Example. Let C be the set of all continuous real valued functions on the unit interval. We assume that C is metrized by the usual uniform metric. We define a function f on C by letting

$$f(u)=\{t|u(t)>0\} \quad \text{for each} \quad u \in C.$$

It is easy to verify that f is continuous with respect to the T_1 topology, but that f is not continuous with respect to the T_2 topology. It follows from Theorem 13 that f is continuous with respect to d on a residual subset of C. It is easy to see that f is d-continuous at u if and only if $\mu\{t|u(t)=0\}=0$.

References

[1] A. Alexiewicz et W. Orlicz, *Sur la continuité et la classification de Baire des fonctions abstraites*, Fundamenta Mathematicae 35 (1948), p. 105-126.

[2] G. Choquet, *Convergences*, Annales de l'Université de Grenoble 23 (1947), p. 57-112.

[3] M. K. Fort, Jr., *A unified theory of semi-continuity*, Duke Mathematical Journal 16 (1949), p. 237-246.

[4] — *Points of continuity of semi-continuous functions*, Publicationes Mathematicae 2 (1951), p. 100-102.

[5] H. Hahn, *Reelle Funktionen*, Leipzig 1932.

[6] J. L. Kelley, *Convergence in topology*, Duke Mathematical Journal 17 (1950), p. 277-283.

[7] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Transactions of the American Mathematical Society 71 (1951), p. 152-182.

[8] D. Montgomery, *Topological groups of differentiable transformations*, Annals of Mathematics 46 (1945), p. 382-387.

[9] B. J. Pettis, *On continuity and openness of homomorphisms in topological groups*, Annals of Mathematics 52 (1950), p. 293-308.

UNIVERSITY OF GEORGIA

Reçu par la Rédaction le 15.9.1954

Über eine Dimensionstheorie in topologischen Verbänden

von

H. Hofmann (Nürnberg)

Die mengentheoretische Topologie hat weitgehende Verallgemeinerungen zu einer Topologie der Vereine und Verbände erfahren (Nöbeling [3] und Sikorski [4]). Insbesondere ist auch die Menger-Urysohn'sche Dimensionstheorie von R. Sikorski auf gewisse topologische Verbände (C-Algebren (Sikorski [4] und [5])) übertragen worden. Allerdings verwendet Sikorski [5] einen *globalen* Dimensionsbegriff, mit dem sich nicht alle Sätze der Punktmengen-Dimensionstheorie formulieren lassen. Die vorliegende Arbeit hat nun zum Ziel, unter Zugrundelegung einer allgemeineren, *lokalen* Dimensionsdefinition eine Theorie zu entwickeln, in der noch fehlende Sätze bewiesen werden können. Es wird sich dabei zeigen, daß dieser lokale Dimensionsbegriff für C-Algebren, hier S-Verbände genannt, mit dem Sikorski'schen zusammenfällt.

Die vorliegende Arbeit stützt sich auf G. Nöbeling [3] und verwendet die dortigen Begriffe, Bezeichnungen und Sätze.

Ein für alle Mal sei ein klassisch-topologischer Boole-Verband $\mathfrak{B}$ vorgelegt.

Definition. $\mathfrak{B}$ heiße speziell ein Sikorski-Verband oder kurz ein *S-Verband*, wenn $\mathfrak{B}$ ein σ-Verband, regulär und T_1-topologisch ist und außerdem eine abzählbare Basis [1]) besitzt.

Es kann leicht gezeigt werden, daß jeder S-Verband eine abzählbare reguläre Basis besitzt. Ein S-Verband ist demnach dasselbe wie eine Sikorski'sche C-Algebra.

In Anlehnung an die Stoffeinteilung Mengers [2] behandelt die vorliegende Arbeit nach der Formulierung der Dimensionsdefinition (§ 1) die Dimension einzelner Somen (§ 2), Summen- und Zerspaltungssätze (§ 3), die lokale dimensionelle Struktur von S-Verbänden (§ 4), Überdeckungssätze (§ 5), die Beziehungen globaler Trennungs- und Zusammen-

[1]) „Basis" ist immer als offene Basis gemeint.

hangseigenschaften von $\mathfrak{V}$ zur Dimension von $\mathfrak{V}$ (§ 6) und das Verhalten der Dimension bei Abbildungen (§ 7). Die Beweise folgen im allgemeinen den von Menger [2] und Hurewicz-Wallman [1] verwendeten Gedankengängen.

§ 1. Der Dimensionbegriff

Definition. Es sei n eine ganze Zahl, $0 \leqslant n < \infty$.

(a) $\mathfrak{V}$ heiße *höchstens n-dimensional*, in Zeichen $\dim \mathfrak{V} \leqslant n$, wenn es zu jedem Soma $S > O$ (falls ein solches vorhanden ist) und jeder Umgebung U von S ein offenes Soma $V \leqslant U$ mit $V \wedge S > O$ und $\dim \mathrm{b}V \leqslant n-1$ gibt[2]). Ein Soma A heiße *höchstens n-dimensional*, in Zeichen $\dim A \leqslant n$, wenn $\mathfrak{V}_A$ höchstens n-dimensional ist[3]). Höchstens (-1)-dimensional sei das Nullsoma und nur dieses.

(b) $\mathfrak{V}$ (bzw. ein Soma A) heiße *mindestens n-dimensional*, in Zeichen $\dim \mathfrak{V} \geqslant n$ (bzw. $\dim A \geqslant n$), wenn $\mathfrak{V}$ (bzw. A) nicht höchstens $(n-1)$-dimensional ist. Mindestens (-1)-dimensional heiße jedes Soma.

(c) $\mathfrak{V}$ (bzw. ein Soma A) heiße *(genau) n-dimensional*, in Zeichen $\dim \mathfrak{V} = n$ (bzw. $\dim A = n$), wenn $\mathfrak{V}$ (bzw. A) zugleich höchstens n-dimensional und mindestens n-dimensional ist.

(d) Gilt für keine endliche Zahl n $\dim \mathfrak{V} \leqslant n$ (bzw. $\dim A \leqslant n$), so werde $\dim \mathfrak{V} = \infty$ (bzw. $\dim A = \infty$) geschrieben.

In einem topologischen Raum $\mathfrak{R}$, aufgefaßt als Verband $\mathfrak{V}$ (Nöbeling [3]) ist diese Definition mit der Dimensionsdefinition von Menger-Urysohn äquivalent.

Eine andere Formulierung der Dimensionsdefinition wird durch den folgenden Satz angegeben.

1.1. Voraussetzung: $0 \leqslant n < \infty$.

Behauptung: *Es ist dann und nur dann* $\dim \mathfrak{V} \leqslant n$, *wenn es eine Basis* $\mathfrak{B}'$ *von* $\mathfrak{V}$ *gibt, deren Somen höchstens* $(n-1)$*-dimensionale Begrenzungen haben.*

Beweis. (a) Dann. Ist die Bedingung des Satzes erfüllt und ist ein Soma $S > O$ sowie eine Umgebung U von S vorgelegt, so ist U als offenes Soma die Vereinigung von Somen der Basis $\mathfrak{B}'$. Mindestens eines dieser Somen ist zu S nicht fremd. Daraus folgt $\dim \mathfrak{V} \leqslant n$.

[2]) $\mathrm{b}V$ bezeichnet die Begrenzung $\bar{V} \wedge \mathrm{c}V$ von V. – Es wäre denkbar, von U nur zu verlangen, daß U ein offenes Soma mit $U \wedge S > O$ ist. Dies bedeutete jedoch keine wirkliche Verallgemeinerung, weil es bei Gültigkeit der oben formulierten Bedingung auch zu jedem Soma $S > O$ und jedem offenen Soma U mit $U \wedge S > O$ ein offenes Soma $V \leqslant U$ mit $V \wedge S > O$ und $\dim \mathrm{b}V \leqslant n-1$ gibt: $P = U \wedge S$ ist nicht leer; U ist eine Umgebung von P; für das zu P und U existierende Soma $V \leqslant U$ mit $\dim \mathrm{b}V \leqslant n-1$ gilt $V \wedge S \geqslant V \wedge P > O$.

[3]) $\mathfrak{V}_A$ bedeutet den aus allen Teilsomen von A bestehenden Unterverband von $\mathfrak{V}$.

(b) Nur dann. Ist $\dim \mathfrak{V} \leqslant n$, so ist das System aller offenen Somen V mit $\dim \mathrm{b}V \leqslant n-1$ eine Basis von $\mathfrak{V}$.

Über die Mächtigkeit der in 1.1 genannten Basis gibt der im Folgenden mehrmals benötigte Satz 1.2 Aufschluß:

1.2. Voraussetzung: $0 \leqslant n < \infty$; $\dim \mathfrak{V} \leqslant n$.

Behauptung: *Besitzt* $\mathfrak{V}$ *eine Basis* $\mathfrak{B}$ *einer Mächtigkeit* $\leqslant \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} \geqslant \aleph_0$), *so besitzt* $\mathfrak{V}$ *auch eine Basis* $\mathfrak{B}'$ *einer Mächtigkeit* $\leqslant \mathfrak{m}$ *mit* $\dim \mathrm{b}W \leqslant n-1$ *für jedes* $W \in \mathfrak{B}'$.

Beweis. Für jedes Paar (U_0, U) von Somen aus $\mathfrak{B}$, für welches $U_0 \leqslant U$ gilt und ein offenes Soma W mit $U_0 \leqslant W \leqslant U$ und $\dim \mathrm{b}W \leqslant n-1$ existiert, wählen wir ein solches Soma W aus; es sei $\mathfrak{B}'$ das System aller so ausgewählten Somen. Dann hat $\mathfrak{B}'$ zunächst eine Mächtigkeit $\leqslant \mathfrak{m}$. Um zu zeigen, daß $\mathfrak{B}'$ eine Basis von $\mathfrak{V}$ ist, genügt es nachzuweisen, daß jedes Soma $U \in \mathfrak{B}$ die Vereinigung von Somen $\in \mathfrak{B}'$ ist. Angenommen, für ein Soma $U \in \mathfrak{B}$ wäre dies nicht der Fall. Dann existiert ein Soma S mit $O < S \leqslant U$, das fremd ist zu allen Somen $W \leqslant U$ aus $\mathfrak{B}'$. Wegen $\dim \mathfrak{V} \leqslant n$ existiert aber in $\mathfrak{V}$ ein offenes Soma $V \leqslant U$ mit $V \wedge S > O$ und $\dim \mathrm{b}V \leqslant n-1$; in der Basis $\mathfrak{B}$ existiert weiter ein Soma $U_0 \leqslant V$ mit $U_0 \wedge S > O$. Folglich existiert in $\mathfrak{B}'$ ein Soma W mit $U_0 \leqslant W \leqslant U$, also mit $W \wedge S > O$, was im Widerspruch zur Annahme steht.

§ 2. Die Dimension einzelner Somen

2.1. Voraussetzung: *A sei ein beliebiges Soma*; $-1 \leqslant n \leqslant \infty$.

Behauptung: *Aus* $\dim \mathfrak{V} \leqslant n$ *folgt* $\dim A \leqslant n$.

Beweis (Hurewicz-Wallman [1], Theorem III. 1, S. 26) (durch vollständige Induktion). Für $n = -1$ ist die Behauptung evident. Sie werde nun für $-1 \leqslant n \leqslant m-1$ als bereits bewiesen angenommen; ferner sei $\dim \mathfrak{V} \leqslant m$. Sind dann ein nicht-leeres Soma $S \leqslant A$ und eine beliebige Umgebung U' in A von S vorgelegt, so gibt es zunächst ein in $\mathfrak{V}$ offenes Soma U mit $U' = U \wedge A$. U ist eine Umgebung in $\mathfrak{V}$ von S; aus $\dim \mathfrak{V} \leqslant m$ folgt daher die Existenz eines in $\mathfrak{V}$ offenen Somas $V \leqslant U$ mit $V \wedge S > O$ und $\dim \mathrm{b}V \leqslant m-1$. Setzt man nun $V \wedge A = V'$, so ist V' in A offen und es gilt: $V' \leqslant U'$, weil $V \leqslant U$ und daher $V \wedge A \leqslant U \wedge A$; $V' \wedge S > O$, weil $A \wedge S = S$ und daher $(V \wedge A) \wedge S = V \wedge S > O$; $\mathrm{b}_A V' \leqslant \mathrm{b}V$[4]), weil einerseits $\mathrm{b}_A V' \leqslant A$ und $V' \wedge \mathrm{b}_A V' = O$, also $V \wedge \mathrm{b}_A V' = O$, andererseits $\mathrm{b}_A V' \leqslant \bar{V}'$, also $\mathrm{b}_A V' \leqslant \bar{V}$ ist. Wendet man jetzt die Induktionsvoraussetzung auf den Verband $\mathfrak{V}_{\mathrm{b}V}$ und auf das Soma $\mathrm{b}_A V' \in \mathfrak{V}_{\mathrm{b}V}$ an, so erhält man $\dim \mathrm{b}_A V' \leqslant m-1$. Auf Grund dieser Eigenschaften folgt aus der Existenz des Somas V' $\dim A \leqslant m$. Die Behauptung gilt also auch für $n = m$ und ist damit für alle endlichen Zahlen n bewiesen. Für $n = \infty$ ist sie evident.

[4]) $\mathrm{b}_A V'$ bezeichnet die Begrenzung in A von V'.

2.2. Voraussetzung: $-1 \leqslant n < \infty$.

Behauptung: *Ist* $\dim \mathfrak{B} = n$, *so existiert in* $\mathfrak{B}$ *für jede ganze Zahl* m *mit* $-1 \leqslant m \leqslant n$ *ein genau* m*-dimensionales Soma.*

Beweis (Hurewicz-Wallman [1], S. 24, Bem. D)). Für $m=n$ ist E, für $m=-1$ ist O das gesuchte Soma. Nun sei $-1<m<n$. Wegen $\dim\mathfrak{B}=n$ existiert in $\mathfrak{B}$ ein Soma A_1 (nämlich die Begrenzung $\mathrm{b}V$ eines offenen Somas V) mit $\dim A_1 = n-1$. Dann ist $\dim \mathfrak{B}_1 = n-1$ für $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_{A_1}$. Die Wiederholung dieses Schrittes liefert ein Soma $A_2 \in \mathfrak{B}_1$ mit $\dim A_2 = n-2$. Nach $n-m$ Schritten erhält man ein Soma A_{n-m} mit $\dim A_{n-m} = m$.

Die Dimension eines Somas A ist durch Eigenschaften des Verbandes $\mathfrak{B}_A$ definiert. Sie kann aber statt dessen auch durch Eigenschaften von $\mathfrak{B}$ gekennzeichnet werden [5]):

2.3. Voraussetzung: *A sei ein beliebiges Soma*; $0 \leqslant n<\infty$.

Behauptung: *Damit* $\dim A \leqslant n$ *sei, ist hinreichend und, falls* $\mathfrak{B}$ *vollständig normal ist, auch notwendig, daß es zu jedem nicht-leeren Soma* $S \leqslant A$ *und zu jeder Umgebung* U *von* S *ein offenes Soma* $V \leqslant U$ *mit* $V\wedge S>O$ *und* $\dim \mathrm{b}V \wedge A \leqslant n-1$ *gibt.*

Beweis (Hurewicz-Wallman [1], S. 27, Bem. A)). (a) Hinreichend. Die Bedingung des Satzes sei erfüllt; ferner seien ein nicht-leeres Soma $S\leqslant A$ und eine beliebige Umbegung U' in A von S vorgelegt. Da U' in A offen ist, gibt es ein (in $\mathfrak{B}$) offenes Soma U mit $U'=U\wedge A$. Zum Soma S und seiner Umgebung U existiert nach Voraussetzung ein (in $\mathfrak{B}$) offenes Soma $V\leqslant U$ mit $V\wedge S>O$ und $\dim \mathrm{b}V\wedge A\leqslant n-1$. Das Soma $V'=V\wedge A$ ist dann in A offen und es gilt: $V'\wedge S>O$; $V'\leqslant U'$; $\mathrm{b}_A V' \leqslant \mathrm{b}V\wedge A$, also $\dim \mathrm{b}_A V' \leqslant n-1$ nach 2.1. Folglich ist $\dim A\leqslant n$.

(b) Notwendig. $\mathfrak{B}$ sei vollständig normal und es sei $\dim A\leqslant n$. Ferner seien ein nicht-leeres Soma $S\leqslant A$ und eine beliebige Umgebung U von S gegeben. Das Soma $U'=U\wedge A$ ist dann in A offen und es ist $S\leqslant U'$. Wegen $\dim A\leqslant n$ gibt es folglich ein in A offenes Soma $V'\leqslant U'$ mit $V'\wedge S>O$ und $\dim \mathrm{b}_A V'\leqslant n-1$. Die beiden Somen V' und $X=A\wedge c\overline{V'}$ sind fremd und in ihrer Vereinigung abgeschlossen. Weil $\mathfrak{B}$ vollständig normal ist, gibt es daher ein offenes Soma W mit $V'\leqslant W$ und $\overline{W}\wedge X=O$. Setzt man dann $W\wedge U=V$, so ist V offen und es gilt: $V\leqslant U$; $V\wedge S>O$, weil $(W\wedge U)\wedge S = W\wedge S\geqslant V'\wedge S>O$; $\mathrm{b}V\wedge A\leqslant \mathrm{b}_A V'$, weil $V'\leqslant V$ sowie $\overline{V}\wedge A\leqslant\overline{W}\wedge A\leqslant cX\wedge A=\overline{V'}\wedge A$ und daher $\mathrm{b}V\wedge A=(\overline{V}\wedge cV)\wedge A\leqslant(\overline{V'}\wedge A)\wedge(cV'\wedge A) = \mathrm{b}_A V'$. Aus der letzten Beziehung folgt nach 2.1 $\dim \mathrm{b}V\wedge A\leqslant n-1$. Das Soma V besitzt also alle in der Bedingung des Satzes geforderten Eigenschaften.

[5]) Vergl. auch den Hilfssatz von S. 296.

§ 3. Summen- und Zerspaltungssätze

Die ersten Sätze dieses Paragraphen (3.1-3.4) behandeln den Schluß von den Dimensionen einzelner Somen auf die Dimension ihrer Vereinigung.

3.1. Voraussetzung: *A und B seien fremde, in ihrer Vereinigung abgeschlossene Somen*; $-1\leqslant n\leqslant\infty$.

Behauptung: *Aus* $\dim A\leqslant n$ *und* $\dim B\leqslant n$ *folgt* $\dim A\vee B\leqslant n$.

Beweis. Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A\vee B=E$ angenommen werden. Für $n=\infty$ ist die Behauptung trivial, ebenso für $n=-1$. Nun sei $0\leqslant n<\infty$ und es werde ein Soma $S>O$ sowie eine beliebige Umgebung U von S vorgelegt. Es sei etwa $S\wedge A>O$. Dann gibt es wegen $\dim A\leqslant n$ zu $S\wedge A$ und der Umgebung $U\wedge A$ in A von $S\wedge A$ ein in A offenes Soma $V\leqslant U\wedge A$ mit $V\wedge(S\wedge A)>O$ und $\dim \mathrm{b}_A V\leqslant n-1$. A und B sind offen und fremd; infolgedessen ist V auch in E offen und es gilt $\mathrm{b}_A V=\mathrm{b}V$, also $\dim \mathrm{b}V\leqslant n-1$. Daraus folgt $\dim E\leqslant n$, w. z. b. w.

3.2. Voraussetzung: $\mathfrak{B}$ *sei vollständig normal, A und B seien beliebige Somen*; $-1\leqslant m<\infty$; $-1\leqslant n<\infty$.

Behauptung: *Aus* $\dim A\leqslant m$ *und* $\dim B\leqslant n$ *folgt* $\dim A\vee B\leqslant m+n+1$.

Beweis (Hurewicz-Wallman [1], S. 28, Bem. B)) (durch vollständige Induktion). Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A\vee B=E$ angenommen werden. Für $n=m=-1$ ist die Behauptung evident. Sie sei nun für $-2\leqslant m+n\leqslant p-1$ bereits bewiesen. Wir zeigen, daß sie auch für $m+n=p$ gilt. Es sei also $m+n=p$. Ferner seien ein beliebiges Soma $S>O$ und eine beliebige Umgebung U von S gegeben. Es sei etwa $S\wedge A>O$. Dann gibt es nach 2.3 wegen $\dim A\leqslant m$ ein offenes Soma $V\leqslant U$ mit $V\wedge S\geqslant V\wedge(S\wedge A)>O$ und $\dim \mathrm{b}V\wedge A\leqslant m-1=m'$; dabei gilt wegen $\dim B\leqslant n$ nach 2.1 außerdem $\dim \mathrm{b}V\wedge B\leqslant n$. Weil $m'+n=p-1$ ist, kann die Induktionsvoraussetzung auf die Somen $\mathrm{b}V\wedge A$ und $\mathrm{b}V\wedge B$ angewandt werden: $\dim \mathrm{b}V\leqslant m'+n+1=m+n$. Daraus folgt $\dim E\leqslant m+n+1$; die Behauptung gilt also auch für $m+n=p$, w. z. b. w.

Hilfssatz. $\mathfrak{B}$ *sei ein* T_1*-topologischer (und klassisch-topologischer)* σ*-Boole-Verband mit abzählbarer Basis.* $\mathfrak{B}$ *ist dann und nur dann höchstens 0-dimensional, wenn es zu je zwei fremden abgeschlossenen Somen* A', A'' *zwei fremde offene Somen* G', G'' *mit* $E=G'\vee G''$, $A'\leqslant G'$ *und* $A''\leqslant G''$ *gibt.*

Beweis. (a) Dann [6]). Die Bedingung des Satzes sei erfüllt; ferner seien ein beliebiges Soma $S>O$ und eine beliebige Umgebung U von S

[6]) Für diesen Teil des Beweises braucht $\mathfrak{B}$ nur als T_1-topologischer (und klassisch-topologischer) Boole-Verband vorausgesetzt zu werden.

gegeben. Da $\mathfrak{B}$ T_1-topologisch ist, enthält S ein abgeschlossenes Teilsoma $P>O$. P ist fremd zu dem abgeschlossenen Soma cU; voraussetzungsgemäß gibt es daher zwei fremde offene Somen G', G'' mit $P \leqslant G'$, $cU \leqslant G''$ und $E = G' \vee G''$. Dann ist $G' \leqslant U$, $G' \wedge S > O$ und $\mathrm{b}G' = O$, also $\dim \mathrm{b}G' = -1$. Daraus folgt $\dim \mathfrak{B} \leqslant 0$.

(b) Nur dann. Es sei $\dim \mathfrak{B} \leqslant 0$; ferner seien zwei beliebige fremde abgeschlossene Somen A', A'' gegeben. Dann ist die Existenz zweier fremder offener Somen G', G'' mit $A' \leqslant G'$, $A'' \leqslant G''$ und $G' \vee G'' = E$ nachzuweisen. Ist $A' = O$, so haben $G' = O$, $G'' = E$ die gewünschten Eigenschaften. Nun sei $A' > O$. Da $\dim \mathfrak{B} \leqslant 0$, gibt es nach 1.2 eine abzählbare Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{B}$, deren Elemente leere Begrenzungen haben. Da die Somen cA' und cA'' offen sind, sind sie Vereinigungen von Somen $\epsilon\, \mathfrak{B}$; die in mindestens einer dieser Vereinigungen vorkommenden Somen $\epsilon\, \mathfrak{B}$ seien in der Folge $U_1, U_2, \dots$ angeordnet. Für jedes $k = 1, 2, \dots$ gilt dann $U_k \wedge A' = O$ oder $U_k \wedge A'' = O$ (oder beides). Von nun an schließt man weiter wie bei Hurewicz-Wallman [1], S. 16 (mit $A' = C$, $A'' = K$, $G' = C'$ und $G'' = K'$).

3.3. Voraussetzung: *$\mathfrak{B}$ sei ein S-Verband; in $\mathfrak{B}$ seien abzählbar viele in ihrer Vereinigung abgeschlossene Somen F_i gegeben*; $-1 \leqslant n \leqslant \infty$.

Behauptung: *Aus* $\dim F_i \leqslant n$ *für* $i = 1, 2, \dots$ *folgt* $\dim \bigvee_{i=1}^{\infty} F_i \leqslant n$.

Beweis. Für $n = \infty$ ist die Behauptung sicher richtig, ebenso für $n = -1$; für $0 \leqslant n < \infty$ soll sie durch vollständige Induktion bewiesen werden.

Es sei zunächst $n = 0$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\bigvee_{i=1}^{\infty} F_i = E$ (und jedes F_i als abgeschlossen) angenommen werden. Dann verläuft der Beweis analog wie bei Hurewicz-Wallman [1], S. 18-19.

Es werde nun vorausgesetzt, daß 3.3 für $0 \leqslant n < m-1$ bereits bewiesen ist. Dann gilt für einen S-Verband $\mathfrak{B}$ und eine ganze Zahl k mit $0 \leqslant k \leqslant m$ die folgende Zwischenbemerkung:

(*) *Ist* $\dim \mathfrak{B} \leqslant k$, *so gibt es zwei fremde Somen* N', N'' *mit* $E = N' \vee N''$, $\dim N' \leqslant k-1$ *und* $\dim N'' \leqslant 0$.

Da nämlich $\mathfrak{B}$ als S-Verband eine abzählbare Basis besitzt, folgt aus 1.2 die Existenz einer abzählbaren Basis $\{B_i\}_{i=1,2,\dots}$ von $\mathfrak{B}$ mit $\dim \mathrm{b}B_i \leqslant k-1 \leqslant m-1$ für jedes $i = 1, 2, \dots$ Nun sei $N' = \bigvee_{i=1}^{\infty} \mathrm{b}B_i$. ($N'$ existiert, weil $\mathfrak{B}$ ein σ-Verband ist.) Da jedes $\mathrm{b}B_i$ abgeschlossen ist, folgt auf Grund der Induktionsvoraussetzung aus 3.3 $\dim N' \leqslant k-1$. Das Komplement N'' von N' schließlich ist höchstens 0-dimensional.

Nun sei $\dim F_i \leqslant m$ für $i = 1, 2, \dots$ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\bigvee_{i=1}^{\infty} F_i = E$ (und jedes F_i als abgeschlossen) angenommen werden. Dann beweist man $\dim E \leqslant m$ wie bei Hurewicz-Wallman [1], S. 31-32 unter Berücksichtigung der Tatsache, daß in einem S-Verband jedes offene Soma ein F_σ (und jedes abgeschlossene Soma ein G_δ) ist (Sikorski [4], S. 185). Mit $\dim E \leqslant m$ ist 3.3 vollständig bewiesen und gleichzeitig die Gültigkeit der Zwischenbemerkung (*) für jede endliche ganze Zahl $k \geqslant 0$ sichergestellt.

3.4. Voraussetzung: *$\mathfrak{B}$ sei ein S-Verband, A ein beliebiges Soma, B ein Soma, das zugleich F_σ und G_δ in $A \vee B$ ist* [7]; $-1 \leqslant n \leqslant \infty$.

Behauptung: *Aus* $\dim A \leqslant n$ *und* $\dim B \leqslant n$ *folgt* $\dim A \vee B \leqslant n$.

Beweis wie bei Menger [2], S. 114-115.

Die zum Beweis des Summensatzes 3.3 herangezogene und bewiesene Zwischenbemerkung betrifft die Zerspaltung eines Somas in Somen niedrigerer Dimension. In den Sätzen 3.5 bis 3.7 sind solche Zerspaltungstatsachen aufgeführt.

3.5. Voraussetzung: *$\mathfrak{B}$ sei ein S-Verband*; $0 \leqslant n < \infty$.

Behauptung: *Ist* $\dim \mathfrak{B} \leqslant n$, *so gibt es zwei fremde Somen* N', N'' *mit* $E = N' \vee N''$, $\dim N' \leqslant n-1$ *und* $\dim N'' \leqslant 0$.

Beweis: Satz 3.3, Zwischenbemerkung (*).

3.6. Voraussetzung: *$\mathfrak{B}$ sei vollständig normal*; $0 \leqslant n < \infty$.

Behauptung: *Damit* $\dim \mathfrak{B} \leqslant n$ *sei, ist hinreichend und, falls $\mathfrak{B}$ ein S-Verband ist, auch notwendig, daß es $n+1$ paarweise fremde, höchstens 0-dimensionale Somen A_i mit $E = \bigvee_{i=1}^{n+1} A_i$ gibt.*

Beweis: 3.2 und 3.5.

3.7. Voraussetzung: *$\mathfrak{B}$ sei ein S-Verband*; $-1 \leqslant n < \infty$.

Behauptung: *Ist* $\dim \mathfrak{B} = n$, *so gibt es zu je zwei ganzen Zahlen p, q mit $p \geqslant q \geqslant -1$ und $p+q = n-1$ zwei fremde Somen P, Q mit $E = P \vee Q$, $\dim P = p$ und $\dim Q = q$.*

Beweis: 3.6.

Der Zerspaltungssatz 3.5 ermöglicht es, den Hilfssatz von Seite 293 zu verallgemeinern [8]:

[7]) Diese Voraussetzung ist nach einer eben gemachten Bemerkung (vergl. Sikorski [4], S. 185), z. B. dann erfüllt, wenn B in $A \vee B$ abgeschlossen (oder offen) ist.

[8]) Dieser Satz 3.8 betrifft eine Eigenschaft von $\mathfrak{B}$, die in § 6 systematisch behandelt werden soll. Wir beweisen ihn schon jetzt, weil aus ihm (für S-Verbände) die Äquivalenz des Sikorski'schen Dimensionsbegriffes mit dem von uns eingeführten gefolgert werden kann und es wünschenswert erscheint, diese Äquivalenz möglichst frühzeitig festzustellen.

3.8. Voraussetzung: *$\mathfrak{V}$ sei ein T_1-Verband, A ein beliebiges Soma;* $0 \leqslant n < \infty$.

Behauptung: *Damit* $\dim A \leqslant n$ *sei, ist hinreichend und, falls $\mathfrak{V}$ ein S-Verband ist, auch notwendig, daß es zu je zwei fremden abgeschlossenen Somen A', A'' ein abgeschlossenes Soma B und zwei fremde offene Somen G', G'' mit $cB = G' \vee G''$, $A' \leqslant G'$, $A'' \leqslant G''$ und* $\dim B \wedge A \leqslant n-1$ *gibt.*

Beweis. (a) Hinreichend. Es sei die Bedingung des Satzes erfüllt; ferner seien ein nicht-leeres Soma $S \leqslant A$ sowie eine beliebige Umgebung U von S vorgelegt. Da $\mathfrak{V}$ T_1-topologisch ist, existiert ein abgeschlossenes nicht-leeres Soma $P \leqslant S$. Die Somen P und cU sind abgeschlossen und fremd; nach Voraussetzung gibt es daher ein abgeschlossenes Soma B und zwei fremde offene Somen G', G'' mit $cB = G' \vee G''$, $P \leqslant G'$, $cU \leqslant G''$ und $\dim B \wedge A \leqslant n-1$. Dann ist $G' \leqslant U$, $G' \wedge S > O$ und $bG' \leqslant B$, also $\dim bG' \wedge A \leqslant n-1$. Nach 2.3 folgt hieraus $\dim A \leqslant n$.

(b) Notwendig. $\mathfrak{V}$ sei ein S-Verband. Für $\dim A \leqslant 0$ verläuft der Beweis wie bei Hurewicz-Wallman [1], S. 16-18, Bem. F), für $\dim A \leqslant n$ (n beliebig $\geqslant 0$) wie bei Hurewicz-Wallman [1], S. 34, Bem. B).

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt unmittelbar:

3.9. *Für S-Verbände ist der Sikorski'sche Dimensionsbegriff mit dem auf Seite* 290 *definierten äquivalent.*

Als weitere Anwendung von 3.8 sei zum Schluß noch ein später benötigter Hilfssatz angegeben, der eine Verallgemeinerung des Satzes 2.3 darstellt.

HILFSSATZ. *A sei ein beliebiges Soma;* $0 \leqslant n < \infty$. *Damit* $\dim A \leqslant n$ *sei, ist hinreichend und, falls $\mathfrak{V}$ ein S-Verband ist, auch notwendig, daß es zu jedem Soma $S > O$ und jeder Umgebung U von S ein offenes Soma $V \leqslant U$ mit $V \wedge S > O$ und* $\dim bV \wedge A \leqslant n-1$ *gibt.*

Beweis. (a) Hinreichend. Mit der Bedingung des Satzes ist erst recht die Bedingung von 2.3 erfüllt; daraus folgt $\dim A \leqslant n$.

(b) Notwendig. Es sei $\mathfrak{V}$ ein S-Verband und $\dim A \leqslant n$; ferner seien ein nicht-leeres Soma S und eine beliebige Umgebung U von S vorgelegt. Da $\mathfrak{V}$ als S-Verband T_1-topologisch ist, gibt es ein nicht-leeres abgeschlossenes Soma $P \leqslant S$. Die Somen P und cU sind abgeschlossen und fremd; nach 3.8 gibt es daher ein abgeschlossenes Soma B und zwei offene, fremde Somen G', G'' mit $cB = G' \vee G''$, $P \leqslant G'$, $cU \leqslant G''$ und $\dim B \wedge A \leqslant n-1$. Setzt man dann $G' = V$, so ist $V \leqslant U$, $V \wedge S > O$ und $bV \leqslant B$, also $\dim bV \wedge A \leqslant n-1$. Das Soma V leistet somit das Verlangte.

§ 4. Die dimensionelle Struktur von S-Verbänden

In diesem Paragraphen liege durchwegs ein S-Verband $\mathfrak{V}$ mit $E \neq O$ vor.

Wegen des Fehlens von Punkten gestaltet sich die Definition des dimensionellen Verhaltens von $\mathfrak{V}$ in seinen Somen etwas komplizierter als bei einem Raum; die Ergebnisse der Strukturuntersuchungen sind jedoch dieselben.

Definition. A sei ein beliebiges nicht-leeres Soma, k eine ganze Zahl $\geqslant 0$.

(a) $\mathfrak{V}$ heiße ***höchstens k-dimensional in A***, wenn es zu jedem nicht-leeren Teilsoma S von A und jeder Umgebung U von S ein offenes Soma $V \leqslant U$ mit $V \wedge S > O$ und $\dim bV \leqslant k-1$ gibt.

(b) $\mathfrak{V}$ heiße *mindestens k-dimensional in A*, wenn $\mathfrak{V}$ in keinem nicht-leeren Teilsoma von A höchstens $(k-1)$-dimensional ist.

(c) $\mathfrak{V}$ heiße *(genau) k-dimensional in A*, wenn $\mathfrak{V}$ in A sowohl höchstens als auch mindestens k-dimensional ist.

Ersichtlich ist $\dim \mathfrak{V} \leqslant k$, *wenn und nur wenn $\mathfrak{V}$ in E höchstens k-dimensional ist.* Aus der Definition ergibt sich ferner unmittelbar:

4.1. Voraussetzung: *A sei ein beliebiges nicht-leeres Soma;* $0 \leqslant k < \infty$.

Behauptung: (a) *Ist $\mathfrak{V}$ höchstens k-dimensional in A, so auch in jedem nicht-leeren Teilsoma von A.*

(b) *Ist $\mathfrak{V}$ mindestens k-dimensional in A, so auch in jedem nicht-leeren Teilsoma von A.*

Ist A ein nicht-leeres Soma, so braucht $\mathfrak{V}$ in A weder höchstens $(k-1)$-dimensional noch mindestens k-dimensional zu sein. In der Tat: Gibt es in $\mathfrak{V}$ zwei (fremde) nicht-leere Somen B und C derart, daß $\mathfrak{V}$ in B höchstens $(k-1)$-dimensional und in C mindestens k-dimensional ist, so ist $\mathfrak{V}$ in $A = B \vee C$ weder höchstens $(k-1)$- noch mindestens k-dimensional. Bezeichnet man also mit $\mathfrak{D}^k$ das System aller nicht-leeren Somen von $\mathfrak{V}$, in denen $\mathfrak{V}$ mindestens k-dimensional, und mit $\mathfrak{T}^{k-1}$ das System aller nicht-leeren Somen von $\mathfrak{V}$, in denen $\mathfrak{V}$ höchstens $(k-1)$-dimensional ist, so enthalten (für ein festes k) die Systeme $\mathfrak{D}^k$ und $\mathfrak{T}^{k-1}$ zusammen im allgemeinen nicht alle nicht-leeren Somen von $\mathfrak{V}$; in einem gewissen Sinn liefern sie aber, wie aus 4.2 hervorgehen wird, trotzdem eine vollständige Klassifizierung der Somen von $\mathfrak{V}$.

Ist $\mathfrak{V}$ in einem nicht-leeren Soma A mindenstens k-dimensional, so ist $\mathfrak{V}$ in A erst recht mindestens $(k-1)$-dimensional. In der obigen Bezeichnungsweise heißt dies $\mathfrak{D}^k \subseteqq \mathfrak{D}^{k-1}$. Da $\mathfrak{V}$ in jedem nicht-leeren Soma mindestens 0-dimensional ist, so gilt ferner, wenn man zu $\mathfrak{D}^0$ noch das Nullsoma hinzurechnet, $\mathfrak{D}^0=\mathfrak{B}$. Weitere Untersuchungen der Systeme $\mathfrak{D}^k$ und $\mathfrak{T}^{k-1}$ führen auf den folgenden Satz 4.2.

Hilfssatz 1. *Zu jeder abzählbaren Basis* $\mathfrak{B}$ *von* $\mathfrak{B}$ *gibt es eine Doppelfolge* $\{B_i^k\}$ $(B_i^k \in \mathfrak{B}$ *für* $i,k=1,2,\ldots)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Für jede natürliche Zahl* k *ist* $\bigvee_{i=1}^{\infty} B_i^k = E$.

(2) *Zu je zwei Somen* $G,H \in \mathfrak{B}$ *mit* $\bar{G} \leqslant H$ *gibt es eine natürliche Zahl* $k=k(G;H)$ *derart, daß für kein* $i=1,2,\ldots$ *sowohl* $B_i^k \wedge G>O$ *als auch* $B_i^k \wedge cH>O$ gilt [9]).

Beweis. Da $\mathfrak{B}$ abzählbar ist, gibt es höchstens abzählbar viele Paare (G,H) von Somen aus $\mathfrak{B}$ mit $\bar{G}\leqslant H$. (Ein solches Paar existiert sicher, da $G=O$ gesetzt werden kann.) Diese Paare seien in einer Folge $\{(G^k,H^k)\}$, $k=1,2,\ldots$ angeordnet (falls es nur endlich viele, etwa n, solcher Paare gibt, sei $G^k=G^n$ und $H^k=H^n$ für $k>n$). Für jedes k sind die Somen H^k und $c\bar{G}^k$ offen und es gilt $H^k \vee c\bar{G}^k=E$; als offene Somen sind H^k und $c\bar{G}^k$ Vereinigungen von Basiselementen. Man ordnet nun für jede natürliche Zahl k die in diesen beiden Vereinigungen auftretenden (abzählbar vielen) Somen $\in \mathfrak{B}$ in einer Folge $B_1^k, B_2^k,\ldots$ an (falls es nur endlich viele, etwa m, solcher Somen gibt, sei $B_i^k=B_m^k$ für $i>m$). Die Doppelfolge $\{B_i^k\}$ leistet dann das Verlangte.

Hilfssatz 2. *Es sei* $\mathfrak{W}$ *ein System offener Somen und* $\mathfrak{A}$ *das System aller Somen* A, *für die es zu jedem nicht-leeren Teilsoma* $S\leqslant A$ *und jeder Umgebung* U *von* S *ein Soma* $W\in\mathfrak{W}$ *mit* $W\leqslant U$ *und* $W\wedge S>O$ *gibt. Dann existiert das Soma* $D=\bigvee_{\mathfrak{A}} A$, *liegt in* $\mathfrak{A}$ *und ist ein* G_δ [10]).

Beweis. Es sei $\{B_i^k\}$ eine gemäß Hilfssatz 1 konstruierte Doppelfolge; für jede natürliche Zahl k sei weiter W^k die Vereinigung aller $W\in\mathfrak{W}$, die für irgend einen Index i im Soma B_i^k enthalten sind. Als Vereinigung offener Somen ist jedes W^k offen; das Soma $D=\bigwedge_{k=1}^{\infty} W^k$ ist also ein G_δ. Wir behaupten, daß dieses Soma D die Vereinigung $\bigvee_{\mathfrak{A}} A$ ist. Erstens ist jedes $A\in\mathfrak{A}$ in D enthalten. Angenommen nämlich, ein Soma $A\in\mathfrak{A}$ wäre nicht in W^k enthalten. Dann ist $S=A\wedge cW^k>O$ und es gibt wegen (1) von Hilfssatz 1 einen Index i mit $S\wedge B_i^k>O$. Nun ist $S\wedge B_i^k$ ein nicht-leeres Teilsoma von A und B_i^k eine Umgebung von $S\wedge B_i^k$; infolgedessen gibt es ein Soma $W\in\mathfrak{W}$ mit $W\leqslant B_i^k$ und $W\wedge S\wedge B_i^k>O$. Aus $W\leqslant B_i^k$ folgt aber $W\leqslant W^k$ und hieraus wegen $W\wedge S\wedge B_i^k>O$ weiter $W^k\wedge S>O$, was im Widerspruch zu $S=A\wedge cW^k$ steht. Zweitens ist $D\in\mathfrak{A}$. Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir irgend ein nichtleeres Teilsoma S von D und eine beliebige Umgebung U von S. Es existieren nun wegen der Regularität von $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B}$ zwei Somen G,H mit $G\wedge S>O$, $\bar{G}\leqslant H$ und $H\leqslant U$, ferner die Zahl $k=k(G;H)$ im Sinne von (2) des Hilfssatzes 1 und schließlich wegen $O<G\wedge S\leqslant S\leqslant D\leqslant W^k$ ein B_i^k und ein $W\leqslant B_i^k$ mit $G\wedge S\wedge W>O$. Dann ist $G\wedge B_i^k>O$, also $B_i^k\leqslant H\leqslant U$ nach (2) von Hilfssatz 1, also $W\leqslant U$; außerdem ist $S\wedge W>O$. Infolgedessen ist $D\in\mathfrak{A}$ nach Definition von $\mathfrak{A}$. Aus $A\leqslant D$ für jedes $A\in\mathfrak{A}$ und $D\in\mathfrak{A}$ folgt schließlich $D=\bigvee_{\mathfrak{A}} A$.

[9]) Menger [2], S. 60, „Theorem von den ausgezeichneten Doppelfolgen".
[10]) Menger [2], S. 68, „Theorem über Gleichwertigkeitsteile".

4.2. *Für jedes* $k=0,1,2,\ldots$ *existieren zwei Somen* D^k *und* T^{k-1} *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $D^k\vee T^{k-1}=E$; $D^k\wedge T^{k-1}=O$;

(2) $\mathfrak{B}$ *ist dann und nur dann in* A *mindestens* k*-dimensional, wenn* $O<A\leqslant D^k$ *ist;*

(3) $\mathfrak{B}$ *ist für* $k\geqslant 1$ *dann und nur dann in* A *höchstens* $(k-1)$*-dimensional, wenn* $O<A\leqslant T^{k-1}$ *ist;* $T^{-1}=O$;

(4) D^k *ist ein* F_σ, T^{k-1} *ist ein* G_δ [11]).

Beweis (Menger [2], S. 127). Es seien $\mathfrak{D}^k$ und $\mathfrak{T}^{k-1}$ die auf Seite 297 definierten Somensysteme. Wegen $\mathfrak{D}^0=\mathfrak{B}$ leisten für $k=0$ die Somen $D^0=E$ und $T^{-1}=O$ das Verlangte. Nun sei $k\geqslant 1$. $\mathfrak{T}^{k-1}$ ist die Menge aller nicht-leeren Somen A, für die es zu jedem nicht-leeren Teilsoma S von A und jeder Umgebung U von S ein offenes Soma $V\leqslant U$ mit $V\wedge S>O$ und $\dim bV\leqslant k-2$ gibt. Bezeichnet man daher mit $\mathfrak{W}$ das System aller offenen Somen V mit $\dim bV\leqslant k-2$, so folgt aus dem Hilfssatz 2, daß $T^{k-1}=\bigvee_{\mathfrak{T}^{k-1}} A$ existiert, in $\mathfrak{T}^{k-1}$ liegt und ein G_δ ist. Es existiert dann auch das Soma $D^k=cT^{k-1}$ und ist ein F_σ. Daß (3) gilt, folgt aus der Definition von $\mathfrak{T}^{k-1}$ und aus 4.1. Hieraus folgt weiter (2).

Korollar. *Es gilt* $E=D^0\geqslant D^1\geqslant\ldots\geqslant D^{k-1}\geqslant D^k\geqslant\ldots$

Der eben bewiesene Satz ermöglicht folgende

Definition. Das durch 4.2 erklärte Soma D^k heiße der k*-te Dimensionsteil von* $\mathfrak{B}$.

Die Dimension von $\mathfrak{B}$ steht mit seinen Dimensionsteilen in folgendem Zusammenhang:

4.3. Voraussetzung: $0\leqslant n<\infty$.

Behauptung: *Es ist* $\dim\mathfrak{B}\leqslant n$, *wenn und nur wenn* $D^{n+1}=O$ ist.

Beweis. Es sei $D^{n+1}=O$. Nach 4.2 ist dann $T^n=E$, also $\mathfrak{B}$ in E höchstens n-dimensional. Definitionsgemäß bedeutet dies $\dim\mathfrak{B}\leqslant n$. Die Umkehrung dieser Schlüsse zeigt, daß aus $\dim\mathfrak{B}\leqslant n$ folgt $D^{n+1}=O$.

[11]) Die Somen D^k und T^{k-1} sind durch (2) und (3) eindeutig bestimmt.

Die nächsten Sätze betreffen die Dimension der Dimensionsteile und ihrer Komplemente.

4.4. Voraussetzung: $0 \leqslant k < \infty$.

Behauptung: *Es ist* $\dim T^{k-1} \leqslant k-1$.

Beweis. Für $k=0$ ist die Behauptung evident. Nun sei $k \geqslant 1$. Nach 4.2 (3) ist $\mathfrak{V}$ in T^{k-1} höchstens $(k-1)$-dimensional. Also gibt es zu jedem nicht-leeren Teilsoma S von T^{k-1} und jeder Umgebung U von S ein offenes Soma $V \leqslant U$ mit $V \wedge S > O$ und $\dim \mathrm{b}V \leqslant k-2$. Nun ist $\mathrm{b}V \wedge T^{k-1} \leqslant \mathrm{b}V$, also $\dim \mathrm{b}V \wedge T^{k-1} \leqslant k-2$. Aus 2.3 folgt jetzt die Behauptung.

4.5. Voraussetzung: $0 \leqslant k < \infty$; $D^k > O$.

Behauptung: *Es ist* $\dim D^k \geqslant k-1$.

Statt 4.5 beweisen wir den folgenden, schärferen Satz:

4.5a. Voraussetzung: $0 \leqslant k < \infty$; $D^k > O$.

Behauptung: *Für jedes nicht-leere, in D^k offene Soma U^k ist* $\dim U^k \geqslant k-1$.

Beweis (Menger [2], S. 135-137, „Zweites Fundamentaltheorem"). Für $k=0$ ist die Behauptung trivial, weil jedes Soma mindestens (-1)-dimensional ist. Nun sei $k \geqslant 1$ und es sei ein nicht-leeres, in D^k offenes Soma U^k vorgelegt. Es gibt dann ein (in $\mathfrak{V}$) offenes Soma U_0 mit $U^k = U_0 \wedge D^k$. Nach 4.2 ist nun $\mathfrak{V}$ in $U_0 \wedge \mathrm{c}D^k$ (falls dieses Soma nicht leer ist) höchstens $(k-1)$-dimensional. Hieraus und aus der Regularität von $\mathfrak{V}$ folgt, daß es zu jedem nicht-leeren Teilsoma P von $U_0 \wedge \mathrm{c}D^k$ und jeder Umgebung U von P ein offenes Soma W mit $W \wedge P > O$, $\overline{W} \leqslant U_0 \wedge U$ und $\dim \mathrm{b}W \leqslant k-2$ gibt. Bezeichnet man nun mit $\mathfrak{W}$ das System dieser Somen W für jedes nicht-leere Teilsoma P von $U_0 \wedge \mathrm{c}D^k$ und jede Umgebung U von P, so enthält $\mathfrak{W}$ (weil $\mathfrak{V}$ eine abzählbare Basis besitzt) ein abzählbares Teilsystem $\mathfrak{W}_0 = \{W_1, W_2, \ldots\}$ derart, daß es zu jedem nicht-leeren Teilsoma P von $U_0 \wedge \mathrm{c}D^k$ und jeder Umgebung U von P ein W_i mit $W_i \wedge P > O$, $\overline{W}_i \leqslant U_0 \wedge U$ und $\dim \mathrm{b}W_i \leqslant k-2$ gibt (Beweis analog wie für 1.2). Setzt man dann $\bigvee_{i=1}^{\infty} \mathrm{b}W_i = B$, so ist $\dim B \leqslant k-2$ nach 3.3 und $B \leqslant U_0$; weiter gilt, wenn $U_0 \wedge \mathrm{c}D^k \wedge \mathrm{c}B = A$ gesetzt wird, $\dim A \leqslant O$. Wendet man nun den Hilfssatz von Seite 296 auf das Soma A an, so erhält man mit Berücksichtigung der Regularität von $\mathfrak{V}$ zu jedem nicht-leeren Soma $S \in \mathfrak{V}$, also erst recht zu jedem nicht-leeren Soma $P \leqslant U_0$ und zu jeder Umgebung U von P ein offenes Soma V mit $\overline{V} \leqslant U_0 \wedge U$, $V \wedge P > O$ und $\dim \mathrm{b}V \wedge A = -1$. Für jedes solche V ist $\mathrm{b}V \leqslant U_0$ und $\mathrm{b}V \wedge A = O$, also $\mathrm{b}V \leqslant (U_0 \wedge D^k) \vee B$. — Wäre nun im Gegensatz zur Behauptung $\dim U_0 \wedge D^k \leqslant k-2$, so auch $\dim (U_0 \wedge D^k) \vee B \leqslant k-2$. D^k ist nämlich nach 4.2 ein F_σ, $U_0 \wedge D^k$ also ein F_σ in U_0 und (wegen $(U_0 \wedge D^k) \vee B \leqslant U_0$) auch ein F_σ in $(U_0 \wedge D^k) \vee B$; B ist definitionsgemäß ein F_σ, also auch ein F_σ in $(U_0 \wedge D^k) \vee B$; infolgendessen ist $(U_0 \wedge D^k) \vee B$ Vereinigung abzählbar vieler, in $(U_0 \wedge D^k) \vee B$ abgeschlossener Somen, die auf Grund der Annahme $\dim U_0 \wedge D^k \leqslant k-2$ und der Beziehung $\dim B \leqslant k-2$ sämtlich höchstens $(k-2)$-dimensional wären, so daß sich nach 3.3 in der Tat $\dim (U_0 \wedge D^k) \vee B \leqslant k-2$ ergäbe. Insbesondere wäre dann auch nach 2.1 $\dim \mathrm{b}V \leqslant k-2$ für jedes der oben bestimmten Somen V. Das hieße aber, daß $\mathfrak{V}$ in U_0 höchstens $(k-1)$-dimensional wäre, und dies bedeutete $U_0 \wedge D^k = O$ nach 4.2 im Widerspruch zur Voraussetzung $U^k > O$. Die Annahme $\dim U_0 \wedge D^k \leqslant k-2$ ist demnach falsch, es ist vielmehr $\dim U_0 \wedge D^k \geqslant k-1$.

4.6. Voraussetzung: *$\mathfrak{V}$ sei kompakt*; $0 \leqslant k < \infty$; $D^k > O$.

Behauptung: *Es ist* $\dim D^k \geqslant k$.

Beweis. Auf Grund der Voraussetzung ist $\mathfrak{V}$ atomar (Nöbeling [3], Satz 12.2 und 12.5). Es sei nun E' die Menge aller Atome von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{E}'$ der Mengenverband aller Teilmengen von E'. Für jedes Soma $A \in \mathfrak{V}$ sei $A' = \Phi A$ die Menge aller Atome $P \leqslant A$. Dann ist Φ ein Isomorphismus von $\mathfrak{V}$ auf einen Unterverband $\mathfrak{V}'$ von $\mathfrak{E}'$ (derart, daß für jede Somenfamilie $(A_i)_{i \in \mathfrak{J}}$ aus $\mathfrak{V}$, für welche $\bigvee A_i$ bzw. $\bigwedge A_i$ existiert, $\Phi \bigvee A_i = \bigcup \Phi A_i$ bzw. $\Phi \bigwedge A_i = \bigcap \Phi A_i$ ist und daß für jedes Soma $A \in \mathfrak{V}$ $\Phi \mathrm{c}A = E' - \Phi A$ gilt). Das System aller Mengen ΦB_i, wobei B_i eine abzählbare Basis von $\mathfrak{V}$ durchläuft, sei eine Basis von $\mathfrak{E}'$. Hierdurch wird $\mathfrak{E}'$ zu einem klassisch-topologischen Raum, und zwar zu einem kompakten, regulären T_1-Raum mit abzählbarer Basis. Φ ist eine Homöomorphie von $\mathfrak{V}$ auf $\mathfrak{V}'$; die Φ-Bilder der offenen (abgeschlossenen) Somen von $\mathfrak{V}$ sind die offenen (abgeschlossenen) Mengen von $\mathfrak{E}'$.

Beachtet man nun noch, daß im atomaren Fall die Begriffe „höchstens n-dimensional" (Seite 290) und „höchstens k-dimensional in A" (Seite 297) sich nicht ändern, wenn man l. c. für S nur Atome zuläßt, so ergibt sich erstens, daß für ein Soma $A \in \mathfrak{V}$ stets gilt $\dim A = \dim \Phi A$ (letztere Dimension in $\mathfrak{E}'$ (nicht in $\mathfrak{V}'$) genommen), zweitens, daß $\mathfrak{V}$ in einem Atom P dann und nur dann höchstens k-dimensional ist, wenn $\mathfrak{E}'$ in ΦP höchstens k-dimensional ist, und drittens, daß $D'^k = \Phi D^k$ der k-te Dimensionsteil von $\mathfrak{E}'$ ist.

Nun ist nach Menger [2] (Seite 128) $\dim D'^k \geqslant k$. Wegen $\dim D^k = \dim D'^k$ ist also $\dim D^k \geqslant k$.

§ 5. Überdeckungssätze

In diesem Paragraphen liege wieder ein S-Verband $\mathfrak{V}$ vor.

Definition. A sei ein beliebiges Soma.

(a) Ein System $\mathfrak{U}$ offener (bzw. abgeschlossener) Somen heiße eine *offene* (bzw. *abgeschlossene*) *Überdeckung von A*, wenn A kein zu allen $U \in \mathfrak{U}$ fremdes Soma $> O$ enthält.

(b) Eine Überdeckung $\mathfrak{U}$ heiße *endlich*, wenn $\mathfrak{U}$ nur endlich viele Elemente U enthält.

(c) Eine endliche, offene (bzw. abgeschlossene) Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_1, \dots, U_s\}$ heiße *vom Grade* $\leqslant n$, wenn entweder $s \leqslant n+1$ ist oder je $n+2$ verschiedene Somen U_i einen leeren Durchschnitt haben.

(d) Sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ zwei beliebige Systeme irgend welcher Somen von $\mathfrak{B}$, so heiße $\mathfrak{T}$ *$\mathfrak{S}$-fein* oder eine *Verfeinerung von* $\mathfrak{S}$, wenn jedes Soma $\epsilon\, \mathfrak{T}$ in einem Soma $\epsilon\, \mathfrak{S}$ enthalten ist.

Die Beziehungen zwischen dem Grad „beliebig feiner" Überdeckungen und der Dimension von E sind Gegenstand des Satzes 5.1. Im Hinblick auf den ersten Hilfssatz und die Tatsache, daß E abgeschlossen ist, bleibt es dabei gleichgültig, ob offene oder abgeschlossene Überdeckungen betrachtet werden. Beschränkt man sich auf die Eigenschaften beliebig feiner abgeschlossener Überdeckungen, so läßt sich die Aussage des Satzes 5.1 in einer gewissen Weise verallgemeinern (5.2).

Hilfssatz 1. *Es sei A ein beliebiges Soma. Damit es zu einer endlichen, offenen Überdeckung $\mathfrak{U}$ von A eine endliche, $\mathfrak{U}$-feine, offene Überdeckung $\mathfrak{W}$ des Somas A vom Grade $\leqslant n$ gibt, ist hinreichend und, falls A abgeschlossen ist, auch notwendig, daß eine endliche, $\mathfrak{U}$-feine, abgeschlossene Überdeckung $\mathfrak{Z}$ des Somas A vom Grade $\leqslant n$ existiert*[12].

Beweis. (a) Hinreichend. Ist $\mathfrak{Z} = \{Z_1, \dots, Z_t\}$ eine endliche, $\mathfrak{U}$-feine, abgeschlossene Überdeckung des Somas A vom Grade $\leqslant n$, so genügt es, ein endliches $\mathfrak{U}$-feines System $\mathfrak{W} = \{W_1, \dots, W_t\}$ vom Grade $\leqslant n$, bestehend aus offenen Somen W_j mit $Z_j \leqslant W_j$ $(j = 1, \dots, t)$ zu konstruieren. Wir konstruieren W_1 folgendermaßen. Z_1 ist in einem Soma $U_i \,\epsilon\, \mathfrak{U}$ enthalten, also fremd zu $\mathrm{c}U_i$. Ebenso ist Z_1 fremd zu den endlich vielen Durchschnitten $Z_{j_0} \wedge \dots \wedge Z_{j_n}$ mit $1 < j_0 < \dots < j_n$. Also ist Z_1 fremd zur Vereinigung R_1 von $\mathrm{c}U_i$ und allen diesen Durchschnitten. R_1 ist abgeschlossen; da $\mathfrak{B}$ normal ist, existiert daher ein offenes Soma W_1 mit $Z_1 \leqslant W_1$ und $\overline{W}_1 \wedge R_1 = O$. Dann ist $\{\overline{W}_1, Z_2, \dots, Z_t\}$ ein $\mathfrak{U}$-feines System vom Grade $\leqslant n$. Analog definieren wir jetzt, ausgehend von $\{\overline{W}_1, Z_2, \dots, Z_t\}$ statt von $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_t\}$, ein offenes Soma W_2 mit $Z_2 \leqslant W_2$ derart, daß $\{\overline{W}_1, \overline{W}_2, Z_3, \dots, Z_t\}$ ein $\mathfrak{U}$-feines Somensystem vom Grade $\leqslant n$ ist. Usw. Nach t Schritten ist das gewünschte Somensystem $\mathfrak{W} = \{W_1, \dots, W_t\}$ konstruiert.

(b) Notwendig. Es sei A abgeschlossen und $\mathfrak{W} = \{W_1, \dots, W_s\}$ eine endliche, $\mathfrak{U}$-feine, offene Überdeckung des Somas A vom Grade $\leqslant n$. Dann existiert eine offene Überdeckung $\{V_1, \dots, V_s\}$ von A mit $\overline{V}_i \leqslant W_i$ für jedes $i = 1, \dots, s$ (Nöbeling [3], Korollar 1 zu Satz 11.12), und das System $\mathfrak{Z} = \{\overline{V}_1, \dots, \overline{V}_s\}$ hat die verlangten Eigenschaften.

[12]) Für diesen Satz braucht $\mathfrak{B}$ nur als klassisch-topologischer normaler Boole-Verband vorausgesetzt zu werden.

5.1. Voraussetzung: $-1 \leqslant n < \infty$.

Behauptung: *Es ist* $\dim \mathfrak{B} \leqslant n$, *wenn und nur wenn zu jeder endlichen offenen Überdeckung $\mathfrak{U}$ von E eine endliche, $\mathfrak{U}$-feine, offene Überdeckung des Somas E vom Grade $\leqslant n$ existiert.*

Beweis: Siehe Satz 3.9 und R. Sikorski [4] (Satz 3.5, S. 163).

Hilfssatz 2. *A sei ein beliebiges Soma, $-1 \leqslant n < \infty$. Ist $\dim A \leqslant n$, so gibt es zu jeder endlichen offenen Überdeckung $\mathfrak{U} = \{U_1, \dots, U_s\}$ von A eine offene Überdeckung $\{V_1, \dots, V_s\}$ des Somas A vom Grade $\leqslant n$ derart, daß $V_i \leqslant U_i$ für $i = 1, \dots, s$.*

Beweis wörtlich wie Hurewicz-Wallman [1], S. 53-54, Bem. A) u. B) sowie Theorem V. 1, wenn „set" durch „Soma" und „Decomposition Theorem" durch „Satz 3.6" ersetzt wird.

Hilfssatz 3. *A sei ein abgeschlossenes Soma, $-1 \leqslant n < \infty$. Ist $\dim A \leqslant n$, so gibt es zu jeder endlichen offenen Überdeckung $\{U_1, \dots, U_m\}$ von E eine offene Überdeckung $\{W_1, \dots, W_m\}$ von E derart, daß $\overline{W}_i \leqslant U_i$ für $i = 1, \dots, m$ und daß $A \wedge \overline{W}_{i_1} \wedge \dots \wedge \overline{W}_{i_{n+2}}$ leer ist für je $n+2$ verschiedene Somen W_{i_ν}.*

Beweis wörtlich wie K. Menger [2], S. 161, wobei der dort genannte „Hilfssatz 1" dem obigen Hilfssatz 2 entspricht.

Hilfssatz 4. *Ist $\mathfrak{F}$ ein System endlich vieler abgeschlossener Somen F von endlicher Dimension, so gibt es zu jeder endlichen offenen Überdeckung $\{U_1, \dots, U_m\}$ von E eine abgeschlossene Überdeckung $\mathfrak{A} = \{A_1, \dots, A_m\}$ von E derart, daß $A_k \leqslant U_k$ für $k = 1, \dots, m$ und daß, wenn F irgend ein Soma von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{A}_r$ irgend ein aus r Somen bestehendes Untersystem von $\mathfrak{A}$ bedeutet, $\dim F \wedge \bigwedge_{\mathfrak{A}_r} A_k \leqslant \dim F - (r-1)$ ist. (Falls dabei $\dim F - (r-1) < -1$, so ist $\dim F \wedge \bigwedge_{\mathfrak{A}_r} A = -1$ zu setzen).*

Beweis wörtlich wie K. Menger [2], S. 170-172. Dabei ist zu ersetzen: „R" durch „E"; „Hilfssatz 1′ v. S. 160" durch „obiger Hilfsatz 3"; „Korollar des Summensatzes v. S. 113" durch „Satz 3.7 für $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_M$, $p = n-1$, $q = 0$"; „Korollar des Summensatzes v. S. 115" durch „Satz 3.4"; „Bemerkung v. S. 66" durch „Sikorski [4], S. 185"; „Bedingung c) v. S. 172" durch „$M \wedge \overline{V}_{i_1} \wedge \dots \wedge \overline{V}_{i_{n+2}}$ ist leer für je $n+2$ verschiedene Somen $\overline{V}_{i_\nu}$".

5.2. Voraussetzung: $-1 \leqslant n < \infty$; $2 \leqslant k \leqslant n+2$.

Behauptung: *Es ist* $\dim \mathfrak{B} \leqslant n$, *wenn und nur wenn zu jeder endlichen offenen Überdeckung $\mathfrak{U}$ von E eine endliche, $\mathfrak{U}$-feine, abgeschlossene Überdeckung $\mathfrak{A}$ von E existiert, deren Elemente zu je k einen höchstens $(n-k+1)$-dimensionalen Durchschnitt besitzen.*

Beweis. (a) Wenn (Menger [2], S. 181). Es sei die Bedingung des Satzes für zwei der Voraussetzung genügende, vorgelegte Zahlen n, k

erfüllt. Ferner sei $\mathfrak{U}$ irgend eine endliche offene Überdeckung von E und $\mathfrak{A}=\{A_1,\dots,A_s\}$ eine endliche, $\mathfrak{U}$-feine, abgeschlossene Überdeckung von E, bei welcher $\dim \bigwedge_{\mathfrak{A}_k} A_i \leqslant n-k+1$ ist für jedes aus k Elementen bestehende Untersystem $\mathfrak{A}_k$ von $\mathfrak{A}$. Die Vereinigung der Durchschnitte $\bigwedge_{\mathfrak{A}_k} A_i$ für alle (endlich vielen) Untersysteme $\mathfrak{A}_k$ von $\mathfrak{A}$ werde mit S_k bezeichnet. Nach 3.3 gilt dann $\dim S_k \leqslant n-k+1$; nach dem obigen Hilfssatz 2 gibt es also eine endliche, $\mathfrak{U}$-feine, offene Überdeckung $\mathfrak{U}'=\{U_1',\dots,U_t'\}$ des Somas S_k vom Grade $\leqslant n-k+1$. Da S_k abgeschlossen ist, gibt es weiter zu $\mathfrak{U}'$ eine (endliche, $\mathfrak{U}$-feine) offene Überdeckung $\{W_1,\dots,W_t\}$ von S_k derart, daß $\overline{W}_j \leqslant U_j'$ für jedes $j=1,2,\dots,t$. Das System $\mathfrak{W}=\{\overline{W}_1,\dots,\overline{W}_t\}$ ist $\mathfrak{U}'$-fein und daher eine endliche, $\mathfrak{U}$-feine, abgeschlossene Überdeckung des Somas S_k vom Grade $\leqslant n-k+1$. Setzt man nun

$$V_i = A_i \wedge c\bigvee_{j=1}^{t} \overline{W}_j \quad \text{für} \quad i=1,2,\dots,s,$$

so ist $\bigvee_{i=1}^{s}\overline{V}_i \vee \bigvee_{j=1}^{t}\overline{W}_j = E$; da ferner $V_i \leqslant A_i$, also $\overline{V}_i \leqslant \overline{A}_i = A_i$ und $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{U}$-fein ist, so ist das System $\mathfrak{A}'=\{\overline{V}_1,\dots,\overline{V}_s,\overline{W}_1,\dots,\overline{W}_t\}$ eine endliche, $\mathfrak{U}$-feine, abgeschlossene Überdeckung von E. Wir behaupten, daß $\mathfrak{A}'$ vom Grade $\leqslant n$ ist. Sind irgend $n+2$ Elemente von $\mathfrak{A}'$ vorgelegt, so kommen entweder mindestens k der s Somen $\overline{V}_i$ oder höchstens $k-1$ der s Somen $\overline{V}_i$ darunter vor. Im ersten Fall ist der Durchschnitt dieser $\overline{V}_i$ wegen $\overline{V}_i \leqslant A_i$ in einem $\bigwedge_{\mathfrak{A}_k} A_i$, mithin in S_k und daher in $\bigvee_{j=1}^{t} W_j$ enthalten und ist infolgedessen zu jedem $\overline{V}_1,\dots,\overline{V}_t$ fremd; der genannte Durchschnitt ist also leer. Im zweiten Fall kommen unter den $n+2$ vorgelegten Elementen von $\mathfrak{A}'$ mindestens $(n+2)-(k-1)=n-k+3$ der t Somen $\overline{W}_j$ vor; deren Durchschnitt aber ist leer, weil $\mathfrak{W}$ vom Grade $\leqslant n-k+1$ war. Also ist $\mathfrak{A}'$ vom Grade $\leqslant n$, wie behauptet wurde. Nach dem Hilfssatz 1 (Seite 302) gibt es nun zu $\mathfrak{A}'$ eine endliche, $\mathfrak{U}$-feine, offene Überdeckung des Somas E vom Grade $\leqslant n$, und hieraus folgt, da $\mathfrak{U}$ eine beliebige endliche offene Überdeckung von E war, $\dim \mathfrak{B} \leqslant n$ nach 5.1.

(b) Nur wenn. Bezeichnet man mit $\mathfrak{F}$ das aus dem einen Soma E bestehende System, so folgt aus $\dim E = \dim \mathfrak{B} \leqslant n$ die Behauptung auf Grund des obigen Hilfssatzes 4.

§ 6. Trennung fremder Somen; Zusammenhang

Wir untersuchen in diesem Paragraphen die folgenden Trennungseigenschaften eines topologischen Boole-Verbandes $\mathfrak{B}$ [13]):

[13]) Vergl. zu (1)-(3) die Trennungsaxiome T_2-T_4 bei Nöbeling [3], § 11.

(3) *Je zwei fremde abgeschlossene Somen sind durch ein höchstens $(n-1)$-dimensionales abgeschlossenes Soma getrennt; d. h. zu je zwei fremden abgeschlossenen Somen A', A'' gibt es ein abgeschlossenes Soma B und zwei fremde offene Somen G', G'' derart, daß $cB = G' \vee G''$, $A' \leqslant G'$, $A'' \leqslant G''$ und* $\dim B \leqslant n-1$ *ist.*

(2) *Zu je zwei fremden Somen A', A'', wo A' nicht-leer und A'' abgeschlossen ist, gibt es ein abgeschlossenes Soma B und zwei offene Somen G', G'' derart, daß $cB = G' \vee G''$, $G' \wedge A' > O$, $A'' \leqslant G''$ und* $\dim B \leqslant n-1$ *ist.*

(1) *Zu je zwei fremden nicht-leeren Somen A', A'' gibt es ein abgeschlossenes Soma B und zwei fremde, offene Somen G', G'' derart, daß $cB = G' \vee G''$, $A' \wedge G' > O$, $A'' \wedge G'' > O$ und* $\dim B \leqslant n-1$ *ist.*

Außerdem untersuchen wir die folgende Zusammenhangseigenschaft von $\mathfrak{B}$:

(0) *E ist $(n+1)$-stufig zusammenhanglos.*

Dabei wird folgendermaßen definiert:

Definition. (a) Ein Soma A heiße *mindestens n-stufig zusammenhängend (in $\mathfrak{B}$)* $(1 \leqslant n < \infty)$, wenn A nicht-leer und kein Atom ist und wenn zu je zwei in A abgeschlossenen Somen K, L mit $A = K \vee L$, $O < K < A$ und $O < L < A$ das Soma $K \wedge L$ ein mindestens $(n-1)$-stufig zusammenhängendes Teilsoma enthält. Mindestens 0-stufig zusammenhängend heiße jedes nicht-leere Soma.

(b) Ein Soma A heiße *n-stufig zusammenhanglos (in $\mathfrak{B}$)* $(1 \leqslant n < \infty)$, wenn A nicht-leer ist und kein (in $\mathfrak{B}$) mindestens n-stufig zusammenhängendes Teilsoma enthält. 0-stufig zusammenhanglos heiße das leere Soma und nur dieses.

Nach dieser Definition gilt offenbar Folgendes: Die mindestens 1-stufig zusammenhängenden Somen, die Atome (falls vorhanden) und das Nullsoma sind zusammenhängend. 1-stufig zusammenhanglos ist ein Soma, das nicht-leer ist und außer Atomen und dem Nullsoma keine zusammenhängenden Somen enthält, das also mit anderen Worten „zusammenhangslos" (Menger [2], S. 202) bzw. „totally disconnected" (Hurewicz-Wallman [1], S. 15) ist.

Die Sätze dieses Paragraphen behandeln die Beziehungen der Eigenschaften (3)-(0) zueinander und zur Dimension von $\mathfrak{B}$.

6.1. Voraussetzung: $0 \leqslant n < \infty$.

Behauptung: *Damit* $\dim \mathfrak{B} \leqslant n$ *sei, ist hinreichend und, falls $\mathfrak{B}$ regulär ist, auch notwendig, daß* (2) *gilt.*

Beweis. (a) Hinreichend. $\mathfrak{B}$ habe die Eigenschaft (2); S sei ein nicht-leeres Soma und U eine Umgebung von S. Dann ist cU abgeschlossen und zu S fremd. Zu $A'=S$ und $A''=cU$ existiert also ein Tripel paarweise fremder Somen B,G',G'' mit den in (2) angegeben Eigenschaften. Aus $S=A'$ folgt $S\wedge G'>O$. Wegen $cU=A''\leqslant G''$ ist $cG''\leqslant U$, wegen $G'\leqslant cG''$ also $G'\leqslant U$. Aus $\mathrm{b}G'\leqslant B$ und $\dim B\leqslant n-1$ folgt $\dim \mathrm{b}G'\leqslant n-1$. Also ist $\dim\mathfrak{V}\leqslant n$.

(b) Notwendig. Es sei $\dim\mathfrak{V}\leqslant n$; ferner seien A',A'' zwei fremde Somen, A' nicht-leer und A'' abgeschlossen. Dann ist $U=cA''$ eine Umgebung von A'. Zu A' und U existiert also wegen der Regularität von $\mathfrak{V}$ ein offenes Soma U' mit $\overline{U}'\leqslant U$ und $U'\wedge A'>O$. Weiter gibt es wegen $\dim\mathfrak{V}\leqslant n$ zu $U'\wedge A'$ und U' ein offenes Soma $V\leqslant U'$ mit $V\wedge A'\geqslant V\wedge(U'\wedge A')>O$ und $\dim \mathrm{b}V\leqslant n-1$. Setzt man nun $\mathrm{b}V=B$, $V=G'$ und $c\overline{V}=G''$, so haben die Somen B,G',G'' die in (2) geforderten Eigenschaften.

6.2. Voraussetzung: $0\leqslant n<\infty$.

Behauptung: *Damit* $\dim\mathfrak{V}\leqslant n$ *sei, ist hinreichend und, falls* $\mathfrak{V}$ *ein* S*-Verband ist, auch notwendig, daß* (3) *gilt.*

Beweis: Satz 3.8 für $A=E$.

6.3. Voraussetzung: $0\leqslant n<\infty$.

Behauptung: *Ist* $\mathfrak{V}$ T_1*-topologisch, so folgt* (1) *aus* (2) *und* (2) *aus* (3). *Ist* $\mathfrak{V}$ *außerdem regulär, so folgt noch* (0) *aus* (1).

Beweis. Die erste Behauptung folgt unmittelbar daraus, daß in einem T_1-topologischen Boole-Verband jedes nicht-leere Soma ein abgeschlossenes Soma $>O$ enthält.

Zum Beweis der zweiten Behauptung sei $\mathfrak{V}$ regulär und T_1-topologisch. Es sei zunächst $n=0$ und es werde angenommen, daß zwar (1), aber nicht (0) gilt. Dann ist E nicht 1-stufig zusammenhanglos, es gibt also ein mindestens 1-stufig zusammenhängendes Soma A. Definitionsgemäß ist A nicht-leer und kein Atom. Infolgedessen enthält A ein nicht--leeres Teilsoma A' derart, daß das Soma $A''=A\wedge cA'$ ebenfalls nicht--leer ist. Zu A',A'' existiert nun ein Tripel paarweise fremder Somen B,G',G'' mit den in (1) angegebenen Eigenschaften. Wegen $\dim B\leqslant -1$ ist dabei $B=O$ und folglich $A\leqslant G'\vee G''$. Wir setzen $A\wedge G'=K$ und $A\wedge G''=L$. Dann sind die Somen K,L in A abgeschlossen und nicht-leer und es ist $A=K\vee L$, $K<A$, $L<A$. Da nun A mindestens 1-stufig zusammenhängend ist, muß in $K\wedge L$ ein mindestens 0-stufig zusammenhängendes, also nicht-leeres Teilsoma enthalten sein. Wegen $K\wedge L\leqslant G'\wedge G''$ steht dies aber im Widerspruch dazu, daß G' und G'' fremd sind. Also ist A nicht mindestens 1-stufig zusammenhängend und E ist in der Tat 1-stufig zusammenhanglos.

Nun sei die Folgerung (1)$\to$(0) für $0\leqslant n\leqslant m-1$ bereits bewiesen und es werde angenommen, daß für $n=m$ zwar (1), aber nicht (0) gilt.

Dann ist E nicht $(m+1)$-stufig zusammenhanglos; es gibt also ein mindestens $(m+1)$-stufig zusammenhängendes Soma A. A ist erst recht mindestens 1-stufig zusammenhängend, also nicht-leer und kein Atom. Wie oben gibt es daher zwei nicht-leere fremde Teilsomen A',A'' von A, zu denen ein Tripel paarweise fremder Somen B,G',G'' mit den in (1) angegebenen Eigenschaften existiert. Setzt man dann $(G'\vee B)\wedge A=K$ und $(G''\vee B)\wedge A=L$, so sind die Somen K,L nicht-leer und in A abgeschlossen und es gilt $A=K\vee L$, $K<A$, $L<A$ sowie $K\wedge L\leqslant B$. Aus $\dim B\leqslant m-1$ folgt nun $\dim K\wedge L\leqslant m-1$; für $n=m-1$ gilt daher in dem regulären T_1-topologischen Boole-Verband $\mathfrak{V}_{K\wedge L}$ nach 6.1 die Bedingung (2) und somit auch (1). Der Induktionsvoraussetzung zufolge ist daher $K\wedge L$ m-stufig zusammenhanglos und enthält also kein mindestens m-stufig zusammenhängendes Teilsoma. Andererseits muß aber $K\wedge L$ auf Grund der Eigenschaften von K und L und auf Grund dessen, daß A mindestens $(m+1)$-stufig zusammenhängend ist, ein mindestens m-stufig zusammenhängendes Teilsoma enthalten. Dies ist ein Widerspruch. Es folgt also auch für $n=m$ aus (1) die Eigenschaft (0). Damit ist 6.3 vollständig bewiesen.

Für S-Verbände folgt nach 6.1 und 6.2 auch (3) aus (2); die Schlüsse (0)$\to$(1) und (1)$\to$(2) sind aber, wie aus den bei Hurewicz-Wallman [1] (S. 20) angeführten Gegenbeispielen hervorgeht, im allgemeinen nicht richtig.

6.4. Voraussetzung: $\mathfrak{V}$ *sei ein kompakter* S*-Verband*; $0\leqslant n<\infty$.

Behauptung: *Die Bedingungen* (3), (2), (1), (0) *und* $\dim\mathfrak{V}\leqslant n$ *sind äquivalent.*

Beweis. Auf Grund der Sätze 6.2 und 6.3 genügt es nachzuweisen, daß $\mathfrak{V}\leqslant n$ aus (0) folgt. Wie im Beweis von 4.6 ist $\mathfrak{V}$ atomar und homöomorph zu einem Unterverband $\mathfrak{V}'$ eines klassisch-topologischen, kompakten, regulären T_1-Raumes $\mathfrak{E}'$ mit abzählbarer Basis, wobei die Φ-Bilder der offenen (abgeschlossenen) Somen von $\mathfrak{V}$ die offenen (abgeschlossenen) Mengen von $\mathfrak{E}'$ sind und $\dim A=\dim\Phi A$ für jedes $A\in\mathfrak{V}$ gilt.

Beachtet man nun, daß für eine beliebige nicht-leere Menge $M'\in\mathfrak{E}'$ und für jede Zerlegung von $\overline{M}'$ in zwei nicht-leere, abgeschlossene, echte Teilmengen K',L' von $\overline{M}'$ die Mengen $K'\cap M'$ und $L'\cap M'$ nicht-leere, in M' abgeschlossene, echte Teilmengen von M' sind, daß infolgedessen mit M' auch $\overline{M}'$ mindestens k-stufig zusammenhängend in $\mathfrak{E}'$ ist ($k\geqslant 1$), so ergibt sich, daß E dann und nur dann k-stufig zusammenhanglos in $\mathfrak{V}$ ist, wenn E' k-stufig zusammenhanglos in $\mathfrak{E}'$ ist. Gilt also (0) in $\mathfrak{V}$, so ist E' $(n+1)$-stufig zusammenhanglos in $\mathfrak{E}'$; nach Menger [2] (S. 213 für $n=0$, S. 216 für $n\geqslant 1$) folgt hieraus $\dim\mathfrak{E}'\leqslant n$, wegen $\dim E=\dim E'$ also $\dim\mathfrak{V}\leqslant n$, w. z. b. w.

§ 7. Das Verhalten der Dimension bei Abbildungen

7.1. Voraussetzung: *$\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ seien zwei S-Verbände, Φ ein stetiger, abgeschlossener Vollhomomorphismus von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}'$; $0 \leqslant n < \infty$; $0 \leqslant n' < \infty$.*

Behauptung: *Ist $\dim \mathfrak{B} = n$, $\dim \mathfrak{B}' = n'$ und $n \leqslant n'$, so gibt es in $\mathfrak{B}'$ mindestens ein nicht-leeres Soma A' derart, daß im Urbild $\Phi^{-1}B'$ eines jeden nicht-leeren Teilsomas B' von A' mindestens $n'-n+1$ paarweise fremde, nicht-leere Somen enthalten sind.*

Beweis (Menger [2], S. 237-240). Wir bezeichnen für jedes nicht-leere Soma $A' \in \mathfrak{B}'$ mit $\varkappa(A') \leqslant \infty$ das Supremum aller Zahlen $\varkappa$ derart, daß im Urbild $\Phi^{-1}B'$ eines jeden nicht-leeren Teilsomas B' von A' mindestens $\varkappa$ paarweise fremde, nicht-leere Teilsomen enthalten sind, und mit k das Supremum der Zahlen $\varkappa(A')$ für alle $A' \in \mathfrak{B}'$. Für jedes $A' \in \mathfrak{B}'$ gilt dann $1 \leqslant \varkappa(A') \leqslant k$. Ist $k = \infty$, so ist der Satz evident. Bei endlichem k besagt die Behauptung, daß $k \geqslant n'-n+1$ oder $n' \leqslant n+k-1$ ist; sie kann in der letzten Form durch Induktion nach $n+k$ bewiesen werden.

Es sei $n+k=1$, also $n=0$, $k=1$; dann ist $n'=0$ nachzuweisen. A'_1 und A'_2 seien zwei fremde abgeschlossene Somen von $\mathfrak{B}'$. Die Somen $A_1 = \Phi^{-1}A'_1$ und $A_2 = \Phi^{-1}A'_2$ von $\mathfrak{B}$ sind dann fremd und abgeschlossen; nach 6.2 folgt daher aus $\dim \mathfrak{B} = 0$ die Existenz zweier fremder offener Somen G_1, G_2 von $\mathfrak{B}$ mit $E = G_1 \vee G_2$, $A_1 \leqslant G_1$ und $A_2 \leqslant G_2$. Wir betrachten nun die Somen $G'_1 = \Phi G_1$ und $G'_2 = \Phi G_2$ von $\mathfrak{B}'$. Weil Φ abgeschlossen ist und die Somen G_1, G_2 in $\mathfrak{B}$ abgeschlossen sind, sind die Somen G'_1 und G'_2 in $\mathfrak{B}'$ abgeschlossen. Aus $A_1 \leqslant G_1$ und $A_2 \leqslant G_2$ folgt $A'_1 \leqslant G'_1$ und $A'_2 \leqslant G'_2$. Ferner gilt $G'_1 \vee G'_2 = \Phi G_1 \vee \Phi G_2 = \Phi(G_1 \vee G_2) = \Phi E = E'$. Nimmt man schließlich an, es wäre $G'_1 \wedge G'_2 > O'$, so ist $\varkappa(G'_1 \wedge G'_2)$ definiert und $=1$ wegen $k=1$. Also existiert ein nicht-leeres Teilsoma B' von $G'_1 \wedge G'_2$, in dessen Urbild $\Phi^{-1}B'$ keine zwei fremden nicht-leeren Teilsomen enthalten sind. Andererseits gibt es, da $B' \leqslant G'_1 = \Phi G_1$ und Φ ein Vollhomomorphismus ist, ein Soma $B_1 \leqslant G_1$ mit $\Phi B_1 = B'$ und entsprechend wegen $B' \leqslant G'_2$ ein Soma $B_2 \leqslant G_2$ mit $\Phi B_2 = B'$ (Nöbeling [3], Satz 3.6). Wegen $B' > O'$ ist $B_1 > O$ und $B_2 > O$; wegen $G_1 \wedge G_2 = O$ gilt $B_1 \wedge B_2 = O$; ferner ist $B_1 \leqslant \Phi^{-1}B'$ und $B_2 \leqslant \Phi^{-1}B'$. Das Soma $\Phi^{-1}B'$ enthält also zwei fremde, nicht-leere Somen im Widerspruch zur Definition von B'. Die Annahme $G'_1 \wedge G'_2 > O'$ ist demnach falsch, es ist vielmehr $G'_1 \wedge G'_2 = O'$. G'_1 und G'_2 sind infolgedessen offen und es ist $\dim \mathfrak{B}' \leqslant 0$ nach 6.2, also $\dim \mathfrak{B}' = 0$. Damit ist der Satz für $n+k=1$ bewiesen.

Der Satz sei nun für $1 \leqslant n+k \leqslant m-1$ bereits bewiesen und es sei $n+k=m$. Ferner seien zwei fremde abgeschlossene Somen A'_1, A'_2 von $\mathfrak{B}'$ vorgelegt. Wir wollen in $\mathfrak{B}'$ ein abgeschlossenes Soma B' und zwei fremde, offene Somen G'_1, G'_2 derart konstruieren, daß $cB' = G'_1 \vee G'_2$, $A'_1 \leqslant G'_1$, $A'_2 \leqslant G'_2$ und $\dim B' \leqslant m-2$ ist. Dann folgt nämlich nach 6.2 $\dim \mathfrak{B}' \leqslant m-1$,

d. h. $n' \leqslant n+k-1$; der Satz gilt dann also auch für $n+k=m$, was zu zeigen ist.

Wie oben sind die Somen $A_1 = \Phi^{-1}A'_1$ und $A_2 = \Phi^{-1}A'_2$ von $\mathfrak{B}$ fremd und abgeschlossen. Wegen $\dim \mathfrak{B} \leqslant n$ existieren also nach 6.2 in $\mathfrak{B}$ ein abgeschlossenes Soma B und zwei fremde offene Somen G_1, G_2 mit $cB = G_1 \vee G_2$, $A_1 \leqslant G_1$, $A_2 \leqslant G_2$ und $\dim B \leqslant n-1$. Dabei kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\bar{G}_1 \vee \bar{G}_2 = E$ angenommen werden (um dies zu erweisen, braucht man nur G_2 durch $c\bar{G}_1$ und B durch bG_1 zu ersetzen). Wegen $\bar{G}_1 \wedge \bar{G}_2 \leqslant B$ ist $\dim \bar{G}_1 \wedge \bar{G}_2 \leqslant n-1$. Setzt man nun

$$\Phi\bar{G}_1 = M'_1, \qquad \Phi\bar{G}_2 = M'_2,$$

$$M'_1 \wedge M'_2 = B', \qquad M'_1 \wedge cB' = G'_1, \qquad M'_2 \wedge cB' = G'_2,$$

so ist B' abgeschlossen in $\mathfrak{B}'$ und G'_1, G'_2 sind abgeschlossen in cB' (weil Φ abgeschlossen ist). Weiter ist $G'_1 \wedge G'_2 = O'$ und $G'_1 \vee G'_2 = cB'$, weil $\Phi\bar{G}_1 \vee \Phi\bar{G}_2 = \Phi(\bar{G}_1 \vee \bar{G}_2) = \Phi E = E'$; die Somen G'_1, G'_2 sind folglich offen in $\mathfrak{B}'$. Ferner gilt $A'_1 \leqslant G'_1$, weil erstens $A_1 \leqslant \bar{G}_1$, also $A'_1 = \Phi A_1 \leqslant \Phi\bar{G}_1 = M'_1$, zweitens $A_1 \wedge \bar{G}_2 = O$, also $A'_1 \wedge \Phi\bar{G}_2 = O'$, also $A'_1 \wedge M'_2 = O'$, und drittens $M'_1 \wedge cM'_2 = G'_1$ ist. Schließlich gilt $A'_2 \leqslant G'_2$ aus analogen Gründen. Wir haben jetzt also nur noch $\dim B' \leqslant m-2$ zu zeigen.

Setzt man $\Phi^{-1}M'_2 = N$, so gilt $\Phi(\bar{G}_1 \wedge N) = \Phi\bar{G}_1 \wedge \Phi N$ [14]) $= M'_1 \wedge M'_2 = B'$ und $\bar{G}_2 \leqslant N$. Das Soma N von $\mathfrak{B}$ ist abgeschlossen, da M'_2 abgeschlossen ist. Infolgedessen ist das Soma $(\bar{G}_1 \wedge N) \wedge c(\bar{G}_1 \wedge \bar{G}_2) = \bar{G}_1 \wedge N \wedge c\bar{G}_2$ als Durchschnitt des abgeschlossenen Somas $\bar{G}_1 \wedge N$ mit dem F_σ-Soma $c\bar{G}_2$ ein F_σ. Es sei etwa $(\bar{G}_1 \wedge N) \wedge c(\bar{G}_1 \wedge \bar{G}_2) = \bigvee_{i=1}^{\infty} P_i$, also $\bar{G}_1 \wedge N = (\bar{G}_1 \wedge \bar{G}_2) \vee \bigvee_{i=1}^{\infty} P_i$, wo P_i für $i = 1, 2, \ldots$ abgeschlossen ist. Aus der zweiten Beziehung folgt wegen $\Phi(\bar{G}_1 \wedge N) = B'$

$$B' = \Phi(\bar{G}_1 \wedge \bar{G}_2) \vee \bigvee_{i=1}^{\infty} \Phi P_i,$$

wobei jeder Summand der rechten Seite als Bild eines abgeschlossenen Somas selbst abgeschlossen ist.

Der Vollhomomorphismus Φ, nur auf dem S-Verband $\mathfrak{B}_{\bar{G}_1 \wedge \bar{G}_2}$ betrachtet, ist ein Vollhomomorphismus von $\mathfrak{B}_{\bar{G}_1 \wedge \bar{G}_2}$ auf den S-Verband $\mathfrak{B}'_{\Phi(\bar{G}_1 \wedge \bar{G}_2)}$. Da $\dim \bar{G}_1 \wedge \bar{G}_2 \leqslant n-1$ ist, ergibt die Induktionsvoraussetzung $\dim \Phi(\bar{G}_1 \wedge \bar{G}_2) \leqslant m-2$.

Wir betrachten nun ein Soma P_i. Ist $P_i = O$, so ist $\Phi P_i = O'$ und daher $\dim \Phi P_i \leqslant m-2$. Nun sei $P_i > O$ (also $\Phi P_i > O'$). Wir behaupten wieder $\dim \Phi P_i \leqslant m-2$. Hierzu betrachten wir den Vollhomomorphismus Φ nur auf dem S-Verband $\mathfrak{W} = \mathfrak{B}_{P_i}$; er ist ein Vollhomomorphismus von $\mathfrak{W}$ auf den S-Verband $\mathfrak{W}' = \mathfrak{B}'_{\Phi(P_i)}$. Es ist $\dim \mathfrak{W} \leqslant n$; die $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$

[14]) Nöbeling [3], Satz 3.5.

entsprechende Zahl k, wir bezeichnen sie mit l, ergibt sich aus den folgenden Überlegungen. Aus $P_i \leqslant \bar{G}_1 \wedge N \wedge c\bar{G}_2$ folgt $P_i \wedge \bar{G}_2 = O$ sowie $P_i \leqslant N$, also $\Phi P_i \leqslant \Phi N = M_2' = \Phi \bar{G}_2$. Bestünde nun für ein nicht-leeres Teilsoma S' von ΦP_i die Gleichung $\bar{G}_2 \wedge \Phi^{-1} S' = O$, so wäre

$$\Phi \bar{G}_2 \wedge S' = \Phi \bar{G}_2 \wedge \Phi \Phi^{-1} S' = \Phi(\bar{G}_2 \wedge \Phi^{-1} S') = \Phi O = O'$$

im Widerspruch zur Relation $S' \leqslant \Phi P_i \leqslant \Phi \bar{G}_2$. Infolgedessen gilt für jedes nicht-leere Teilsoma S' von ΦP_i die Beziehung $\Phi^{-1} S' \wedge \bar{G}_2 > O$, während $P_i \wedge \bar{G}_2 = O$ ist. Die beiden letzten Relationen besagen nun, daß das Urbild $\Phi^{-1} S'$ eines jeden nicht-leeren Teilsomas S' von ΦP_i ein zu P_i fremdes, nicht-leeres Teilsoma enthält. Hieraus folgt $l \leqslant k-1$. Wir können daher die Induktionsvoraussetzung auf die Verbände $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ anwenden und erhalten $\dim \Phi P_i \leqslant m-2$.

Es ist somit B' die Vereinigung abzählbar vieler, in $\mathfrak{B}'$ und daher in B' abgeschlossener, höchstens $(m-2)$-dimensionaler Somen; nach 3.3 gilt also $\dim B' \leqslant m-2$, was zu zeigen war:

7.2. Voraussetzung: *$\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ seien zwei kompakte S-Verbände, Φ ein stetiger, abgeschlossener Vollhomomorphismus von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}'$, $0 \leqslant n < \infty$, $0 \leqslant n' < \infty$.*

Behauptung: *Ist $\dim \mathfrak{B} = n$, $\dim \mathfrak{B}' = n'$ und $n \geqslant n'$, so gibt es in $\mathfrak{B}'$ mindestens ein nicht-leeres Soma A' derart, daß für jedes nicht-leere Teilsoma B' von A' $\dim \Phi^{-1} B' \geqslant n-n'$ ist.*

Beweis. Wie im Beweis von 4.6. ist $\mathfrak{B}$ atomar und homöomorph zu einem Unterverband eines klassisch-topologischen, kompakten, regulären T_1-Raumes mit abzählbarer Basis. Identifiziert man die Somen von $\mathfrak{B}$ mit ihren Bildern in diesem Raum, so ist $\mathfrak{B}$ Unterverband eines klassisch-topologischen, kompakten, regulären T_1-Raumes $\mathfrak{E}$ mit abzählbarer Basis derart, daß die offenen (abgeschlossenen) Somen von $\mathfrak{B}$ die offenen (abgeschlossenen) Mengen von $\mathfrak{E}$ sind und daß für jedes Soma von $\mathfrak{B}$ die in $\mathfrak{B}$ genommene Dimension gleich der in $\mathfrak{E}$ genommenen ist. Entsprechend ist $\mathfrak{B}'$ Unterverband eines Raumes $\mathfrak{E}'$ mit den gleichen Eigenschaften. Durch die im vorliegenden Satz vorausgesetzte Abbildung Φ ist nun jedem Atom P von $\mathfrak{B}$ (also von $\mathfrak{E}$) eindeutig ein Atom ΦP von $\mathfrak{B}'$ (also von $\mathfrak{E}'$), und jedem Soma A von $\mathfrak{B}$ die Menge ΦA aller Atome ΦP von $\mathfrak{B}'$ mit $P \leqslant A$ zugeordnet. Ordnet man daher jeder Menge $M \in \mathfrak{E}$ die Menge ΨM aller Atome $\Phi P \in \mathfrak{E}'$ mit $P \leqslant M$ zu, so ist Ψ ein stetiger, abgeschlossener Vollhomomorphismus von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{E}'$ derart, daß $\Psi A = \Phi A$ für jedes Soma $A \in \mathfrak{B}$ und $\Psi^{-1} A' = \Phi^{-1} A'$ für jedes $A' \in \mathfrak{B}'$ ist.

Nun ist $\dim \mathfrak{E} = n$, $\dim \mathfrak{E}' = n'$ und $n \geqslant n'$. Nach K. Menger [2] (S. 235) gibt es daher mindestens ein Atom $P' \in \mathfrak{E}'$ mit $\dim \Psi^{-1} P' \geqslant n-n'$ (diese Dimension in $\mathfrak{E}$ genommen). Weil P' zu $\mathfrak{B}'$ gehört, ist $\Psi^{-1} P' = \Phi^{-1} P'$ und $\dim \Phi^{-1} P' \geqslant n-n'$ (diese Dimension in $\mathfrak{B}$ genommen). Da P' kein nicht-leeres echtes Teilsoma enthält, leistet P' das in 7.2 Verlangte.

Zitate

[1] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton 1948.

[2] K. Menger, *Dimensionstheorie*, Leipzig 1928.

[3] G. Nöbeling, *Grundlagen der Analytischen Topologie*, Heidelberg-Göttingen-Berlin 1954.

[4] R. Sikorski, *Closure algebras*, Fund. Math. 36 (1949), p. 165-206.

[5] — *Dimension theory in closure algebras*, Fund. Math. 38 (1951), p. 153-166.

Reçu par la Rédaction le 15. 10. 1954