Zur Eigenschaft primitiv-rekursiver Funktionen, unendlich viele Werte anzunehmen

von

W. Markwald (Münster)

Es sei $\varphi(k,n)$ eine allgemein-rekursive Funktion, die für die primitiv-rekursiven universell ist. Die Menge

$$Y=E_k[\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\varphi(k,n)=\infty]$$

besteht dann aus allen Zahlen [1] k, die (im Sinne von φ) primitiv-rekursive Funktionen mit unendlichem Wertbereich repräsentieren. Mostowski hat gezeigt [2], daß Y eine nicht rekursiv aufzählbare $\Pi\Sigma$-Menge ist und die Frage gestellt, ob Y auch eine $\Sigma\Pi$-Menge ist [3]. Wir wollen zeigen, daß *Y im allgemeinen nicht in $\Sigma\Pi$ liegen kann.*

1. *$\sigma_1(q)$, $\sigma_2(q)$ seien die primitiv-rekursiven Umkehrfunktionen der primitiv-rekursiven Funktion $\sigma(m,n)=2^m(2n+1)-1$, die die geordneten Zahlenpaare umkehrbar eindeutig auf alle Zahlen abbildet. $P(x,y,z)$ sei ein beliebiges dreistelliges primitiv-rekursives Prädikat. Dann ist die durch*

$$f(z,0)=\sigma(0,0),$$

$$f(z,n+1)=\begin{cases}\sigma\Big(\sigma_1\big(f(z,n)\big)+1,0\Big), & \textit{falls } P\Big(\sigma_1\big(f(z,n)\big),\sigma_2\big(f(z,n)\big),z\Big),\\ \sigma\Big(\sigma_1\big(f(z,n)\big),\sigma_2\big(f(z,n)\big)+1\Big) & \textit{sonst},\end{cases}$$

definierte Funktion $f(z,n)$ offenbar primitiv-rekursiv, ebenso wie die Funktion $g(z,n)=\sigma_1\big(f(z,n)\big)$. Es gilt

$$(x)(\exists y)P(x,y,z)\leftrightarrow\lim_{n\to\infty}g(z,n)=\infty\,.$$

Beweis. Es sei z fest vorgegeben. Man sieht unmittelbar, daß $g(z,n)$ einen Abschnitt der Zahlen oder alle Zahlen aufzählt, und daß stets $g(z,n)\leqslant g(z,n+1)$ ist. — Wir gehen nun auf beiden Seiten der Äquivalenz

[1]) Unter *Zahlen* sind hier stets natürliche Zahlen $(0,1,2,\ldots)$ verstanden.

[2]) A. Mostowski [4]. Vgl. die Bibliographie am Schluß.

[3]) Nicht rekursiv-aufzählbare $\Pi\Sigma$-Mengen können bekanntlich noch im Mengenkörper über Σ oder in $\Sigma\Pi$ liegen.

zur Negation über. So sei etwa $\lim_{n\to\infty}g(z,n)=r$ und n_0 das kleinste n, für das $g(z,n)=r$. Dann ist $\sigma_1\big(f(z,n_0)\big)=r$, $\sigma_2\big(f(z,n_0)\big)=0$ und $f(z,n_0+y)=\sigma(r,y)$ für alle y. Folglich für alle $y\sim P(r,y,z)$, also $(\exists x)(y)\sim P(x,y,z)$. — Sei andererseits $(\exists x)(y)\sim P(x,y,z)$ angenommen und x_0 die kleinste Zahl, für die $(y)\sim P(x_0,y,z)$. Dann gibt es, wie eine einfache Induktion zeigt, ein n_0, so daß $f(z,n_0)=\sigma(x_0,0)$. Dann aber ist für alle y $f(z,n_0+y)=\sigma(x_0,y)$, $g(z,n_0+y)=x_0$, also $g(z,n)\leqslant x_0$ für alle n.

2. Wir definieren ein *dreistelliges Prädikat* $R(s,u,v)$ durch:

s ist Gödelnummer eines einstelligen primitiv-rekursiven Schemas, und der Wert für das Argument u ist v; oder s ist kein solches Schema, und $v=0$.

R ist bekanntlich primitiv-rekursiv, und die Funktion $\varphi(s,n)=\mu v[R(s,n,v)]$ ist allgemein-rekursiv und universell für die primitiv-rekursiven Funktionen.

t sei eine vorgegebene Zahl. $s_P(t)$ sei die Gödelnummer des primitiv-rekursiven Gleichungsschemas, das aus dem Schema für $g(z,n)$ durch Einsetzen einer t bezeichnenden Ziffer für die Variable z entsteht. Nach bekannten Sätzen ist $s_P(t)$ eine primitiv-rekursive Funktion von t [1].

3. Zusammenfassend erhalten wir

$$(x)(\exists y)P(x,y,t)\leftrightarrow\lim_{n\to\infty}\varphi\big(s_P(t),n\big)=\infty,$$
$$\leftrightarrow s_P(t)\in Y.$$

Wäre nun Y eine $\Sigma\Pi$-Menge, also etwa durch $(\exists x)(y)Q(x,y,z)$ (Q rekursiv) definierbar, so wäre auch die durch $(x)(\exists y)P(x,y,z)$ definierte Menge $\Sigma\Pi$-definierbar:

$$(x)(\exists y)P(x,y,z)\leftrightarrow(\exists x)(y)Q\big(x,y,s_P(z)\big).$$

Da P beliebig war, ließe sich also *jede $\Pi\Sigma$-Menge* auch in der $\Sigma\Pi$-Form definieren, was dem bekannten Existenzsatz ([2], [3]) widerspricht.

Zitate

[1] S. C. Kleene, *On notation for ordinal numbers*, J. Symbolic Logic 3 (1938), s. 153.

[2] — *Recursive predicates and quantifiers*, Trans. Amer. Math. Soc. 53 (1943), S. 49.

[3] A. Mostowski, *On definable sets of positive integers*, Fundamenta Mathematicae 34 (1946), S. 96.

[4] — *A lemma concerning recursive functions and its applications*, Bull. Acad. Polon. Sc. 1 (1950), S. 280.

Reçu par la Rédaction le 15. 6. 1954