(d) *There exists an ascending transfinite sequence of power equal to the smallest cardinal* $\aleph$ *higher than* $2^{\aleph_n}$, *of order-types of power* $\leqslant 2^{\aleph_n}$ *each.*

If (d) is not true, so that some C_β has power $\geqslant \aleph$, *i. e.* $> 2^{\aleph_n}$, then if we use this C_β instead of $2((\omega_n))$ in the foregoing, it is clear that members $\{C_\xi\}$ of the ascending sequence can be defined for all γ having power $\leqslant \aleph$, *i. e.*

(e) *There exists an ascending transfinite sequence of power equal to the smallest cardinal number* $\aleph'$ *higher than* $\aleph$, *(the smallest cardinal higher than* $2^{\aleph_n}$*) of order-types each having power* $\leqslant \aleph$.

These can be looked upon as the analogues of the result proved by Sierpiński [6], namely that there exists a descending sequence of power $2^{\aleph_0}$ of order-types having power $2^{\aleph_0}$ each.

I wish to thank Dr. M. Venketaraman for his help in preparing this note.

References

[1] F. Hausdorff, *Theorie der geordneten Mengen*, Math. Ann. 65 (1908), p. 433-505.

[2] J. Novák, *On partition of an ordered continuum*, Fund. Math. 39 (1952), p. 53-64.

[3] K. Padmavally, *Generalization of rational numbers*, Rev. Mat. Hisp. Amer. 12 (1952), p. 249-265.

[4] — *Generalization of the order-type of rational numbers*, Rev. Math. Hisp. Amer. 14 (1954), p. 1-24.

[5] W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles ordonnés*, Fund. Math. 36 (1949), p. 56-67.

[6] — *Sur les types d'ordre des ensembles linéaires*, Fund. Math. 37 (1950), p. 253-264.

[7] — *Sur les types ordinaux des ensembles linéaires*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 8 (1950), p. 427-428.

RAMANUJAN INSTITUTE OF MATHEMATICS, MADRAS

Reçu par la Rédaction le 16.10.1954

Sur certains ensembles indénombrables singuliers de nombres irrationnels

par

J. Popruženko (Łódź)

Dans ce Mémoire, je m'occupe de certains phénomènes mathématiques qui ont été découverts et étudiés par d'autres auteurs à l'aide de l'hypothèse du continu. On trouve ces questions dans les sections 2 et 3 du présent travail.

Les raisonnements qui vont suivre et dont le but principal est d'éliminer les prémisses hypothétiques des démonstrations de l'existence de ces phénomènes reposent sur la notion d'ordre de croissance des suites infinies d'entiers positifs, donc — au fond — sur les propriétés des relations d'ordre partiel. Nous commençons par établir un théorème général à ce sujet.

1. Ensembles fondamentaux. Soit $\mathcal{M}$ un espace abstrait indénombrable quelconque. Soit ϱ une relation dont le champ d'existence est un certain ensemble de couples formés d'éléments de $\mathcal{M}$. Il est supposé que ϱ établit dans $\mathcal{M}$ un ordre partiel. Une telle relation est donc par hypothèse

1° *non-réflexive*

et

2° *transitive.*

Ces deux conditions supposées remplies, nous pouvons préciser certaines notions, dont nous nous servirons constamment dans la suite.

Un ensemble N sera dit *borné selon la relation* ϱ lorsqu'il existe un élément q de $\mathcal{M}$ tel que $p\varrho q$ quel que soit $p \in N$.

Une suite transfinie $\{p_\xi\}_{\xi<\delta}$ formée de certains éléments de $\mathcal{M}$ sera dite *bien ordonnée selon la relation* ϱ *en type d'ordre* δ lorsque l'inégalité $\xi < \xi' < \delta$ entraîne toujours $p_\xi \varrho p_{\xi'}$.

Elle sera dite *saturée selon la relation* ϱ si, en outre, l'ensemble de ses termes n'est pas borné selon la même relation.

Nous supposons que la relation ϱ est assujettie à une condition supplémentaire, essentielle pour nos raisonnements.

Voici cette condition:

3° *Quelle que soit la suite* $p_0, p_1, p_2, \ldots$ *d'éléments de* $\mathcal{M}$, *finie ou dénombrable, bien ordonnée selon* ϱ *en type d'ordre* $\delta, \delta \leqslant \omega_0$, *il existe un élément* q *de* $\mathcal{M}$ *tel que* $p_n \varrho q$ *pour* $n < \delta$.

On peut exprimer cette propriété en disant qu'une telle suite n'est jamais saturée selon la relation ϱ.

Il importe de remarquer que la condition 3° peut être mise dans la forme équivalente suivante:

3* *Aucune suite transfinie d'éléments de* $\mathcal{M}$, *bien ordonnée par la relation* ϱ *en un type d'ordre dénombrable, n'est saturée selon cette relation.*

En effet, soit δ un nombre ordinal de la deuxième classe; soit $\{p_\xi\}_{\xi<\delta}$ la suite considérée.

Supposons δ de seconde espèce. Alors, il existe une suite infinie de nombres ordinaux croissants $\xi_0 < \xi_1 < \ldots$ telle que $\delta = \lim_{n\to\infty} \xi_n$ et $p_{\xi_n} \varrho p_{\xi_{n'}}$ pour $n < n'$. D'après la condition 3°, il existe un élément q de $\mathcal{M}$ tel que $p_{\xi_n} \varrho q$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$

Soit ξ un nombre ordinal quelconque $< \delta$. Pour une valeur de n suffisamment grande, on a $\xi < \xi_n$ et $p_\xi \varrho p_{\xi_n}$ d'où, d'après 2°, $p_\xi \varrho q$. L'élément q étant, d'après 1°, distinct de tous les p_ξ $(\xi < \delta)$, cela démontre notre assertion pour δ de seconde espèce.

Pour les nombres de première espèce, elle est une conséquence immédiate des conditions 1°-3°.

Posons maintenant la définition suivante, qui est fondamentale pour tous nos raisonnements.

Définition I. Nous dirons qu'un ensemble N est *fondamental par rapport à la relation* ϱ ou — tout court — *fondamental* lorsque les sous-ensembles de N de puissance $< \overline{\overline{N}}$ sont caractérisés par la propriété d'être borné selon la relation ϱ.

Nous allons démontrer le théorème d'existence suivant:

Théorème I. *Il existe dans l'espace* $\mathcal{M}$ *des ensembles indénombrables fondamentaux par rapport à la relation* ϱ.

Démonstration. Soit $\overline{\overline{\mathcal{M}}} = \aleph_\mu$, $\mu \geqslant 1$, et soit

$$\{a_\eta\}_{\eta<\omega_\mu} \tag{1}$$

une suite transfinie composée de tous les éléments de $\mathcal{M}$ et contenant chacun d'eux une seule fois. L'existence d'une telle suite résulte, comme on sait, de l'axiome de Zermelo.

Nous allons déterminer un ensemble fondamental par l'application de deux opérations successives.

Premier pas: nous attacherons à la suite (1) une suite extraite bien ordonnée et saturée selon la relation ϱ.

Le procédé de détermination d'une telle suite, dont nous nous servirons ici, est souvent employé dans certains cas particuliers (voir p. ex. Sierpiński [9], p. 306-307). Il est à montrer que les propriétés 1°-3° de la relation ϱ suffisent pour le réaliser dans notre cas général.

Posons $b_0 = a_0 = a_{\eta_0}$ $(\eta_0 = 0)$ et soit a_{η_1} le premier élément de la suite (1) tel que $b_0 \varrho a_{\eta_1}$. La suite composée d'un seul terme b_0 étant bien ordonnée selon la relation ϱ en type d'ordre 1, un tel élément existe en vertu de 3°. Posons $b_1 = a_{\eta_1}$.

On a donc $b_0 \varrho b_1$. D'après 1°, les éléments b_0 et b_1 sont distincts.

Soit ζ un nombre ordinal satisfaisant à l'inégalité $1 < \zeta < \omega_\mu$.

Supposons que l'on ait déjà défini les éléments $b_\gamma = a_{\eta_\gamma}$ pour tous les nombres $\gamma < \zeta$ de façon à satisfaire aux conditions $b_\gamma \varrho b_{\gamma'}$ et $\eta_\gamma < \eta_{\gamma'}$ pour $\gamma < \gamma' < \zeta$. Définissons b_ζ comme le premier élément a_{η_ζ} de la suite (1) tel que $b_\gamma \varrho a_{\eta_\zeta}$ pour tout $\gamma < \zeta$, si un tel élément existe. Or les indices η_ζ, qui sont des nombres ordinaux différents $< \omega_\mu$, vont en croissant avec ζ.

Il en résulte que, en raisonnant de cette manière, on atteint nécessairement un nombre θ, indénombrable d'après 3* et vérifiant l'inégalité $\theta \leqslant \omega_\mu$, tel que tous les éléments b_ζ soient définis pour $\zeta < \theta$, tandis que le terme d'ordre θ n'existe point. La suite

$$\{b_\zeta\}_{\zeta<\theta} \tag{2}$$

ainsi définie satisfait à toutes les conditions exigées. Au surplus, en raisonnant comme plus haut (propriété 3*, démonstration), on déduit aussitôt des conditions 1°-3° que θ est un nombre de seconde espèce non confinal avec ω_0.

Le premier pas de notre procédé opératoire est accompli.

Pour en faire le second, raisonnons comme il suit.

Le nombre de seconde espèce θ n'est pas confinal avec ω_0. Il est évidemment confinal avec lui-même. Par conséquent, il existe le premier nombre ordinal β, vérifiant l'inégalité $\omega_0 < \beta \leqslant \theta$, avec lequel θ soit confinal. D'après un théorème de l'Arithmétique des nombres ordinaux, β est le nombre initial d'une certaine classe, non postérieure à celle qui contient θ. On peut donc poser

$$\beta = \omega_\alpha, \quad \text{où} \quad 1 \leqslant \alpha \leqslant \mu.$$

Considérons le nombre ω_α.

En premier lieu, ce nombre est régulier [1]). En effet, la propriété d'être confinal étant transitive, l'hypothèse contraire entraînerait l'existence d'un nombre β', $\beta' < \beta$, avec lequel θ serait encore confinal, ce qui est impossible d'après la définition même du nombre β.

[1]) On dit qu'un nombre initial est *régulier* s'il n'est confinal avec aucun nombre ordinal inférieur.

En second lieu, on a pour ce nombre la formule

$$(3) \qquad \theta = \lim_{\xi < \omega_\alpha} \zeta_\xi ,$$

où

$$(4) \qquad \zeta_\xi < \zeta_{\xi'} \quad \text{pour} \quad \xi < \xi' < \omega_\alpha ,$$

ce qui n'exprime que la propriété du nombre θ d'être confinal avec ω_α.

Posons $\eta_{\zeta_\xi} = \tau_\xi$ et $b_{\zeta_\xi} = a_{\tau_\xi} = c_\xi$ pour $\xi < \omega_\alpha$. La suite transfinie

$$(5) \qquad \{c_\xi\}_{\xi < \omega_\alpha}$$

est bien ordonnée selon la relation ϱ en type d'ordre ω_α et saturée selon la même relation. Soit T l'ensemble de tous ses termes. Je dis que T est un ensemble fondamental.

En effet, soit U un sous-ensemble de T borné selon la relation ϱ. Il existe donc un élément c de $\mathcal{M}$ tel que $p \varrho c$ pour tout $p \in U$. La suite (5) étant saturée selon ϱ, la formule $c_\xi \varrho c$ ne peut être vraie pour tout $\xi < \omega_\alpha$. Soit c_{ξ_0} un terme de la suite (5) tel que c_{ξ_0} *non* ϱc. D'après 2°, cette dernière formule est vraie à plus forte raison pour tout terme c_ξ d'ordre plus élevé. Tous les éléments de U se trouvent donc parmi les termes de la suite $\{c_\xi\}_{\xi < \xi_0}$. Or, le nombre ω_α étant initial, il en résulte $\overline{\overline{U}} < \overline{\omega}_\alpha = \overline{\overline{T}}$.

Soit maintenant U_1 un sous-ensemble de T non borné selon la relation ϱ. Dans ce cas, il n'existe aucun élément c de $\mathcal{M}$ à propriété envisagée ci-dessus. En particulier, aucun élément c_ξ de la suite (5) ne jouit de cette propriété. En d'autres termes, il existe pour tout $\xi < \omega_\alpha$ un nombre ordinal ξ' satisfaisant à l'inégalité $\xi \leqslant \xi' < \omega_\alpha$ et tel que $c_{\xi'} \in U_1$. Désignons par $\varphi(\xi)$ le plus petit des nombres ξ'.

La fonction $\varphi(\xi)$ se trouve ainsi définie pour tout $\xi < \omega_\alpha$.

En vertu de sa définition, elle vérifie les inégalités

$$\xi \leqslant \varphi(\xi) < \omega_\alpha \qquad \text{et} \qquad \varphi(\xi) \leqslant \varphi(\eta) \quad \text{pour} \quad \xi < \eta$$

et satisfait à la condition

$$(6) \qquad c_{\varphi(\xi)} \in U_1 \quad (\xi < \omega_\alpha).$$

La première de ces inégalités donne:

$$(7) \qquad \lim_{\xi \to \omega_\alpha} \varphi(\xi) = \omega_\alpha .$$

D'après la deuxième rapprochée de (7), il existe un nombre de seconde espèce σ_0 et une suite d'indices croissants $\{\xi_\sigma\}_{\sigma < \sigma_0}$ satisfaisant aux conditions

$$(8) \qquad \sigma_0 \leqslant \omega_\alpha ,$$

$$(9) \qquad \varphi(\xi_\sigma) < \varphi(\xi_{\sigma'}) \quad \text{pour} \quad \sigma < \sigma' < \sigma_0$$

et

$$(10) \qquad \lim_{\sigma \to \sigma_0} \varphi(\xi_\sigma) = \omega_\alpha .$$

Or l'inégalité $\sigma_0 < \omega_\alpha$ dans la formule (8) est exclue en vertu des formules (9)-(10), le nombre ω_α étant régulier. On a donc $\sigma_0 = \omega_\alpha$, et la formule (6) montre que l'ensemble U_1 contient tous les éléments $c_{\varphi(\xi_\sigma)}$ pour $\sigma < \omega_\alpha$. Tous ces éléments étant distincts, on en conclut que $\overline{\overline{U}}_1 = \overline{\omega}_\alpha = \overline{\overline{T}}$.

La propriété d'être borné selon la relation ϱ est donc une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-ensemble de T soit de puissance $< \overline{\overline{T}}$. En d'autres termes, T est un ensemble fondamental.

Le Théorème I est démontré.

Ce résultat, interprété dans l'espace des nombres irrationnels de l'intervalle $[0,1]$, fournit une méthode de résolution des problèmes de l'existence qui se posent dans la suite.

Pour réaliser une telle interprétation, procédons de la manière suivante.

Désignons par $\mathcal{M}_0$ l'espace des suites infinies d'entiers positifs, métrisé d'une façon quelconque ou non.

$a = (a_1, a_2, \ldots)$ et $b = (b_1, b_2, \ldots)$ étant deux éléments de $\mathcal{M}_0$, écrivons $a \lesssim b$ lorsqu'il existe un indice $k = k_0$ tel que $a_k < b_k$ pour $k \geqslant k_0$. Il est bien évident alors que a *non* $\lesssim a$ et que les formules $a \lesssim b$ et $b \lesssim c$ entraînent $a \lesssim c$.

La relation $\lesssim$ est donc non-réflexive et transitive.

De plus, on sait que, étant donnée une famille dénombrable quelconque de suites infinies d'entiers positifs, il existe une suite fixe qui les majore toutes au sens de la relation $\lesssim$. En tenant compte de ce fait, on conclut que cette relation satisfait à plus forte raison à la condition 3°. Elle jouit donc des propriétés 1°-3° de la relation ϱ.

Interprétons maintenant l'espace $\mathcal{M}_0$ comme celui des nombres irrationnels de l'intervalle $[0,1]$. Soient x et y deux nombres de $\mathcal{M}_0$, soient

$$x = \frac{1|}{|a_1} + \frac{1|}{|a_2} + \ldots + \frac{1|}{|a_k} + \ldots \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1|}{|b_1} + \frac{1|}{|b_2} + \ldots + \frac{1|}{|b_k} + \ldots$$

leurs développements en fractions continues. Convenons d'écrire $x \lesssim y$ lorsque les suites $a = (a_1, a_2, \ldots)$ et $b = (b_1, b_2, \ldots)$ sont liées par la relation $a \lesssim b$ au sens déterminé ci-dessus, et dans ce cas seulement. On vérifie de suite que par cette convention se trouve définie, dans l'espace des nombres irrationnels de l'intervalle $[0,1]$, une relation ayant encore les propriétés 1°-3°.

En conséquence, toutes les notions précédemment introduites conservent leur sens pour la relation $\lesssim$, interprétée soit dans l'espace des suites d'entiers positifs, soit dans celui des nombres irrationnels correspondants. Le Théorème I lui devient applicable et garantit l'existence d'ensembles fondamentaux dans l'espace $\mathcal{M}_0$.

Formulons expressément ce résultat:

THÉORÈME Ia. 1. *Il existe des ensembles de nombres irrationnels de l'intervalle* $[0,1]$ *fondamentaux par rapport à la relation* $\prec$.

2. *Tous ces ensembles sont indénombrables.*

Il est à remarquer que le premier ensemble à cette propriété a été défini par M. Rothberger [2]).

A côté de ce Théorème, il faut surtout retenir de ce qui précède les 3 propriétés suivantes, dont nous aurons besoin au cours de nos raisonnements.

(i) *Tout ensemble dénombrable de nombres irrationnels de l'intervalle* $[0,1]$ *est borné selon la relation* $\prec$.

(ii) *La somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de nombres irrationnels bornés selon la rélation* $\prec$ *est encore un ensemble à même propriété.*

On vérifie cela par recours aux propriétés analogues des suites d'entiers positifs.

Les propriétés (i)-(ii) entraînent celle-ci:

(iii) *E étant un ensemble de nombres irrationnels fondamental par rapport à la relation* $\prec$, *le nombre cardinal* $\overline{\overline{E}}$ *ne se laisse pas représenter dans la forme de la somme d'une infinité dénombrable de nombres cardinaux inférieurs.*

En d'autres termes, si l'on pose $\overline{\overline{E}}=\aleph_a$, le nombre initial ω_a n'est pas confinal avec ω_0.

Avant d'aller plus loin, nous devons mettre en évidence encore une propriété des familles de suites infinies d'entiers positifs.

Appelons une telle famille Φ *complètement bornée* lorsqu'il existe une suite fixe $\{m_k\}$ d'entiers positifs telle que l'on ait $a_k<m_k$ $(k=1,2,\ldots)$ pour toute suite $\{a_k\}$ appartenant à Φ.

Démontrons que

(iv) *Chaque famille bornée selon la relation* $\prec$ *est somme au plus dénombrable de familles complètement bornées.*

En effet, une famille Φ étant bornée selon la relation $\prec$, soit $\{m_k\}$ une suite d'entiers positifs qui majore tous ses élements au sens de cette

[2]) Dans l'espace des suites, voir Rothberger [5], p. 295-296.

relation. Définissons pour tout élément $a=(a_1,a_2,\ldots)$ de Φ le nombre $k_0(a)$ comme le premier indice à partir duquel on a $a_k<m_k$ et posons

$$\Phi_j=\underset{a}{E}\{a\in\Phi, k_0(a)=j\} \qquad (j=1,2,\ldots).$$

Puis, $\lambda_{j-1}=(l_1,l_2,\ldots,l_{j-1})$ étant un système variable de $j-1$ entiers positifs arbitraires, désignons, pour $j\geqslant 2$, par $\Phi_{j\lambda_{j-1}}$ l'ensemble de toutes les suites de Φ_j de la forme

$$(l_1,l_2,\ldots,l_{j-1},a_j,a_{j+1},\ldots).$$

La formule

$$\Phi=\Phi_1+\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{\lambda_{j-1}}\Phi_{j\lambda_{j-1}},$$

où la sommation intérieure s'étend pour tout $j\geqslant 2$ sur tous les λ_{j-1}, fournit la décomposition demandée.

2. Sur une suite de polynômes entiers. Déterminons une suite de polynômes entiers à l'aide de la construction suivante.

Soit $g(x)$ la fonction définie dans l'intervalle $0\leqslant x\leqslant 1$ par les conditions

$$g(x)=\begin{cases}1/q & \text{pour } x=p/q\neq 0,\ (p,q)=1,\\ 1 & \text{pour } x=0,\\ 0 & \text{pour tout } x \text{ irrationnel.}\end{cases} \tag{11}$$

Cette fonction étant semi-continue supérieurement, soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions continues satisfaisant aux conditions

$$f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant\ldots \tag{12}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=g(x). \tag{13}$$

Soit $\{P_n(x)\}$ une suite de polynômes entiers tels que

$$|f_n(x)-P_n(x)|<1/n. \tag{14}$$

Les fonctions $f_n(x)$, donc aussi $P_n(x)$, peuvent être supposées bornées dans leur ensemble. Toutes ces fonctions se laissent définir effectivement à partir de la fonction $g(x)$.

D'après (13) et (14), on a

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=g(x). \tag{15}$$

Nous avons à rechercher le genre de convergence de la suite $\{P_n(x)\}$. A ce but, nous aurons besoin de certaines considérations préalables.

Une famille Φ de suites infinies d'entiers positifs étant donnée, désignons d'une manière générale par

$$(16) \qquad E = E_\Phi$$

l'ensemble de tous les nombres irrationnels de la forme

$$x = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots,$$

la suite variable $\{n_i\}$ parcourant tous les éléments de Φ.

Réciproquement, tout ensemble E de nombres irrationnels de l'intervalle $[0,1]$ définit d'une façon univoque une famille Φ satisfaisant à (16).

La correspondance entre les éléments de E et ceux de Φ est évidemment biunivoque.

Ces conventions faites, envisageons de plus près la propriété (iv) des familles Φ et les conséquences qu'elle entraîne pour les ensembles correspondants de nombres irrationnels.

Démontrons le suivant

Lemme I. *Pour qu'une famille Φ soit complètement bornée, il faut et il suffit que la fermeture $\bar{E}$ de l'ensemble $E = E_\Phi$ ne contienne aucun point rationnel.*

Démonstration. La suffisance de cette condition résulte immédiatement de la proposition suivante, due à M. Sierpiński (voir Rothberger [5], p. 297, Lemme 2, Démonstration):

F étant un ensemble linéaire fermé ne contenant aucun point rationnel, si l'on pose

$$\xi = \frac{1|}{|n_1^\xi} + \frac{1|}{|n_2^\xi} + \ldots$$

pour tout $\xi \in F$, on a la formule

$$\sup_{\xi \in F} \{n_i^\xi\} = m_i < \infty \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots$$

Supposons maintenant que la famille Φ soit complètement bornée et que la suite $\{m_i\}$ majore tous ses éléments à partir du premier terme. On a donc $n_i < m_i$ pour $i = 1, 2, \ldots$, quelle que soit la suite $\{n_i\}$ appartenant à Φ.

Pour établir la nécessité de la condition du Lemme, il suffit de démontrer que si les nombres x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ et x_0 vérifient les relations $x_k \in E$ et $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, alors x_0 est un nombre irrationnel.

Soit

$$x_k = \frac{1|}{|n_1^{(k)}} + \frac{1|}{|n_2^{(k)}} + \ldots \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Par un calcul élémentaire on vérifie que, dans ces conditions, on a nécessairement la formule

$$(17) \qquad 1 \leqslant \varliminf_{k\to\infty} n_i^{(k)} = \varlimsup_{k\to\infty} n_i^{(k)} = n_i^0 < m_i \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots$$

En effet, supposons le contraire. Il existe alors un indice $i = i_0$ tel que

$$(18) \qquad \varliminf_{k\to\infty} n_{i_0}^{(k)} < \varlimsup_{k\to\infty} n_{i_0}^{(k)} < m_{i_0},$$

tandis que $\lim\limits_{k\to\infty} n_i^{(k)} = n_i^0$ pour $i = 1, 2, \ldots, i_0 - 1$. Pour abréger l'écriture, posons

$$(r_0) = \frac{1|}{|n_1^0} + \frac{1|}{|n_2^0} + \ldots + \frac{1|}{|n_{i_0-1}^0}.$$

L'inégalité (18) entraîne, comme il est facile de voir, l'existence de deux suites infinies d'indices croissants, $\{p_s\}$ et $\{q_s\}$, et de deux suites $\{x_{p_s}\}$ et $\{x_{q_s}\}$ extraites de la suite $\{x_k\}$ telles que

$$x_{p_s} = (r_0) + \frac{1|}{|a_{i_0}} + \frac{1|}{|n_{i_0+1}^{p_s}} + \frac{1|}{|n_{i_0+2}^{p_s}} + \ldots,$$

$$x_{q_s} = (r_0) + \frac{1|}{|b_{i_0}} + \frac{1|}{|n_{i_0+1}^{q_s}} + \frac{1|}{|n_{i_0+2}^{q_s}} + \ldots,$$

où $a_{i_0} \neq b_{i_0}$, soit $a_{i_0} < b_{i_0}$. Distinguons maintenant deux cas.

1. Le nombre i_0 est impair.

Dans ce cas, les inégalités suivantes sont exactes.

D'abord, nous pouvons écrire:

$$(r_0) + \frac{1|}{|b_{i_0}} \leqslant (r_0) + \frac{1|}{|a_{i_0}+1} = (r_0) + \frac{1|}{|a_{i_0}} + \frac{1|}{|1} \leqslant (r_0) + \frac{1|}{|a_{i_0}} + \frac{1|}{|n_{i_0+1}^{p_s}} < x_{p_s},$$

ce qui donne:

$$(19) \qquad (r_0) + \frac{1|}{|b_{i_0}} < x_{p_s}.$$

D'autre part on a

$$(r_0) + \frac{1|}{|b_{i_0}+1} = (r_0) + \frac{1|}{|b_{i_0}} + \frac{1|}{|1} \leqslant (r_0) + \frac{1|}{|b_{i_0}} + \frac{1|}{|n_{i_0+1}^{q_s}} < x_{q_s}$$

$$< (r_0) + \frac{1|}{|b_{i_0}} + \frac{1|}{|n_{i_0+1}^{q_s}} + \frac{1|}{|n_{i_0+2}^{q_s}} \leqslant (r_0) + \frac{1|}{|b_{i_0}} + \frac{1|}{|n_{i_0+1}^{q_s}} + \frac{1|}{|1}$$

$$= (r_0) + \frac{1|}{|b_{i_0}} + \frac{1|}{|n_{i_0+1}^{q_s}+1} \leqslant (r_0) + \frac{1|}{|b_{i_0}} + \frac{1|}{|m_{i_0+1}} < (r_0) + \frac{1|}{|b_{i_0}}.$$

On a donc

$$(20)\qquad x_{q_s} < (r_0) + \frac{1|}{|b_{i_0}} + \frac{1|}{|m_{i_0+1}} < (r_0) + \frac{1|}{|b_{i_0}}.$$

Les inégalités (19)-(20) fournissent l'inégalité suivante:

$$(21)\qquad x_{q_s} < \frac{1|}{|n_1^0} + \ldots + \frac{1|}{|n_{i_0-1}^0} + \frac{1|}{|b_{i_0}} + \frac{1|}{|m_{i_0+1}} < \frac{1|}{|n_1^0} + \ldots + \frac{1|}{|n_{i_0-1}^0} + \frac{1|}{|b_{i_0}} < x_{p_s}.$$

2. Le nombre i_0 est pair.

Dans ce cas, un pareil calcul donne l'inégalité

$$(22)\qquad x_{p_s} < \frac{1|}{|n_1^0} + \ldots + \frac{1|}{|n_{i_0-1}^0} + \frac{1|}{|b_{i_0}} < \frac{1|}{|n_1^0} + \ldots + \frac{1|}{|n_{i_0-1}^0} + \frac{1|}{|b_{i_0}} + \frac{1|}{|m_{i_0+1}} < x_{q_s}.$$

Les inégalités (21)-(22) nous montrent que l'on a dans tous les deux cas $|x_{p_s} - x_{q_s}| > c > 0$ pour $s=1,2,\ldots$, ce qui est impossible puisque la suite $\{x_k\}$ est supposée convergente.

La formule (17) est ainsi démontrée. Il vient

$$x_0 = \frac{1|}{|n_1^0} + \frac{1|}{|n_2^0} + \ldots,$$

d'où il résulte que x_0 est un nombre irrationnel.

L'ensemble $\bar{E}$ ne se compose donc que de nombres irrationnels.

Le Lemme I est démontré.

On en déduit le suivant

LEMME II. *Pour qu'un ensemble E de nombres irrationnels de l'intervalle* $[0,1]$ *soit borné selon la relation $\prec$, il faut et il suffit qu'il existe une décomposition de la forme*

$$(23)\qquad E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k,$$

telle que les ensembles $\bar{E}_k$ $(k=1,2,\ldots)$ ne contiennent aucun point rationnel.

Démonstration. Supposons qu'un ensemble E soit borné selon la relation $\prec$. Dans ce cas, la famille Φ définie par la formule (16) se décompose, d'après la propriété (iv), en familles complètement bornées. Soit $\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k$ cette décomposition. Les ensembles $E_k = E_{\Phi_k}$ satisfont alors à la condition (23); d'après le Lemme I, leurs fermetures $\bar{E}_k$ $(k=1,2,\ldots)$ ne contiennent aucun point rationnel.

Réciproquement, la condition du Lemme II supposée remplie, les familles Φ_k déterminées par les égalités ci-dessus sont, en conséquence du Lemme I, complètement bornées. Leur somme Φ est donc bornée selon la relation $\prec$. En vertu de (16), il en est de même de l'ensemble E.

Le Lemme II est démontré.

Nous pouvons maintenant énoncer le suivant

THÉORÈME II. *Soit E un ensemble de nombres irrationnels fondamental par rapport à la relation $\prec$. Alors:*

(A) *Aucune suite $\{P_{n_l}(x)\}$, extraite de la suite $\{P_n(x)\}$, n'est uniformément convergente dans aucun sous-ensemble de E de puissance $\bar{\bar{E}}$.*

(B) *E_1 étant un sous-ensemble de E de puissance $<\bar{\bar{E}}$, il existe une suite $\{F_k\}$ d'ensembles fermés telle que*

1) $E_1 \subset \sum_{k=1}^{\infty} F_k$;

2) *la suite $\{P_n(x)\}$ converge uniformément dans chaque ensemble F_k* $(k=1,2,\ldots)$.

Démonstration. Soient $\{P_{n_l}(x)\}$ une suite extraite de $\{P_n(x)\}$, E_0 — un sous-ensemble de E de puissance $\bar{\bar{E}}$. Conformément à la Définition I, l'ensemble E_0 n'est pas borné selon la relation $\prec$.

Admettons que la suite $\{P_{n_l}(x)\}$ soit uniformément convergente dans E_0 et posons $E_0 = H + D$ où H est un ensemble dense en soi et D — dénombrable. La suite de polynômes $\{P_{n_l}(x)\}$ étant uniformément convergente dans H, elle l'est encore dans $\bar{H}$.

D'après (15), la fonction $g(x)$ est donc continue dans $\bar{H}$.

Or l'ensemble H étant dense en soi, $\bar{H}$ est parfait. Il s'en suit que l'ensemble $\bar{H}$ ne contient aucun point rationnel, car l'hypothèse contraire serait incompatible (vu les formules (11)) avec la propriété de la fonction $g(x)$ d'être continue sur $\bar{H}$. L'ensemble H satisfait donc à la condition du Lemme II, d'où il résulte qu'il est borné selon la relation $\prec$. En tenant compte des propriétés (i) et (ii), on conclut qu'il en est de même de l'ensemble E_0, en contradiction avec ce que nous avons constaté plus haut.

L'affirmation (A) est ainsi démontrée (comp. Sierpiński [8], p. 302).

Pour établir la propriété (B), remarquons d'abord que la suite $\{P_n(x)\}$ converge uniformément dans tout ensemble fermé, situé dans l'intervalle $[0,1]$ et ne contenant aucun point rationnel. En effet, F étant un tel ensemble, la fonction $g(x)$ est, d'après (11), continue (identiquement nulle) dans F. Il résulte alors des formules (12)-(13), en vertu d'un théorème de l'Analyse élémentaire, que la suite $\{f_n(x)\}$ est uniformément convergente dans F. D'après (14) et (15), il en est de même de la suite $\{P_n(x)\}$.

Soit maintenant E_1 un sous-ensemble de E de puissance $<\bar{\bar{E}}$.

L'ensemble E_1 étant borné selon la relation $\prec$, il existe une décomposition

$$E_1 = \sum_{k=1}^{\infty} E^k$$

exigée par le Lemme II. La suite $\{P_n(x)\}$ converge alors uniformément dans tout ensemble $\bar{E}_k$ $(k=1,2,\ldots)$ et l'on voit qu'il suffit de poser $F_k=\bar{E}_k$ pour démontrer l'affirmation (B).

Le Théorème II est ainsi démontré.

Quant au phénomène de convergence précisé par l'affirmation (A), il importe de remarquer ce qui suit.

L'existence d'une suite convergente de fonctions réelles qui converge non uniformément dans tout ensemble indénombrable fut découverte par M. Sierpiński en 1928 à l'aide de l'hypothèse du continu (Sierpiński [6], p. 84).

Dans son livre [7] on trouve (p. 46) ce résultat: *Si un ensemble linéaire indénombrable Q jouit de la propriété* (L) [3]*, il existe une suite infinie $f_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ de fonctions continues d'une variable réelle qui converge non uniformément vers* 0 *sur tout sous-ensemble indénombrable de Q.*

La démonstration de cette proposition est indépendante de l'hypothèse du continu et n'admet que celle de l'existence d'ensembles de puissance du continu pourvus de la propriété (L).

De plus, la singularité en question *subsiste pour toute suite extraite de la suite $\{f_n(x)\}$*. Ceci résulte immédiatement de la construction (loc. cit., p. 46-47), quoique n'a pas été formulé expressément.

Soit maintenant $\{g_n(x)\}$ une suite convergente de fonctions réelles quelconques, définies dans l'intervalle $[0,1]$.

Définition II. Nous dirons qu'un ensemble X de nombres irrationnels de l'intervalle $[0,1]$ est *ensemble des singularités de la suite $\{g_n(x)\}$* lorsqu'il satisfait aux deux conditions suivantes:

1. La suite $\{g_n(x)\}$ n'est σ-uniformément convergente [4] dans aucun sous-ensemble de X de puissance $\bar{\bar{X}}$.

2. Elle l'est dans tout sous-ensemble de X de puissance $<\bar{\bar{X}}$.

Nous avons vu que, d'après le Théorème II (confronté avec (iii)), tout ensemble fondamental est un ensemble des singularités de la suite $\{P_n(x)\}$. Nous allons démontrer maintenant que l'inclusion inverse est aussi vraie.

[3]) On dit qu'un ensemble linéaire indénombrable *Q jouit de la propriété* (L) lorsque tout ensemble parfait non-dense contient un ensemble au plus dénombrable de ses points.

[4]) Voici la définition de ce terme que j'ai introduite dans une Note antérieure ([2], p. 31):

Nous dirons qu'une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions réelles définies dans un ensemble M est *σ-uniformément convergente dans* M lorsqu'il existe une décomposition de M de la forme

$$M=\sum_{k=1}^{\infty} M_k,$$

telle que la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément dans chacun des ensembles M_k $(k=1,2,\ldots)$.

Soit X un ensemble des singularités de la suite $\{P_n(x)\}$.

Il est à démontrer qu'il satisfait à la condition posée dans la Définition I.

Soit X_0 un sous-ensemble de X de puissance $<\bar{\bar{X}}$. Je dis que l'ensemble X_0 est borné selon la relation $\lesssim$.

En effet, la suite $\{P_n(x)\}$ étant par hypothèse σ-uniformément convergente dans X_0, il existe une décomposition $X_0=\sum_{k=1}^{\infty} X_k$ telle que la suite $\{P_n(x)\}$ soit uniformément convergente dans chacun des ensembles X_k $(k=1,2,\ldots)$.

On peut évidemment supposer que l'ensemble X_0 est indénombrable. Dans ce cas, en supprimant un ensemble dénombrable D convenablement choisi, on obtient une nouvelle décomposition

$$X_0-D=(X_{k_1}-D)+(X_{k_2}-D)+\ldots$$

telle que les sommandes dans le second membre, présents en un nombre fini ou en une infinité dénombrable, soient tous indénombrables et denses en soi.

En raisonnant comme plus haut, on constate que les ensembles $\overline{X_{k_j}-D}$ $(j=1,2,\ldots)$ ne contiennent aucun point rationnel. On en conclut, d'après le Lemme II, que l'ensemble X_0-D est borné selon la relation $\lesssim$. Il en est donc de même de l'ensemble X_0.

Ainsi, la condition $\bar{\bar{X}}_0<\bar{\bar{X}}$ entraîne pour X_0 la propriété d'être borné selon la relation $\lesssim$.

Soit maintenant X_1 un sous-ensemble de X ayant ladite propriété. En applicant le Lemme II, on obtient une décomposition $X_1=\sum_{k=1}^{\infty} X^k$ telle que les ensembles $\bar{X}^k$ ne contiennent que des points irrationnels. Il en résulte, comme on l'a vu, que la suite $\{P_n(x)\}$ est uniformément convergente dans $\bar{X}^k$, donc — à plus forte raison — dans X^k $(k=1,2,\ldots)$. Elle est donc σ-uniformément convergente dans X_1, ce qui entraîne, en vertu de la définition même de l'ensemble X (voir Définition II, 1), l'inégalité $\bar{\bar{X}}_1<\bar{\bar{X}}$.

Il est démontré que tout ensemble des singularités de la suite $\{P_n(x)\}$ est fondamental.

On a ainsi obtenu ce résultat:

Théorème III. *La famille des ensembles des singularités de la suite $\{P_n(x)\}$ coïncide avec celle des ensembles de nombres irrationnels fondamentaux par rapport à la relation $\lesssim$.*

Notons une conséquence de ce théorème.

Désignons par (α) et (β) les deux propositions suivantes:

(α) *Il existe, dans l'intervalle* $[0,1]$, *un ensemble indénombrable à propriété* (L).

(β) *Tout ensemble fondamental de nombres irrationnels est de puissance du continu.*

Le Théorème III entraîne ce

COROLLAIRE. *Le couple de propositions* (α) *et* (β) *équivaut à l'hypothèse du continu* (cf. Rothberger [4], p. 225, et [3]).

Voici la marche du raisonnement.

La proposition (α) supposée vraie, il existe un ensemble N de puissance $\aleph_1$ se composant de nombres irrationnels de l'intervalle $[0,1]$ et pourvu de la propriété (L).

La suite $\{P_n(x)\}$ n'est uniformément convergente dans aucun sous-ensemble de N de puissance $\aleph_1$, car, chaque sous-ensemble indénombrable de N étant de deuxième catégorie, donc — à plus forte raison — dense dans un certain intervalle, l'hypothèse contraire entraînerait nécessairement la continuité de la fonction $g(x)$ dans ledit intervalle, en contradiction avec les formules (11) (cf. Sierpiński [7], p. 46-47).

$\aleph_1$ étant un nombre cardinal régulier, on en conclut que la suite $\{P_n(x)\}$ n'est même σ-uniformément convergente dans aucun sous-ensemble de N de puissance $\overline{\overline{N}}=\aleph_1$.

Or elle l'est — d'une façon triviale — dans tout sous-ensemble de N de puissance $<\overline{\overline{N}}$. N est alors un ensemble des singularités de la suite $\{P_n(x)\}$, donc, d'après le Théorème III, un ensemble fondamental. D'après (β) il vient $\aleph_1=2^{\aleph_0}$.

L'implication inverse est bien claire — d'après le résultat classique de N. Lusin et notre Théorème Ia.

3. Sur les ensembles concentrés. Nous appliquerons maintenant la méthode développée plus haut au problème de l'existence d'ensembles concentrés.

Soient E et D deux ensembles de nombres réels dont le premier est indénombrable et le second — dénombrable. Pour obtenir les notions entièrement claires, introduisons les définitions suivantes:

Définition III. Nous dirons que l'ensemble E est *concentré au sens strict autour de l'ensemble* D si, G désignant un ensemble ouvert variable, l'inclusion $D\subset G$ entraîne

$$\overline{\overline{E-G}}\leqslant\aleph_0.$$

Définition IV. Nous dirons que l'ensemble E est *concentré au sens large autour de l'ensemble* D si, dans les mêmes conditions, on a

$$\overline{\overline{E-G}}<\overline{\overline{E}}.$$

Si l'on admet que $\aleph_1=2^{\aleph_0}$, ces définitions coïncident.

Dans ce cas, on a le résultat suivant dû à M. Besicovitch ([1], p. 289):

L'égalité $\aleph_1=2^{\aleph_0}$ *implique l'existence d'un ensemble de puissance du continu concentré* (au sens strict, bien entendu) *autour d'un certain ensemble dénombrable.*

Je ne sais pas si l'on peut démontrer cette proposition sans faire appel à l'hypothèse du continu. Chez M. Besicovitch, cette prémisse est inévitable car sa démonstration repose sur la possibilité de ranger toutes les fonctions décroissantes d'une variable réelle en une suite transfinie de type ω_1.

Ici, je me propose de résoudre un problème plus facile — celui de l'existence d'ensembles concentrés au sens large. La démonstration qui va suivre est indépendante de l'hypothèse du continu et ne s'appuit que sur les propriétés des ensembles fondamentaux.

Démontrons d'abord certaines propositions auxiliaires.

Les symboles E et Φ ayant le sens déterminé par la formule (16), écrivons le nombre x, variable dans E, dans la forme

$$x=\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\ldots+\frac{1|}{|a_k}+\ldots, \tag{24}$$

où la suite variable $\{a_k\}$ parcourt tous les éléments de la famille Φ.

Soit $R_E^{(k)}$ ($k=0,1,2,\ldots$) l'ensemble de tous les réduits d'ordre k que l'on rencontre dans les développements (24). $R_E^{(0)}$ ne contient donc qu'un seul nombre $\varrho^{(0)}=0$, $E_E^{(1)}$ se compose de certains nombres $\varrho^{(1)}$ de la forme $\varrho^{(1)}=1/a_1$ (a_1 — un entier positif) et généralement, en écrivant le développement (24) dans la forme

$$x=\frac{1|}{|a_1^x}+\frac{1|}{|a_2^x}+\ldots+\frac{1|}{|a_k^x}+\ldots,$$

on définit $R_E^{(k)}$ comme l'ensemble de tous les nombres distincts de la forme

$$\varrho^{(k)}=\frac{1|}{|a_1^x}+\frac{1|}{|a_2^x}+\ldots+\frac{1|}{|a_k^x}$$

que l'on obtient pour $x\in E$.

Posons

$$R_E=\sum_{k=0}^{\infty}R_E^{(k)}. \tag{25}$$

L'ensemble (dénombrable) R_E ainsi défini, démontrons le suivant

LEMME III (comp. Sierpiński [8], p. 303, Lemme). *Soit G un ensemble linéaire ouvert contenant l'ensemble R_E.*

Il existe une suite infinie d'entiers positifs $\{m_k\}$ ayant cette propriété:

Si $x\in E$ et si l'on rencontre dans le développement (24) *du nombre x l'inégalité $a_k\geqslant m_k$ pour au moins une valeur de l'indice k, alors $x\in G$.*

Démonstration. Désignons, pour tout entier positif m, par Δ_{0m} l'intervalle fermé $[0, 1/m]$. $b_1, b_2, \ldots, b_k, c$ étant un système quelconque d'entiers positifs, désignons par $\Delta_{b_1 b_2 \ldots b_k c}$ l'intervalle fermé

$$\left[\frac{1|}{|b_1}+\frac{1|}{|b_2}+\ldots+\frac{1|}{|b_k}, \frac{1|}{|b_1}+\frac{1|}{|b_2}+\ldots+\frac{1|}{|b_k}+\frac{1|}{|c}\right],$$

respectivement

$$\left[\frac{1|}{|b_1}+\frac{1|}{|b_2}+\ldots+\frac{1|}{|b_k}+\frac{1|}{|c}, \frac{1|}{|b_1}+\frac{1|}{|b_2}+\ldots+\frac{1|}{|b_k}\right],$$

suivant que l'indice k est pair ou impair.

Nous allons déterminer la suite demandée par induction.

Le nombre $\varrho^{(0)}=0$ appartenant d'après (25) à G, il existe un entier $m_1 \geqslant 2$, suffisamment grand pour que l'on ait $\Delta_{0m_1} \subset G$ et pour que l'ensemble des nombres $\varrho^{(1)}=1/a_1$ de $R_E^{(1)}$ tels que

$$1 \leqslant a_1 \leqslant m_1-1$$

ne soit pas vide. Soit $Q^{(1)}$ cet ensemble.

L'ensemble $Q^{(1)}$, fini et non vide, étant contenu dans $R_E^{(1)}$, donc, d'après (25), dans G, il existe un entier $m_2 \geqslant 2$ satisfaisant à la condition double suivante:

Condition (c_2). 1. Quel que soit le nombre $\varrho^{(1)}=1/a_1$ de $Q^{(1)}$, il existe un entier $a=a(\varrho^{(1)})$, dépendant de $\varrho^{(1)}$, vérifiant l'inégalité

$$1 \leqslant a(\varrho^{(1)}) \leqslant m_2-1$$

et tel que le nombre

$$\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a(\varrho^{(1)})}=\varrho^{(2)}$$

appartient à $R_E^{(2)}$.

2. Pour tous ces $\varrho^{(1)}$, on a toujours $\Delta_{a_1 m_2} \subset G$.

Désignons par $Q^{(2)}$ l'ensemble de tous les nombres

$$\varrho^{(2)}=\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}$$

de $R_E^{(2)}$ vérifiant les inégalités

$$1 \leqslant a_i \leqslant m_i-1 \quad \text{pour} \quad i=1,2.$$

Soit maintenant k un entier $\geqslant 2$. Supposons que l'on ait déjà défini:

1) les entiers $m_1, m_2, \ldots, m_{k-1}$;

2) l'ensemble $Q^{(k-1)}$ comme celui de tous les nombres $\varrho^{(k-1)}$ de $R_E^{(k-1)}$ vérifiant les inégalités

$$1 \leqslant a_i \leqslant m_i-1 \quad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots,k-1;$$

3) l'entier m_k et les intervalles $\Delta_{a_1 a_2 \ldots a_{k-1} m_k}$ conformément à la condition (c_k), que l'on obtient de (c_2) par des changements bien évidents des indices.

Définissons $Q^{(k)}$ comme l'ensemble de tous les nombres

$$\varrho^{(k)}=\frac{1|}{|a_1}+\frac{1|}{|a_2}+\ldots+\frac{1|}{|a_k}$$

de $R_E^{(k)}$ vérifiant des inégalités

$$1 \leqslant a_i \leqslant m_i-1 \quad \text{pour} \quad i=1,2,\ldots,k.$$

L'ensemble $Q^{(k)}$ est alors fini et non vide et contenu dans G, ce qui garantit le passage à $k+1$: en raisonnant comme plus haut, on définit l'entier $m_{k+1} \geqslant 2$.

La suite $\{m_k\}$ ainsi définie, soit

$$x_0=\frac{1|}{|a_1^0}+\frac{1|}{|a_2^0}+\ldots+\frac{1|}{|a_k^0}+\ldots \tag{26}$$

un nombre quelconque de l'ensemble E satisfaisant à la condition du Lemme. Il existe alors au moins un indice k tel que $a_k^0 \geqslant m_k$. Soit k_0 le premier indice à cette propriété.

Si $k_0=1$, on a $x_0 \in \Delta_{0m_1}$. Si $k_0>1$, on a

$$1 \leqslant a_i^0 \leqslant m_i-1 \tag{27}$$

pour $i=1,2,\ldots,k_0-1$, et

$$a_{k_0}^0 \geqslant m_{k_0}. \tag{28}$$

Selon (27), le nombre

$$\varrho^{(k_0-1)}=\frac{1|}{|a_1^0}+\ldots+\frac{1|}{|a_{k_0-1}^0}$$

appartient à $Q^{(k_0-1)}$.

On a donc

$$\frac{1|}{|a_1^0}+\ldots+\frac{1|}{|a_{k_0-1}^0} \in \Delta_{a_1^0 a_2^0 \ldots a_{k_0-1}^0 m_{k_0}}.$$

D'autre part, l'inégalité (28) entraîne la relation

$$\frac{1|}{|a_1^0}+\ldots+\frac{1|}{|a_{k_0-1}^0}+\frac{1|}{|a_{k_0}^0} \in \Delta_{a_1^0 a_2^0 \ldots a_{k_0-1}^0 m_{k_0}}.$$

Ces deux relations montrent, d'après (26), que

$$x_0 \in \Delta_{a_1^0 a_2^0 \ldots a_{k_0-1}^0 m_{k_0}}.$$

On a donc en tout cas $x_0 \in G$, ce qui démontre le Lemme III.

Désignons par Γ un ensemble linéaire G_δ contenant R_E, d'ailleurs arbitraire.

On déduit du Lemme III le suivant

LEMME IV. *On peut attacher à tout ensemble Γ un nombre irrationnel $x_0 = x_0(\Gamma)$ de sorte que les relations*

(29) $$x \in E$$

et

(30) $$x \text{ non } \prec x_0$$

entraînent $x \in \Gamma$.

Démonstration. Un ensemble Γ étant donné, soit $\{G_i\}$ une suite d'ensembles ouverts telle que $\Gamma = G_1 G_2 \ldots$ On a évidemment $R_E \subset G_i$ pour $i = 1, 2, \ldots$

Soient $\{m_k^{(i)}\}$ $(i=1,2,\ldots)$ les suites qui correspondent aux ensembles G_i en vertu du Lemme III. La famille de ces suites étant dénombrable, il existe une suite fixe $\{m_k\}$ qui les majore toutes au sens de la relation $\prec$. Il existe donc, pour tout i, un entier positif l_i tel que

(31) $$m_k > m_k^{(i)} \quad \text{pour} \quad k \geqslant l_i.$$

Posons

(32) $$x_0 = \frac{1|}{|m_1} + \frac{1|}{|m_2} + \ldots + \frac{1|}{|m_k} + \ldots,$$

et soit x un nombre irrationnel satisfaisant aux conditions (29) et (30). Soit

$$x = \frac{1|}{|n_1} + \frac{1|}{|n_2} + \ldots + \frac{1|}{|n_k} + \ldots$$

son développement en fraction continue. D'après la définition de la relation $\prec$ pour les nombres irrationnels, la formule (30) entraîne l'existence d'une suite infinie croissante d'indices $\{k_j\}$ pour lesquels $n_{k_j} \geqslant m_{k_j}$ $(j=1,2,\ldots)$. On a donc d'après (31), pour une valeur de j suffisamment grande, l'inégalité $n_{k_j} > m_{k_j}^{(i)}$, d'où il résulte, en vertu de la condition (29) et du Lemme III, que $x \in G_i$. Ceci étant vrai pour tout indice i, on en conclut que $x \in \Gamma$.

Le nombre x_0 défini par la formule (32) satisfait donc à toutes les conditions du lemme IV, qui se trouve ainsi démontré.

LEMME V. *Pour que l'on ait*

(33) $$\overline{\overline{E - \Gamma}} < \overline{\overline{E}},$$

quel que soit Γ, il faut et il suffit que tout sous-ensemble de E borné selon la relation $\prec$ soit de puissance $< \overline{\overline{E}}$.

Démonstration. L'inégalité (33) supposée vraie, soit M un sous-ensemble de E borné selon la relation $\prec$. Il existe alors une décomposition $M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k$ telle que les ensembles $\overline{M}_k$ ne se composent que de points irrationnels. Posons $\Gamma_0 = \mathrm{C} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{M}_k$.

On obtient ainsi un ensemble G_δ contenant R_E. Par hypothèse, on a $\overline{\overline{E - \Gamma_0}} < \overline{\overline{E}}$, d'où il résulte à plus forte raison que $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{E}}$, car on a évidemment $M \subset E - \Gamma_0$.

Nous avons ainsi démontré que la condition du Lemme V est nécessaire.

Supposons maintenant cette condition remplie et soit Γ un G_δ quelconque contenant R_E. En vertu du Lemme IV, l'ensemble Γ contient tout élément x de E tel que x *non* $\prec x_0(\Gamma)$. Par conséquent, l'ensemble $E - \Gamma$ ne se compose que de certains nombres x de E satisfaisant à la condition $x \prec x_0(\Gamma)$. Or, l'ensemble de tous les nombres x de E qui satisfont à cette condition étant par hypothèse de puissance $< \overline{\overline{E}}$, il en est de même de l'ensemble $E - \Gamma$.

La condition à démontrer est donc suffisante. Ceci achève la démonstration du Lemme V.

Cela établi, définissons une classe (K) d'ensembles indénombrables de nombres irrationnels par la position suivante: un tel ensemble E appartient à (K) lorsque le nombre cardinal $\overline{\overline{E}}$ n'est pas somme d'une infinité dénombrable de nombres cardinaux inférieurs, et dans ce cas seulement.

Pour les ensembles de cette classe, le théorème suivant est vrai.

THÉORÈME IV. *Pour qu'un ensemble E de la classe (K) soit concentré au sens large autour de l'ensemble R_E, il faut et il suffit qu'il satisfasse à la condition du Lemme V.*

Démonstration. La suffisance de cette condition est déjà démontrée: elle résulte à plus forte raison du Lemme précédent.

La nécessité peut être établie comme il suit.

Soit E un ensemble appartenant à (K), concentré au sens large autour de l'ensemble R_E. Γ étant un G_δ quelconque contenant R_E, il existe une suite $\{G_k\}$ d'ensembles ouverts telle que $\Gamma = G_1 G_2, \ldots, G_k \supset G_{k'}$ pour $k < k'$ et $G_k \supset R_E$ pour $k = 1, 2, \ldots$ Considérons la formule

$$E - \Gamma = (E - G_1) + (E - G_2) + \ldots$$

Dans nos hypothèses sur les ensembles E et G_k, on a pour chacun des sommandes du côté droit l'inégalité $\overline{\overline{E - G_k}} < \overline{\overline{E}}$. En tenant compte de la condition imposée au nombre cardinal $\overline{\overline{E}}$, on voit que la même inégalité subsiste pour leur somme. On a donc $\overline{\overline{E - \Gamma}} < \overline{\overline{E}}$, d'où il résulte en vertu du Lemme V que notre condition est nécessaire.

Le Théorème IV est démontré.

Tout ensemble fondamental E de nombres irrationnels est, comme nous l'avons vu, indénombrable. Le nombre cardinal $\overline{\overline{E}}$ jouit de la propriété (iii). L'ensemble E appartient donc à la classe (K). D'après la définition même (Definition I), il satisfait à la condition du Lemme V. Par conséquent, on peut énoncer le suivant

THÉORÈME V. *Tout ensemble de nombres irrationnels E, fondamental par rapport à la relation $\precsim$, est concentré au sens large autour de l'ensemble R_E.*

L'existence de tels ensembles est donc, elle aussi, une conséquence du Théorème I.

Travaux cités

[1] A. S. Besicovitch, *Concentrated and rariefied sets of points*, Acta Math. 62 (1934), p. 289-300.

[2] J. Popruženko, *Sur le phénomène de convergence de M. Sierpiński*, Fund. Math. 41 (1954), p. 29-37.

[3] F. Rothberger, *Eine Äquivalenz zwischen der Kontinuumhypothese und der Existenz der Lusinschen und Sierpińskischen Mengen*, Fund. Math. 30 (1938), p. 215-216.

[4] — *Une remarque concernant l'hypothèse du continu*, Fund. Math. 31 (1938), p. 224-226.

[5] — *Sur un ensemble toujours de première catégorie qui est dépourvu de la propriété λ*, Fund. Math. 32 (1939), p. 294-300.

[6] W. Sierpiński, *Remarque sur le théorème de M. Egoroff*, Compt. Rend. Soc. Sc. et Lett. de Varsovie, Classe III, 20 (1928), p. 84-87.

[7] — *Hypothèse du Continu*, Warszawa-Lwów 1934.

[8] — *Sur les ensembles concentrés*, Fund. Math. 32 (1939), p. 301-305.

[9] — *Sur un ensemble à propriété λ*, Fund. Math. 32 (1939), p. 306-310.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 20.10.1954

Une propriété des ensembles $\{f'(x)>a\}$

par

J. S. Lipiński (Łódź)

M. Zahorski, dans son travail [2] appelle un ensemble linéaire E *ensemble de classe* M_3, s'il a la propriété suivante: E est vide, ou bien E est du type F_σ et de plus, pour tout $x \in E$ et tout nombre $c>0$, il existe un nombre $\varepsilon(x,c)>0$ tel que, pour tout couple de nombres h, h_1, les conditions

$$hh_1>0, \qquad h/h_1<c, \qquad |h+h_1|<\varepsilon(x,c)$$

impliquent respectivement

$$|E\cdot(x+h, x+h+h_1)|>0 \qquad \text{ou} \qquad |E\cdot(x-h-h_1, x-h)|>0,$$

suivant que $h>0$ ou $h<0$. Il démontre ensuite que si $\varphi'(x)$ est une dérivée finie, l'ensemble $\{\varphi'(x)>a\}$ est de classe M_3. Il introduit également une classe d'ensembles plus vaste qu'il nomme M_2. À celle-ci appartiennent l'ensemble vide et tout ensemble du type F_σ tel que dans tout voisinage unilatéral d'un point quelconque de l'ensemble se trouve une partie de celui-ci de mesure positive. Il démontre que les ensembles $\{\psi'(x)>a\}$, où $\psi'(x)$ est une dérivée non nécessairement finie d'une fonction continue, sont toujours de classe M_2. En outre, il pose les questions suivantes: Existe-t-il, pour tout ensemble E de classe M_3, une fonction différentiable $F(x)$ telle que $E=\{F'(x)>0\}$? Existe-t-il une fonction $g(x)$ continue, admettant partout une dérivée, telle que $E=\{g'(x)>0\}$ si E n'appartient qu'à la classe M_2?

La réponse à ces deux questions est négative même si l'on n'exige pas la continuité de la fonction $g(x)$. Les ensembles $\{f'(x)>a\}$ doivent, en effet, satisfaire à une certaine condition supplémentaire non nécessaire pour les ensembles de classe M_3, et d'autant plus pour ceux de classe M_2.

Avant d'énoncer cette condition j'introduirai certaines notations.

Soit E un ensemble linéaire (c'est-à-dire des points de droite). Le point x *a la propriété* W_E s'il appartient à E et si, en outre, pour tout nombre $\eta>0$, on trouve un nombre $c>0$ tel que, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un segment fermé I pour lequel

$$\operatorname{dist}(x,I)+|I|<\varepsilon, \qquad \operatorname{dist}(x,I)/|I|<c, \qquad |E\cdot I|/|I|<\eta.$$