Tout ensemble fondamental E de nombres irrationnels est, comme nous l'avons vu, indénombrable. Le nombre cardinal $\overline{\overline{E}}$ jouit de la propriété (iii). L'ensemble E appartient donc à la classe (K). D'après la définition même (Definition I), il satisfait à la condition du Lemme V. Par conséquent, on peut énoncer le suivant

THÉORÈME V. *Tout ensemble de nombres irrationnels E, fondamental par rapport à la relation $\prec$, est concentré au sens large autour de l'ensemble R_E.*

L'existence de tels ensembles est donc, elle aussi, une conséquence du Théorème I.

Travaux cités

[1] A. S. Besicovitch, *Concentrated and rariefied sets of points*, Acta Math. 62 (1934), p. 289-300.

[2] J. Popruženko, *Sur le phénomène de convergence de M. Sierpiński*, Fund. Math. 41 (1954), p. 29-37.

[3] F. Rothberger, *Eine Äquivalenz zwischen der Kontinuumhypothese und der Existenz der Lusinschen und Sierpińskischen Mengen*, Fund. Math. 30 (1938), p. 215-216.

[4] — *Une remarque concernant l'hypothèse du continu*, Fund. Math. 31 (1938), p. 224-226.

[5] — *Sur un ensemble toujours de première catégorie qui est dépourvu de la propriété λ*, Fund. Math. 32 (1939), p. 294-300.

[6] W. Sierpiński, *Remarque sur le théorème de M. Egoroff*, Compt. Rend. Soc. Sc. et Lett. de Varsovie, Classe III, 20 (1928), p. 84-87.

[7] — *Hypothèse du Continu*, Warszawa-Lwów 1934.

[8] — *Sur les ensembles concentrés*, Fund. Math. 32 (1939), p. 301-305.

[9] — *Sur un ensemble à propriété λ*, Fund. Math. 32 (1939), p. 306-310.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 20.10.1954

Une propriété des ensembles $\{f'(x)>a\}$

par

J. S. Lipiński (Łódź)

M. Zahorski, dans son travail [2] appelle un ensemble linéaire E *ensemble de classe M_3*, s'il a la propriété suivante: E est vide, ou bien E est du type F_σ et de plus, pour tout $x \epsilon E$ et tout nombre $c>0$, il existe un nombre $\varepsilon(x,c)>0$ tel que, pour tout couple de nombres h, h_1, les conditions

$$hh_1>0, \qquad h/h_1<c, \qquad |h+h_1|<\varepsilon(x,c)$$

impliquent respectivement

$$|E\cdot(x+h, x+h+h_1)|>0 \qquad \text{ou} \qquad |E\cdot(x-h-h_1, x-h)|>0,$$

suivant que $h>0$ ou $h<0$. Il démontre ensuite que si $\varphi'(x)$ est une dérivée finie, l'ensemble $\{\varphi'(x)>a\}$ est de classe M_3. Il introduit également une classe d'ensembles plus vaste qu'il nomme M_2. À celle-ci appartiennent l'ensemble vide et tout ensemble du type F_σ tel que dans tout voisinage unilatéral d'un point quelconque de l'ensemble se trouve une partie de celui-ci de mesure positive. Il démontre que les ensembles $\{\psi'(x)>a\}$, où $\psi'(x)$ est une dérivée non nécessairement finie d'une fonction continue, sont toujours de classe M_2. En outre, il pose les questions suivantes: Existe-t-il, pour tout ensemble E de classe M_3, une fonction différentiable $F(x)$ telle que $E=\{F'(x)>0\}$? Existe-t-il une fonction $g(x)$ continue, admettant partout une dérivée, telle que $E=\{g'(x)>0\}$ si E n'appartient qu'à la classe M_2?

La réponse à ces deux questions est négative même si l'on n'exige pas la continuité de la fonction $g(x)$. Les ensembles $\{f'(x)>a\}$ doivent, en effet, satisfaire à une certaine condition supplémentaire non nécessaire pour les ensembles de classe M_3, et d'autant plus pour ceux de classe M_2.

Avant d'énoncer cette condition j'introduirai certaines notations.

Soit E un ensemble linéaire (c'est-à-dire des points de droite). Le point x *a la propriété* W_E s'il appartient à E et si, en outre, pour tout nombre $\eta>0$, on trouve un nombre $c>0$ tel que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un segment fermé I pour lequel

$$\operatorname{dist}(x,I)+|I|<\varepsilon, \qquad \operatorname{dist}(x,I)/|I|<c, \qquad |E\cdot I|/|I|<\eta.$$

Pour l'ensemble E le symbole A_E désigne l'ensemble de tous les points ayant la propriété W_E.

(1) *Le point de densité de l'ensemble E ne peut pas avoir la propriété* W_E.

(2) *Si x a la propriété W_E et appartient à (a,b), il a la propriété* $W_{(a,b)\cdot E}$.

M. Zahorski appelle certains ensembles linéaires, ensembles du type M_4. Il résulte directement de la définition de cette classe d'ensembles que

(3) *Si E est du type M_4, alors A_E est vide.*

Dans son travail M. Zahorski démontre le théorème suivant:

(4) *Si $f'(x)$ est une dérivée bornée et l'ensemble G est ouvert, l'ensemble $G\cdot\{f'(x)>a\}$ est toujours de classe M_4.*

Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si la fonction $f(x)$ admet partout une dérivée et $E=\{f'(x)>a\}$, l'ensemble A_E est non-dense.*

Démonstration. Si $a=\infty$, l'ensémble E est vide, de même que A_E, donc A_E est non-dense. Si $a=-\infty$, l'ensemble $CE=\{f'(x)=-\infty\}$ est de mesure nulle (voir S. Saks [1], Chap. IX, Théorème 4.4). L'ensemble E se compose alors uniquement de ses points de densité et, en vertu de (1), A_E est aussi vide. Reste le cas où $-\infty<a<+\infty$.

Désignons par $\omega(x_0)$ l'oscillation de la dérivée $f'(x)$ au point x_0, c'est-à-dire le nombre:

$$\max[f'(x_0), \overline{\lim_{x\to x_0}} f'(x)] - \min[f'(x_0), \underline{\lim_{x\to x_0}} f'(x)].$$

Au cas où cette formule donne une expression indéfinie, ce qui peut arriver lorsque $\underline{\lim}_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)=+\infty$ ou lorsque $\overline{\lim}_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)=-\infty$, on admet que $\omega(x_0)=0$. L'ensemble des points de discontinuité de la dérivée, c'est-à-dire l'ensemble des points pour lesquels $\omega(x)>0$, sera désigné par N. L'ensemble des points pour lesquels $\omega(x)=\infty$ sera désigné par N_∞.

Chaque dérivée (même d'une fonction discontinue) est une fonction de I-e classe de Baire (voir Z. Zahorski [2], corollaire du lemme 8, p. 15), donc N est un ensemble de I-e catégorie. Puisque $N_\infty \subset N$, alors

(5) *N_∞ est un ensemble de I-e catégorie.*

L'ensemble $\overline{N}_\infty - N_\infty$ ne peut contenir de points $\overline{x}$ pour lesquels $|f'(\overline{x})|<\infty$, car cette inégalité et la propriété que $\overline{x}$ est un point d'accumulation de l'ensemble N_∞ donnent $\omega(\overline{x})=\infty$, donc $\overline{x}\in N_\infty$. De là $(\overline{N}_\infty - N_\infty)\subset\{f'(x)=\pm\infty\}$ et

(6) $$(\overline{N}_\infty - N_\infty) = (\overline{N}_\infty - N_\infty)\cdot\{f'(x)=\pm\infty\}.$$

Comme $f'(x)=\pm\infty$ implique soit $\omega(x)=0$, soit $\omega(x)=\infty$, et comme ce dernier cas ne peut avoir lieu pour un ensemble disjoint avec N_∞, l'ensemble $\overline{N}_\infty - N_\infty$ se compose uniquement des points de continuité de la dérivée dans lesquels ou bien $f'(x)=+\infty$, ou bien $f'(x)=-\infty$. Il résulte de cette continuité que

$$(\overline{N}_\infty - N_\infty)\cdot\{f'(x)=+\infty\}\subset \operatorname{Int} E,$$

$$(\overline{N}_\infty - N_\infty)\cdot\{f'(x)=-\infty)\subset \operatorname{Int}\{f'(x)<a-1\}\subset \operatorname{Int}\{f'(x)\leqslant a\}=\operatorname{Int} CE.$$

Ces relations et l'egalité (6) donnent

$$\overline{N}_\infty - N_\infty \subset \operatorname{Int} E + \operatorname{Int} CE = C\operatorname{Fr} E,$$

d'où

(7) $$(\overline{N}_\infty - N_\infty)\cdot \operatorname{Fr} E = 0.$$

Posons $B=\overline{N}_\infty\cdot\operatorname{Fr} E$.

(8) *B est un ensemble fermé.*

$B=\big(N_\infty+(\overline{N}_\infty - N_\infty)\big)\cdot\operatorname{Fr} E = N_\infty\cdot\operatorname{Fr} E + (\overline{N}_\infty - N_\infty)\cdot\operatorname{Fr} E$, ce qui donne, avec (7), $B=N_\infty\cdot\operatorname{Fr} E$. De cette dernière égalité et de (5) il résulte que B est un ensemble de I-e catégorie. En tenant compte encore de (8), on a que

(9) *B est un ensemble non-dense.*

Il suit de la définition de l'ensemble A_E que

(10) $$A_E\subset \operatorname{Fr} E.$$

Soit maintenant x_0 un point de A_E. On distingue deux cas. Premièrement lorsque $f'(x_0)=\infty$. Alors x_0 ne peut pas être un point de continuité de la dérivée, car avec un certain voisinage il serait contenu dans E contrairement à (10). Ainsi donc $\omega(x_0)>0$. Mais si $\omega(x_0)>0$ et $f'(x_0)=\infty$, on ne peut avoir que $\omega(x_0)=\infty$. Dans ce cas $x_0\in N_\infty$.

Dans le second cas, $a<f'(x_0)<\infty$. Ici également $x_0\in N_\infty$. En effet, si on supposait le contraire, c'est-à-dire que $\omega(x_0)=c<\infty$, il existerait un voisinage $(x_0-\alpha, x_0+\alpha)$ dans les points duquel on aurait $f'(x_0)-c-1<f'(x)<f'(x_0)+c+1$. On choisirait alors deux nombres β et γ tels que $x_0-\alpha<\beta<x_0<\gamma<x_0+\alpha$, et on formerait la fonction

$$f^*(x)=\begin{cases} f'(x) & \text{pour } \beta\leqslant x\leqslant\gamma, \\ f'(\beta) & \text{pour } x<\beta, \\ f'(\gamma) & \text{pour } x>\gamma. \end{cases}$$

Cette fonction serait une dérivée bornée, donc l'ensemble $H=(\beta,\gamma)\cdot\{f^*(x)>a\}$ serait de classe M_4 en vertu de (4). De là et de (3) il résulterait que

(11) *A_H est vide*

Le point x_0 appartiendrait au segment (β,γ), et comme il a en outre la propriété W_E, il aurait, en vertu de (2), la propriété $W_{(\beta,\gamma)\cdot E}$. L'ensemble $A_{(\beta,\gamma)\cdot E}$ serait alors non vide, ce qui est contraire à (11) en raison de l'égalité $(\beta,\gamma)\cdot E=H$. Les deux cas réunis montrent que $A_E\subset N_\infty$, ce qui donne, avec (10), que $A_E\subset N_\infty\cdot \mathrm{Fr}\, E=B$. Il résulte de cette dernière relation et de (9) que A_E est non-dense, c. q. f. d.

Puisque les points de l'ensemble E, pour lesquels la densité inférieure de E est nulle, constituent un sous-ensemble de A_E, on a le corollaire suivant:

COROLLAIRE. *Si la fonction $f(x)$ admet partout une dérivée, alors chaque sous-ensemble de l'ensemble $E=\{f'(x)>a\}$, composé des points pour lesquels la densité inférieure de E est égale à zéro, est non-dense.*

Voici à présent un exemple d'ensemble E de classe M_3 ne satisfaisant pas à la condition nécessaire, mentionnée dans le corollaire, pour l'ensemble $\{f'(x)>a\}$. Soit E_1 un ensemble de I-e catégorie, du type F_σ, ayant avec chaque intervalle une partie commune de mesure positive mais moindre que la longueur de cet intervalle. Les ensembles avec de telles propriétés peuvent être obtenus en sommant une quantité dénombrable d'ensembles parfaits non-denses, de mesure positive. Le complémentaire de l'ensemble E_1 a une partie commune de mesure positive avec chaque intervalle. Désignons par E_2 l'ensemble des points appartenant à CE_1 et qui sont des points de densité de CE_1. Aux points de E_2 la densité de l'ensemble E_1 est nulle. En vertu du théorème de Lebesgue sur les points de densité d'un ensemble, on a $|CE_1-E_2|=0$, donc E_2 ainsi que CE_1 ont dans chaque intervalle une partie de mesure positive. L'ensemble E_2 est donc dense. Choisissons dans E_2 une partie dénombrable, dense, et désignons-la par E_3. L'ensemble $E=E_1+E_3$ est du type F_σ et a avec chaque intervalle une partie commune de mesure positive, puisque E_1 l'avait déjà. Pour chaque intervalle (a,b) on a $|E\cdot(a,b)|>0$. L'ensemble E est donc de classe M_3. Il renferme un ensemble dense de points dont la densité est nulle, notamment tout point de E_3 a cette propriété. Il résulte du théorème démontré (du corollaire) qu'il n'existe aucune fonction $f(x)$ admettant partout une dérivée, pour laquelle $E=\{f'(x)>a\}$.

Travaux cités

[1] S. Saks, *Theory of the integral*, Warszawa-Lwów 1937.

[2] Z. Zahorski, *Sur la première dérivée*. Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), p. 1-54.

UNIWERSYTET ŁÓDZKI
UNIVERSITÉ DE ŁÓDŹ

Reçu par la Rédaction le 25.10.1954

On the extending of models (II) *

Common extensions

by

J. Łoś (Toruń) and **R. Suszko** (Warszawa)

In this paper we are concerned with the problem of the existence of common extensions of models.

Let $X=Cn_1(X)$ be a self-consistent system in E_1 and $\{\mathfrak{M}_t\}_{t\in T}$, some family of models of X. Under which conditions does there exist a model $\mathfrak{M}$ of X such that each model $\mathfrak{M}_t$ $(t\in T)$ is a submodel of $\mathfrak{M}$?

The model $\mathfrak{M}$ will be called a *common $\mathfrak{A}$-extension* of the models $\mathfrak{M}_t$ $(t\in T)$, where $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(X)$ is the class of all models of the system X [1]).

It is known that common $\mathfrak{A}$-extensions of models do not always exist. If, for example, $\mathfrak{A}$ is the class of all Boole'an algebras, $\mathfrak{M}_1\in\mathfrak{A}$ is an arbitrary algebra with only one element, and $\mathfrak{M}_2\in\mathfrak{A}$ is an arbitrary algebra with two or more elements, then the common $\mathfrak{A}$-extension of $\mathfrak{M}_1$ and $\mathfrak{M}_2$ does not exist.

The solution of the problem mentioned above is given in the paragraph 2.

§ 1. The notion of the O-completeness of a system

An open disjunction $a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_n$ is said to have *alternating variables*, if each variable, which occurs in some a_i $(i=1,2,\ldots,n)$, does not occur in every a_j for $j=1,2,\ldots,n$ and $j\neq i$.

A self-consistent system $X=Cn_1(X)$ is called *O-complete*, if it follows from the belonging to X of a disjunction $\beta\vee\gamma$ with alternating variables that either β or γ belongs to X also.

* This paper presents the second part of the paper [3]. We adopt here the notions and notations used in [3].

[1]) Making use of the distinction between sets and classes, one can avoid any antinomial construction and formulate all our considerations in the framework of the axiomatic set theory [1].