Quelques applications des principes topologiques à la géométrie des corps convexes

par

H. Steinhaus (Wrocław)

Nous appelons *corps convexe V* un domaine de l'espace, limité par une surface fermée S telle que par tout point R de S on peut mener un plan $\Pi(R)$ et un seul ayant avec S seulement R en commun.

Voici les trois principes servant de base pour la plupart des applications qui suivent:

(I) Théorème de Poincaré et Brouwer. *Il est impossible de définir sur la surface S d'un corps convexe V une fonction continue $D=f(R)$ qui attribue à tout point R de S une droite D passant par R et située dans le plan $\Pi(R)$.*

(II) Théorème de Ulam et Borsuk. *Toute représentation continue de la surface sphérique sur le plan attribue à une paire d'antipodes au moins e même point du plan comme image.*

(III) Théorème *sur la non-existence dans l'espace euclidien R_3 d'une image biunivoque et continue du plan projectif.*

Le théorème (I) a été formulé ci-dessus dans une version qui diffère de son énoncé habituel en ce qu'elle parle de droites tangentes et non pas de rayons tangents. Cette généralisation est facile à déduire de la version classique.

Les théorèmes (II) et (III) ont été établis assez de fois pour qu'ils puissent être admis ici sans démonstrations.

Le théorème (II) peut être appliqué à une surface quelconque homéomorphe à la surface sphérique pourvu que l'on y définit un antipodisme. Or, la correspondance biunivoque et continue qui existe par hypothèse entre les deux surfaces permet de définir les antipodes sur la surface générale comme les images des antipodes de la sphère; cette définition donne immédiatement la généralisation cherchée du théorème (II). Remarquons d'ailleurs que dans le cas de la surface S d'un corps convexe V on obtient la correspondance cherchée en prenant un point quelconque O intérieur à V comme centre d'une sphère Ω et en attribuant à tout point P de S comme image le point P' de Ω, où la demi-droite OP perce Ω, et vice-versa.

Je dois le premier exemple d'une application du théorème (I) à la géométrie différentielle à H. Auerbach qui a remarqué que ce théorème conduit à l'existence d'un point ombilical sur toute surface fermée et convexe remplissant les conditions de régularité que l'on admet habituellement dans la géométrie classique. En effet, en supposant que l'indicatrice de Dupin, qui existe en hypothèse en tout point de la surface, soit partout une ellipse qui ne se dégénère jamais en un cercle, on voit que l'axe majeur de cette indicatrice fournit l'exemple de la fonction $D=f(P)$ dont l'existence est exclue par (I). — Ce raisonnement ne prouve que l'existence d'un seul point ombilical. Le théorème (I) ne peut servir à démontrer qu'il y en a au moins deux. En effet, on connait un exemple fort simple d'une fonction $D=f(P)$ définie et continue sur toute la sphère sauf à un point. On peut donc demander s'il existe une surface fermée, convexe et régulière, ayant un seul point ombilical. La réponse est négative mais la seule démonstration connue est difficile.

Avant d'aborder le sujet propre de notre Note nous allons énoncer et démontrer trois lemmes bien simples.

(IV) *L'ensemble $\{E\}$ des plans dont la somme contient un domaine D de l'espace a la puissance du continu.*

En effet, si cette puissance était différente du continu, il existerait parmi tous les plans coupant D un plan E' n'appartenant pas à $\{E\}$. Ce plan E' coupe D suivant un domaine plan D' et — par hypothèse — tout point de D' appartient à la somme des ensembles E. Il en résulte que, P étant un point quelconque de D', il existe un plan $E(P)$ appartenant à $\{E\}$ et passant par P. Or $E(P)$ coupe E' suivant une droite d, il faut donc que l'ensemble de droites obtenues par l'intersection des éléments de $\{E\}$ avec E' recouvre D'. Je dis que l'ensemble $\{d\}$ de ces droites a la puissance du continu. S'il avait une autre puissance, le raisonnement de tout à l'heure, réduit d'une dimension, fournirait une droite d' passant par D' sans appartenir à $\{d\}$. Or, l'ensemble $\{d\}$ recouvre D', il recouvre donc aussi le segment s de d', qui fait partie de D'. Comme il n'y a qu'un seul point de s où une droite d donnée le coupe, il faut que l'ensemble $\{d\}$ ait la puissance du continu. En retournant à l'espace nous voyons que par toute droite de l'ensemble $\{d\}$, ayant la puissance du continu et situé dans un plan étranger à $\{E\}$, passe un plan de $\{E\}$ — en répétant le raisonnement de tout à l'heure on voit que $\{E\}$ a la puissance du continu, c. q. f. d.

L'idée de cette démonstration est due à M. J. Mikusiński.

(V) *L'ensemble $\{L\}$ des droites dont la somme contient un domaine D de l'espace a la puissance du continu.*

Supposons le contraire. Comme l'ensemble de droites coupant D a la puissance du continu, il y a une droite L_0 coupant D et n'appartenant pas à $\{L\}$. Soit s le segment de L_0 appartenant à D; par hypothèse, par tout point P de s passe une droite $L(P)$ de $\{L\}$. Or, pour $P_1 \neq P_2$ les droites $L(P_1)$ et $L(P_2)$ sont différentes, car leur identité impliquerait $L_0 = L(P_1) \epsilon \{L\}$. Il y a donc dans $\{L\}$ un sous-ensemble $\{\underset{P \epsilon S}{L(P)}\}$ de puissance du continu, ce qui démontre que la négation de (V) implique (V).

(VI) *Si la fonction $P = f(D)$, définie pour toutes les droites du faisceau plan F dont O est le centre, est continue et si elle attribue à toute droite D du faisceau un point appartenant à D, il existe une droite D_0 telle que $O = f(D_0)$.*

La démonstration du lemme (VI) est bien simple. Supposons $f(D) \neq O$ pour chaque D de F. Soit C la circonférence de rayon 1 avec le centre O et appelons P' le point de C situé sur le rayon OP. Comme $P = f(D)$, on aura $P' = g(D)$ et g sera encore une fonction continue dans F, ce qui implique que l'ensemble $\{P'\}$ de toutes les valeurs de cette fonction est un sous-ensemble fermé de C. D'autre part, toute droite D de F coupe C en deux points dont l'un P' appartient à $\{P'\}$, l'autre Q' à $\{Q'\}$. Il est évident que l'on obtient $\{Q'\}$ en tournant $\{P'\}$ d'un angle π autour de O, ce qui montre la congruence des ensembles en question. Ainsi la circonférence C apparaît décomposée en deux parties non vides fermées et disjointes, ce qui est impossible.

Passons maintenant à notre sujet.

(1) *Par tout point intérieur P de V on peut mener un plan Π tel que le centre de gravité de la section découpée dans V par Π coïncide avec P.*

Démonstration. Supposons que le centre de gravité en question $Q(\Pi)$ soit différent de P quel que soit le plan Π mené par P. Soient Π_1, Π_2 les deux plans tangents à S et parallèles à Π, et P_1, P_2 les points respectifs de contact de Π_1 et Π_2 avec S. En menant par P_1 et par P_2 deux droites parallèles à la droite déterminée par P et $Q(\Pi)$, et en attribuant au symbole Π toutes ses valeurs, on obtient une fonction continue $D = f(R)$ dont la variable R parcourt S et dont la valeur D est une droite touchant S en R, ce qui est incompatible avec le théorème (I).

(2) *Il existe au moins un point P à l'intérieur de V par lequel on peut mener deux sections différentes ayant P pour leurs centres de gravité respectifs.*

Démonstration. Soit P_0 un point intérieur quelconque. Soit $\{\Pi\}$ l'ensemble de toutes les sections planes menées par P_0. Soit, en général, $Q = f(\Pi)$ le centre de gravité de la section découpée dans V par Π. La fonction $f(\Pi)$ fournit une représentation continue de l'ensemble $\{\Pi\}$ sur un ensemble $\{Q\}$. En supposant que la fonction f prend toujours deux valeurs différentes pour deux arguments Π différents, cette représentation est biunivoque. D'autre part il existe, d'après le principe du dualisme de la géométrie projective, une correspondance biunivoque et bicontinue entre le plan projectif composé de points et le faisceau $\{\Pi\}$; il en résulte donc une telle correspondance entre l'ensemble ponctuel $\{Q\}$ et le plan projectif, ce qui est en contradiction avec le théorème (III); il faut donc qu'il existe deux sections Π_1 et Π_2 passant par P_0 dont les centres de gravité respectifs Q_1 et Q_2 soient identiques.

Définition. Nous appelons un point Q, interieur à V, *point d'ordre n*, si n est le nombre cardinal de l'ensemble des sections ayant Q pour centre de gravité.

Nous venons de démontrer que tout point intérieur de V est d'ordre 1 au moins et qu'il y en a dont l'ordre est au moins 2. Ces derniers seront appelés *singuliers*. Toute section dont le centre de gravité est singulier sera nommée *singulière*.

Or, le point P_0 employé à la démonstration de (2) était un point intérieur quelconque. Il s'ensuit que la somme de toutes les sections singulières remplit tout l'intérieur de V. Il en résulte, vu le lemme (2), que

(3) *L'ensemble de sections singulières a la puissance du continu.*

(4) *L'ensemble de points singuliers est de la puissance du continu, ou bien il y a des points singuliers dont l'ordre est $\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}$ = puissance du continu).*

Démonstration. A tout point singulier P correspond un ensemble $M(P)$ de sections singulières pour lesquelles P est le centre de gravité. Or, $M(P)$ est un ensemble fermé, la puissance de $M(P)$ ne peut donc être que finie, $\aleph_0$ ou $\mathfrak{c}$. D'autre part il est évident que pour $P \neq Q$ les ensembles $M(P)$ et $M(Q)$ sont disjoints. Il s'ensuit que dans la somme $\sum M(P)$, étendue à tous les points singuliers P, les termes sont disjoints. Or, cette somme E est l'ensemble de toutes les sections singulières et on tire de

$$(*) \qquad M(P) = E$$

et de (3)

$$(**) \qquad \sum \operatorname{card} M(P) = \operatorname{card} E,$$

ce qui implique que le nombre de termes à gauche de (**) est $\mathfrak{c}$ ou bien qu'il y en a au moins un égal à $\mathfrak{c}$, c. q. f. d.

L'ellipsoïde fournit l'exemple d'un corps convexe qui n'a qu'un seul point singulier — ce point est d'ordre $\mathfrak{c}$.

Passons au problème de *sections justes* — nous appelons ainsi toute section plane divisant le corps en deux parties de volumes égaux. Il est évident que l'on peut mener par une droite donnée quelconque au moins une section juste.

(5) *Il y a des droites par lesquelles on peut mener au moins deux sections justes différentes.*

Démonstration. Soit P un point quelconque et $\{L\}$ l'ensemble de toutes les droites passant par P. On peut mener par chaque droite L une section juste $\Pi(L)$. En supposant qu'il n'y a qu'une seule $\Pi(L)$ pour tout L, on peut regarder $\Pi(L)$ comme symbole d'une fonction continue de L — la continuité est évidente, car la section-limite des sections justes est juste elle-même. Soit Ω une sphère avec le centre P. A tout diamètre L de Ω correspond un plan $\Pi(L)$ qui coupe Ω en un cercle $K(L)$ variant d'une manière continue avec L. Soient $A(L)$ et $B(L)$ les extrémités du diamètre L; les droites tangentes à $K(L)$ dans $A(L)$ et $B(L)$ sont en même temps tangentes à la sphère. Chaque point de Ω étant le point de contact d'une tangente bien déterminée qui varie d'une manière continue avec le point en question, on est en contradiction avec le théorème (I); il faut donc abandonner la supposition d'unicité de $\Pi(L)$, c. q. f. d.

Appelons *singulière* toute droite par laquelle on peut mener plusieures sections justes:

(6) *L'ensemble de droites singulières a la puissance du continu.*

Démonstration. Le théorème (6) résulte du lemme (V) et de ce que l'on peut mener une droite singulière par tout point P donné d'avance, comme on l'a vu au cours de la démonstration du théorème (5).

Remarque. Les théorèmes (5) et (6) subsistent quand on entend par *section juste* une section plane divisant la surface S en deux parties d'aire égale.

Il est naturel de demander s'il y a des sections justes au sens de deux définitions à la fois. Il résulte d'une proposition publiée antérieurement [1]) que l'on peut mener par tout point de l'espace une telle section doublement juste. On peut donc appliquer à l'ensemble de toutes sections de ce genre le lemme (IV). On obtient ainsi le théorème

[1]) H. Steinhaus, *Sur la division des ensembles de l'espace par les plans et des ensembles plans par les cercles,* Fundamenta Mathematicae 33 (1945), p. 245-263; voir p. 255, théorème 2 et renvoi [2]).

(7) *L'ensemble de sections, divisant simultanément un corps convexe en deux parties de volume égal et d'aire égale, a la puissance du continu.*

Appelons *centrale* toute section telle que le centre de gravité du domaine qu'elle découpe dans V coïncide avec le centre de gravité du contour qu'elle découpe dans S.

(8) *On peut mener par tout point P intérieur à V une section centrale au moins.*

Démonstration. Soit $\Pi(P)$ une section quelconque passant par le point intérieur P. Elle détermine deux centres de gravité, celui du domaine et celui du contour. Supposons que ces deux points soient différents quel que soit Π; on pourra les lier par une droite $d(\Pi)$ située dans Π. En introduisant deux plans Π_1 et Π_2, tangents à S et parallèles à Π, on n'a qu'à répéter presque verbalement la dernière phrase de la démonstration du théorème (1).

(9) *Les sections centrales forment un ensemble de la puissance du continu.*

Démonstration. Lemme (IV) avec (8).

Appelons *central* tout point qui est à la fois centre de gravité du domaine et du contour, déterminés par une section plane. Le nombre cardinal de l'ensemble des sections possibles qui donnent au point P la propriété de centralité soit dit *le poids du point P.*

(10) *Il y a $\mathfrak{c}$ points centraux ou bien il y a des points centraux de poids $\mathfrak{c}$.*

Démonstration analogue à celle de (4).

(11) *Il existe toujours une section juste et centrale à la fois.*

Démonstration. A tout plan Π on peut trouver une section parallèle et juste; il n'y a qu'une seule section de ce genre, Π étant donné. Soient P et Q les deux centres de gravité (celui du domaine et celui du contour) déterminés par la section définie tout à l'heure. La droite PQ dépend d'une manière continue de Π et, pour éviter une contradiction avec le théorème (I), il faut admettre que P coïncide avec Q pour un Π au moins, c. q. f. d.

(12) *Par toute droite L passant à l'interieur de V on peut mener une section dont le centre de gravité tombe sur L.*

Démonstration. Soit F un plan fixe, orthogonal à L, et soit O le point où L perce F. Toute section $\Pi(L)$ menée par L coupe F suivant une droite D passant par O et la projection orthogonale P du centre de gravité de $\Pi(L)$ sur F tombe sur D. La fonction $P(D)$, définie par la construction précédente, étant continue, on peut appliquer le lemme (VI) pour obtenir l'existence d'une droite D_0 telle que $P(D_0)=O$; il en résulte que le plan mené par D_0 et L coupe V suivant une section dont le centre de gravité se trouve sur L, c. q. f. d.

Il est évident que le théorème reste vrai quand on entend par centre de gravité d'une section le centre de gravité du contour suivant lequel elle tranche S.

Envisageons maintenant un corps convexe dont la surface S est assujettie à des conditions de régularité garantissant en tout point P de S l'existence de rayons principaux de courbure, $R_1(P)$ et $R_2(P)$ $(R_1 \geqslant R_2)$, et leur continuité comme fonctions de P sur S. En écrivant $x=R_1(P)$, $y=R_2(P)$ on définit une représentation de S sur le plan cartésien (x,y). D'après (II), il y a sur S deux points antipodiques, P et Q, ayant une image commune (x_0, y_0). Il s'ensuit que les deux courbures principales en P et en Q sont respectivement égales. On peut rendre ce fait plus intuitif au dépens de la précision du langage en disant:

(13) *Il y a sur S deux antipodes telles que leurs voisinages infiniment proches sont congruents.*

Remarquons maintenant que l'on peut définir l'antipodisme sur S par la condition que la corde PQ passe par un point fixe O donné d'avance à l'intérieur de V. Considérons une suite $\{O_n\}$ de tels points convergente vers un point P_0 situé sur S. D'après (13), on trouve sur S une suite de points $\{P_n\}$ et une autre $\{Q_n\}$ tels que leurs voisinages respectifs sont congruents et que la corde P_nQ_n contient O_n. Comme O_n tend vers P_0 — pour $n\to\infty$ — on peut extraire de $\{P_n\}$ ou de $\{Q_n\}$ une suite partielle $\{R_{n_j}\}$ tendant vers P_0. Appelons T_{n_j} l'antipode de R_{n_j} par rapport à O_{n_j} — on peut extraire de $\{T_{n_j}\}$ une suite partielle de points, $\{T'_i\}$, tendant vers un point T' de S, leurs antipodes respectifs R'_i (par rapport aux O'_i) tendent toujours vers P_0. Il faut distinguer deux cas: 1° $T'\neq P_0$, 2° $T'=P_0$. Dans le premier cas il existe sur S un point différent de P_0 dont le voisinage est congruent à celui de P_0, dans le second cas il y a dans tout voisinage de P_0 deux points dont les voisinages respectifs sont congruents. Comme P_0 est arbitraire, on peut dire:

(14) *Les points de S peuvent être divisés en deux catégories: la première consiste de paires de points aux voisinages respectivement congruents, la deuxième de limites de telles paires.*

Exemple. Supposons que la Terre est un ellipsoïde de rotation et que le Pôle Nord soit plus applati que le Pôle Sud. Alors les Pôles appartiennent à la deuxième catégorie, tous les autres points à la première.

Reçu par la Rédaction le 1. 2. 1954

Algebraic models of axiomatic theories *)

by

H. Rasiowa (Warszawa)

Let $\mathcal{S}$ be a sentential calculus which contains the signs of disjunction, of conjunction and of implication, and perhaps some other sentential operators. We suppose that all theorems of the positive logic are theorems in $\mathcal{S}$. The system $\mathcal{S}$ determines a first order [1]) functional calculus $\mathcal{S}^*$.

The subject of the papers [10], [12] was the general algebraic method of the examination of a non-specified functional calculus $\mathcal{S}^*$, with applications to the special functional calculi: of the two-valued logic $\mathcal{S}^*_\varkappa$, of Heyting $\mathcal{S}^*_\chi$, of Lewis $\mathcal{S}^*_\lambda$, of the positive logic $\mathcal{S}^*_\pi$ and of the minimal logic $\mathcal{S}^*_\mu$.

In this paper I shall apply the method mentioned above to the study of theories formalized on the basis of a logical calculus, which may be either a functional calculus $\mathcal{S}^*$, or a functional calculus $\mathcal{S}^*$ with equality. The theories with functions are included.

The first part of this paper contains the general definition of the model of a formalized theory based on a functional calculus $\mathcal{S}^*$ (or $\mathcal{S}^*$ with equality) where $\mathcal{S}^*$ is not exactly specified. This definition is closely related to the general notion of satisfiability introduced in [10]. If $\mathcal{S}^*$ is the classical functional calculus, this definition is a generalization of the definition of the model in the usual sense, called here the *semantic model* [2]). Known theorems on models of elementary axiomatic theories based on the classical logic hold also in the general case [3]).

*) Presented to the Polish Mathematical Society in January 1954. The author wishes to thank Professor R. Sikorski for suggestions and criticisms in connection with the writing of this paper.

[1]) For the exact description of the systems $\mathcal{S}$ and $\mathcal{S}^*$ see [10], §§ 1, 2.

[2]) See [8], p. 356.

[3]) The results of the first part establish an easy generalization of the results of [10] (see also L. Henkin [1]). They can also be regarded as generalizations of some investigations of J. Łoś [4]. The majority of them are necessary for the second part, containing the essential results of this paper.