. Soient $A,B\subset G$ mesurables avec $m(A)+m(B)>1$. Alors on a $A+B=G$.*

En effet, soit $x\in G$. Alors, $m(x-A)=m(A)$, donc $(x-A)\cap B\neq\varphi$ (l'ensemble vide), ce qui implique que $x\in A+B$, c. q. f. d.

Travaux cités

[1] B. Eckmann, *Über monothetische Gruppen*, Com. Math. Helv. 16 (1943), p. 249-263.

[2] P. R. Halmos and H. Sammelson, *On monothetic groups*, Proc. Nat. Acad. Sc. 28 (1942), p. 254-258.

[3] A. M. Macbeath, *On measure of sum sets II*, Proc. Cambr. Philos. Soc. 49 (1953), p. 40-43.

[4] H. Ostmann, *Verfeinerte Lösung der asymptotischen Dichtenaufgabe*, Journ. Reine u. Ang. Math. 87 (1950), p. 183-188.

[5] Д. А. Райков, *О сложении множеств в смысле Шнирельмана*, Мат. Сборн. 5 (1939), p. 425-438.

Reçu par la Rédaction le 31. 3. 1954

A property of plane homeomorphisms

by

H. G. Eggleston (Cambridge)

In a real Euclidean plane E let (x,y) denote the Cartesian coordinates of a point p, and let Θ denote the set of all homeomorphisms of E onto itself which are of the form

$$(x,y)\to(x',y')$$

where

$$x'=x,\qquad y'=\Phi(x,y)\qquad\text{or}\qquad x'=\Phi(x,y),\qquad y'=y.$$

It is supposed that either the first alternative holds for every point (x,y) of E or the second alternative holds for every point of E. Denote by Ξ the group formed by all finite superpositions of any of the transformations of Θ. S. Ulam [1]) has raised the question as to whether it is possible to approximate to any arbitrary homeomorphism of the plane onto itself by members of Ξ.

The solution of the problem depends upon the meaning to be assigned to the word "approximate". In § 1 of this paper it is shown that if the approximation is to be uniform then the answer is in the negative, that is to say, if for any two homeomorphisms $\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2$ of the plane E we write

$$\delta(\mathfrak{H}_1,\mathfrak{H}_2)=\underset{p\in E}{\text{up. bd.}}\ \varrho\big(\mathfrak{H}_1(p),H_2(p)\big),$$

where ϱ denotes the Euclidean distance, then a homeomorphism $\mathfrak{G}$ can be constructed such that for any member $\mathfrak{H}$ of Ξ, $\delta(\mathfrak{H},\mathfrak{G})>1$.

The example that is constructed here, depends essentially upon the fact that the plane is not compact. If we restrict ourselves to compact subsets the situation is different. In §§ 2 and 3 we prove that if S is a closed square with its sides parallel to the coordinate axes and if Θ' is the subclass of the members of Θ which leave each frontier point of S fixed and it Ξ' is the group generated by finite superpositions of mem-

[1]) S. Ulam, *Problème 60*, Fundamenta Mathematicae 24 (1935), p. 324.