We shall call the system $\mathfrak{X}$ in E_3 *ω-complete* if whenever all sentences of the form $\alpha(g_t)$, $t \in T$, $\alpha \in \mathcal{E}_3$ belong to $\mathfrak{X}$, then also the sentence $\prod_{x_s} \alpha(x_s)$, where x_s does not occur in $\alpha(g_t)$, belongs to $\mathfrak{X}$.

THEOREM. *If an ω-complete system containing $\mathcal{A} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}(\mathfrak{M})$ exists in $\mathcal{E}_3$, then there exists a weak extension of model $\mathfrak{M}$ with the conditions $\mathcal{A}$ and $\mathcal{C}$.*

The inverse theorem is valid too.

Finally let us observe that the theorems and constructions contained in this paper, and particularly the method applied, are not entirely the author's own. The method was introduced first by Malcev [6] and Robinson [8], [9]; some theorems, very similar to those included here, were recently published by Henkin [2].

References

[1] L. Henkin, *The completeness of the first-order functional calculus*, Journal of Symbolic Logic 14 (1949), p. 159-166.

[2] — *Some interconnections between modern algebra and mathematical logic*, Transactions of the Amer. Math. Soc. 74 (1953), p. 410-427.

[3] D. Hilbert and P. Bernays, *Grundlagen der Mathematik*, vol. 1, Berlin 1934.

[4] J. Łoś, *The algebraic treatment of the methodology of elementary deductive systems*, Studia Logica 2 (1955), p. 151-211.

[5] — *On the existence of linear order in a group*, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Cl. III, Vol. II, No 1 (1954), p. 21-23.

[6] A. Malcev, *Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik*, Мат. сборн. 1 (1936), p. 323-335.

[7] А. Мальцев, *О включении ассоциативных систем в группы, I*, Мат. сборн. 6 (1939), p. 331-336; *II*, Мат. сборн. 8 (1940), p. 251-263.

[8] A. Robinson, *On axiomatic systems which possess finite models*, Methodos 3 (1951), p. 140-149.

[9] — *On the metamathematics of algebra*, Amsterdam 1951.

[10] A. Tarski, *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deductiven Wissenschaften*, Monatshefte für Math. u. Phys. 37 (1930), p. 349-360.

[11] — *Some notions and methods on the bordeline of algebra and metamathematics*, Proc. of the Intern. Congr. of Math. Cambridge, USA, Providence 1952, vol. I, p. 705-720.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 1. 2. 1954

Added during proof. Recently a paper by B. H. Neuman has been published (*An embedding theorem for algebraic systems*, Proceedings of the London Mathematical Society 3 (4) (1954), p. 138-153) containing theorems very similar to those given here.

О сепарабельности топологических групп

А. Гётц (Вроцлав)

Вполне аддитивная мера $\mu(X)$, определённая на некотором теле $\boldsymbol{X}$ подмножеств множества X, называется *сепарабельной*, если существует такой счётный класс $\boldsymbol{M}$ измеримых множеств, что для всякого множества $X \in \boldsymbol{X}$ конечной меры и всякого действительного числа $\varepsilon > 0$ найдётся в $\boldsymbol{M}$ множество M, удовлетворяющее условию $\mu(X \dot{-} M) < \varepsilon$. $X \dot{-} M$ обозначает симметрическую разность множеств X и M, т. е. $(X-M) \cup (M-X)$.

ТЕОРЕМА. *Для того, чтобы локально-компактная топологическая группа G была сепарабельной, необходимо и достаточно, чтобы её мера Хаара была сепарабельной.*

Необходимость условия очевидна, так как всякая борелевская регулярная мера в сепарабельном пространстве сепарабельна (в качестве счётного класса $\boldsymbol{M}$ можно принять класс сумм конечного числа множеств из базы открытых множеств пространства).

Для доказательства достаточности воспользуемся следующими леммами.

ЛЕММА 1. *Если мера Хаара локально-компактной группы G сепарабельна, то группа G удовлетворяет первой аксиоме счётности и следовательно метризуема.*

Доказательство. Как известно из теоремы Вейля [3] (см. также [1]), система множеств $\underset{x}{E}\{\mu(xE \dot{-} E) < \varepsilon\}$, где μ — мера Хаара, $x \in G$, а ε — число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \varepsilon < 2\mu(E)$, образует полную систему окрестностей единицы группы. Легко заметить, что можно получить полную систему окрестностей единицы, ограничиваясь числами ε вида $1/n$, где n натуральное число, а если мера сепарабельна, можно сверх того ограничиться множествами E из счётного класса $\boldsymbol{M}$. Таким образом получается счётная полная система окрестностей единицы и группа удовлетворяет первой аксиоме счётности. Метризуемость группы следует отсюда по теореме Какутани [2].

ЛЕММА 2. *Пусть X метрическое, локально-компактное пространство, μ — борелевская мера, положительная для открытых множеств, конечная для компактных, регулярная и такая, что открытые множества конечной меры можно приближать по мере компактными. Тогда, если мера μ сепарабельна, то пространство X сепарабельно.*

Мера Хаара топологической группы обладает всеми свойствами, перечисленными в предположениях леммы, а так как по лемме 1 группа с сепарабельной мерой Хаара метризуема, следует отсюда непосредственно наша теорема. Остаётся только доказать лемму 2.

Доказательство. Из условий, которым удовлетворяет мера, следует, что счётный класс $\boldsymbol{M}$ может состоять из компактных множеств. Каждое множество M из класса $\boldsymbol{M}$ разобьём на конечное число измеримых множеств, имеющих диаметр меньше $1/n$. Это разбиение возможно, так как компактное множество M можно покрыть конечным числом произвольно малых окрестностей.

Обозначим через $\boldsymbol{M}_n$ класс множеств, полученных путём такого разбиения всех множеств класса $\boldsymbol{M}$. Класс $\boldsymbol{M}_n$ тоже счётен. Возьмём теперь для всякого множества M из класса $\boldsymbol{M}_{3n}$ его $1/3n$-оболочку

$$K\left(M,\frac{1}{3n}\right)=\underset{p}{E}\left\{\varrho(p,M)>\frac{1}{3n}\right\}.$$

Эта оболочка является открытым множеством и имеет диаметр не больше $1/n$. Счётный класс таких оболочек для всех множеств класса $\boldsymbol{M}_{3n}$ обозначим через $\boldsymbol{B}_n$. Класс $\boldsymbol{B}=\bigcup\limits_n \boldsymbol{B}_n$ является счётной базой открытых множеств пространства X. Действительно, пусть p — произвольная точка пространства, а ε — произвольное положительное число; покажем, что в $\boldsymbol{B}$ существует множество содержащее точку p и имеющее диаметр меньше ε. Возьмём для $n>1/\varepsilon$ шар $K=K(p,1/3n)$ с центром в точке p и радиусом $1/3n$. Выбрав достаточно большое n, можно, благодаря локальной компактности пространства, добиться того, чтобы шар K имел конечную положительную меру; пусть эта мера $\mu(K)=\alpha$. В классе $\boldsymbol{M}$ имеется множество M такое, что $\mu(K\dot{-}M)<\alpha$ и, следовательно, множества K и M имеют общую точку. Но тогда и в классе $\boldsymbol{M}_{3n}$ имеется множество N, имеющее общую точку с K. Дальше, $1/3n$-оболочка этого множества N принадлежит классу $\boldsymbol{B}_n$, а следовательно также и классу $\boldsymbol{B}$, имеет диаметр меньше $1/n<\varepsilon$ и содержит точку p. Таким образом мы показали, что действительно $\boldsymbol{B}$ является счётной базой пространства, чем и завершили доказательство леммы 2.

Цитированная литература

[1] P. R. Halmos, *Measure Theory*, New York 1950, ch. XII.

[2] S. Kakutani, *Über die Metrisation der topologischen Gruppen*, Proc. Imp. Ac. Jap. 12 (1936), S. 82-84.

[3] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Paris 1940.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Reçu par la Rédaction le 24. 2. 1954

Sur la mesure d'une somme vectorielle *)

par

A. Shields (New Orleans)

Le but de cette note est de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit G un groupe topologique compact, connexe, abélien, et satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité. Soit m la mesure de Haar, avec $m(G)=1$. Soient $A,B\subset G$ mesurables, non-vides, tels que $m(A)+m(B)\leqslant 1$. Alors*

$$m_i(A+B)\geqslant m(A)+m(B),$$

où m_i est la mesure intérieure, $m_i(E)=\sup m(F)$ sur tous les ensembles fermés $F\subset E$, et $A+B$ est l'ensemble des $a+b$, $a\in A$, $b\in B$ (la somme vectorielle de A et B).

Pour les nombres réels mod 1 ce résultat est dû à M. Raikov [5]. M. Macbeath [3] a prouvé le théorème si $G=T^n$ (n-fois produit cartésien des nombres réels mod 1).

Nous aurons besoin des résultats suivants:

LEMME 1. *Soit G un groupe compact, connexe, abélien. Soit T la transformation définie par: $T(g)=g+g$. Alors, $m(T^{-1}A)=m(A)$ pour tout ensemble borelien.*

Démonstration [1]). Nous avons

$$T(G)=G. \tag{1}$$

En effet, dans le cas contraire, il existe un caractère non-trivial φ du groupe connexe $G/T(G)$. Alors, $\varphi\big(G/T(G)\big)$ est un sous-groupe compact, connexe, non-trivial de R_1 (les nombres complexes de norme 1); c'est-à-dire $\varphi\big(G/T(G)\big)=R_1$. Mais ce n'est pas possible puisque chaque élément de $G/T(G)$ est d'ordre deux.

Il suffit alors de démontrer le résultat suivant: soit q un homomorphisme continu de G en G tel que $q(G)=G$. Alors on a

$$m(q^{-1}E)=m(E) \tag{2}$$

pour tout ensemble borelien E.

---

*) Présenté au American Mathematical Society le 29 novembre 1952 et 30 décembre 1953.

[1]) Dû à MM. Ryll-Nardzewski et A. D. Wallace.