Sur une décomposition des ensembles indénombrables (II)

par

J. Popruženko (Łódź)

Dans cette Note je vais étudier la proposition suivante qui provient, elle aussi, de la conception fondamentale de Banach et Kuratowski [2] citée dans ma première note à ce sujet [4]:

PROPOSITION (K_2). *Soit E un ensemble quelconque de puissance $\mathfrak{m}$. Il existe une suite double $\{A_m^i\}$ de sous-ensembles de E satisfaisant aux conditions suivantes*:

1° $\sum_{m=1}^{\infty} A_m^i = E$ pour $i = 1, 2, \ldots$

2° $A_m^i \cdot A_{m'}^i = 0$ pour tout i et $m \neq m'$.

3° *Quelles que soient les suites infinies d'entiers positifs $\{i_s\}$ et $\{m_s\}$ dont la première est croissante, si l'on pose*

$$P_s = A_1^{i_s} + A_2^{i_s} + \ldots + A_{m_s}^{i_s},$$

on a

$$\overline{\overline{\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} P_s}} < \mathfrak{m}.$$

Il s'agit, en premier lieu, de la question de l'existence de nombres cardinaux $\mathfrak{m}$ satisfaisant à toutes les conditions de la Proposition (K_2).

Les raisonnements qui vont suivre reposent sur la notion de *convergence σ-uniforme* que j'ai introduite autre part [13]. En voici la définition:

Soit $\{f_n(x)\}$ une suite convergente de fonctions réelles définies dans un ensemble E. E_0 étant un sous-ensemble de E, nous dirons que la suite $\{f_n(x)\}$ est *σ-uniformément convergente dans* E_0 s'il existe une décomposition de la forme

$$E_0 = \sum_{s=1}^{\infty} E_s \tag{1}$$

telle que $\{f_n(x)\}$ soit uniformément convergente dans chacun des ensembles E_s ($s = 1, 2, \ldots$).

Désignons par $\mathfrak{K}$ la classe de tous les alephs $\mathfrak{n}$ (inférieurs à un aleph fixe quelconque, supposé suffisamment grand) ayant la propriété suivante:

Il existe dans tout ensemble E de puissance $\mathfrak{n}$ une suite convergente de fonctions réelles, qui n'est σ-uniformément convergente dans aucun sous-ensemble E_0 de E tel que $\overline{\overline{E}}_0 = \overline{\overline{E}}$.

Soit $\aleph_\eta$ l'aleph de M. Rothberger, symbole de la plus petite puissance des ensembles de nombres réels ayant la propriété λ et dépourvus de la propriété λ' (consulter F. Rothberger [5]). C'est un aleph indénombrable régulier, caractérisé, comme je l'ai démontré ([3], p. 32-34), par la condition double suivante:

1. Il existe dans tout ensemble E de puissance $\aleph_\eta$ au moins une suite convergente de fonctions réelles qui n'est σ-uniformément convergente dans aucun sous-ensemble E_0 de E tel que $\overline{\overline{E}}_0 = \aleph_\eta$.

2. E' étant un ensemble quelconque de puissance $< \aleph_\eta$, toute suite de fonctions réelles, définie et convergente dans E', est σ-uniformément convergente.

Il est donc démontré que la classe $\mathfrak{K}$, définie plus haut, n'est pas vide et qu'elle contient des alephs réguliers (par exemple $\aleph_\eta$ lui-même).

Ceci posé, nous pouvons démontrer le suivant

THÉORÈME I. *Pour que la Proposition* (K_2) *soit vraie, il faut et il suffit que l'on ait* $\mathfrak{m} \in \mathfrak{K}$.

Démonstration. I. Nécessité. Supposons la Proposition (K_2) vraie. La suite $\{A_m^i\}$ satisfaisant par hypothèse aux relations 1° et 2°, on construit, en reprenant le raisonnement connu de M. Sierpiński ([7], p. 278-279), une suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions réelles, convergente dans E et ayant la propriété suivante: si $H \subset E$ et si $\{f_n(x)\}$ est uniformément convergente dans H, il existe une suite d'entiers positifs $\{k_i\}$ telle que

$$H \subset \prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i}^i).$$

Supposons que $\{f_n(x)\}$ converge σ-uniformément dans un sous-ensemble E_0 de E: il existe donc une décomposition de E_0 de la forme (1). Elle entraîne, d'après la propriété de $\{f_n(x)\}$ mentionnée tout à l'heure, l'existence d'une suite double $\{k_i^{(s)}\}$ d'entiers positifs telle que

$$E_s \subset \prod_{i=1}^{\infty} (A_1^i + A_2^i + \ldots + A_{k_i^{(s)}}^i) \quad \text{pour} \quad s = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Soient $\{m_i\}$ et $\{j_s\}$ deux suites d'entiers positifs satisfaisant aux inégalités

$$k_i^{(s)} \leqslant m_i \quad \text{pour} \quad i \geqslant j_s \qquad (s = 1, 2, \ldots);$$

la famille des suites $k_1^{(s)}, k_2^{(s)}, k_3^{(s)}, \dots$ $(s=1,2,\dots)$ étant dénombrable, on sait que de telles suites existent. On a alors, pour une valeur de s fixe,

$$A_1^i+A_2^i+\dots+A^i_{k_i^{(s)}}\subset A_1^i+A_2^i+\dots+A^i_{m_i} \tag{3}$$

pour $i=j_s, j_s+1, j_s+2, \dots$

Posons

$$P_i=A_1^i+A_2^i+\dots+A^i_{m_i}. \tag{4}$$

Les formules (2), (3) et (4) donnent

$$E_s\subset\prod_{i=j_s}^{\infty}(A_1^i+A_2^i+\dots+A^i_{k_i^{(s)}})\subset\prod_{i=j_s}^{\infty}P_i,$$

donc, à plus forte raison,

$$E_s\subset\underline{\mathrm{Lim}}_{i\to\infty}\,P_i,$$

et, s étant arbitraire,

$$E_0=\sum_{s=1}^{\infty}E_s\subset\underline{\mathrm{Lim}}_{i\to\infty}\,P\,,$$

d'où il résulte, d'après 3°, $\overline{\overline{E}}_0<\mathfrak{m}$.

Nous avons ainsi démontré que la suite convergente $\{f_n(x)\}$ n'est σ-uniformément convergente dans aucun sous-ensemble de E de puissance $\mathfrak{m}$. En d'autres termes: $\mathfrak{m}\in\mathfrak{K}$.

II. Suffisance. Supposons maintenant que l'on ait $\mathfrak{m}\in\mathfrak{K}$.

D'après la définition de la classe $\mathfrak{K}$, il existe une suite de fonctions $\{g_n(x)\}$, convergente dans E, qui n'est σ-uniformément convergente dans aucun sous-ensemble de E de puissance $\mathfrak{m}=\overline{\overline{E}}$. On peut évidemment supposer que

$$\lim_{n\to\infty}g_n(x)=0\,.$$

Posons

$$k_i^x=\textit{le premier indice tel que } |g_n(x)|<\frac{1}{i} \textit{ pour } n\geqslant k_i^x, \tag{5}$$

$$A_m^i=\mathop{E}_{x}\{x\in E, k_i^x=m\}. \tag{6}$$

La suite double $\{A_m^i\}$ de sous-ensembles de E ainsi définie satisfait évidemment aux conditions 1° et 2°. Démontrons qu'elle satisfait aussi à 3°.

Les symboles $\{i_s\}$, $\{m_s\}$ et P_s ayant le sens précisé plus haut (voir la condition 3°), considérons l'ensemble

$$Q_s=\prod_{p=0}^{\infty}(A_1^{i_{s+p}}+A_2^{i_{s+p}}+\dots+A^{i_{s+p}}_{m_{s+p}}),$$

s étant un entier quelconque $\geqslant 1$. La relation $x\in Q_s$ entraîne

$$x\in A_1^{i_{s+p}}+A_2^{i_{s+p}}+\dots+A^{i_{s+p}}_{m_{s+p}}$$

pour tout $p\geqslant 0$, ce qui donne d'après (5) et (6),

$$g_n(x)<\frac{1}{i_{s+p}}\quad\text{pour}\quad n\geqslant m_{s+p},\quad p\geqslant 0.$$

On en conclut, d'après $\lim\limits_{s\to\infty}i_s=\infty$, que la suite $\{g_n(x)\}$ converge uniformément dans Q_s. Elle converge donc σ-uniformément dans l'ensemble

$$\sum_{s=1}^{\infty}Q_s=\underline{\mathrm{Lim}}_{s\to\infty}\,P_s$$

d'où il résulte que

$$\overline{\overline{\underline{\mathrm{Lim}}_{s\to\infty}P_s}}<\mathfrak{m}.$$

La suite $\{A_m^i\}$ satisfait donc à la condition 3°.

Notre Théorème est ainsi démontré en même temps que l'existence de pareilles décompositions (en vertu de $\mathfrak{K}\neq 0$).

Banach et Kuratowski ont, les premiers, attiré l'attention sur le fait que les ensembles A_m^i qui figurent dans leur décomposition (voir [2], p. 128) ne peuvent être, tous à la fois, mesurables par rapport à aucune mesure abstraite $\varphi(X)$ $(X\subset E)$, disparaissant sur les points et satisfaisant à la condition $0<\varphi(E)<\infty$ (S. Banach [1]). L'égalité $\aleph_1=2^{\aleph_0}$ implique donc l'existence d'une infinité d'ensembles que l'on peut appeler absolument incommensurables.

Nous allons démontrer cette existence sans prémisses hypothétiques, mais dans des conditions plus restrictives.

Désignons par Φ_E la famille de toutes les mesures extérieures abstraites non-nulles $\varphi(X)$, définies pour $X\subset E$ et assujetties à la condition suivante, essentielle pour notre démonstration:

$$\varphi(X)=0\quad\text{si}\quad \overline{\overline{X}}<E. \tag{$*$}$$

Φ_E n'est jamais vide si $\overline{\overline{E}}$ est un aleph régulier non dénombrable (ex.: $\varphi(X)=0$ si $\overline{\overline{X}}<\overline{\overline{E}}$ et $\varphi(X)=1$ si $\overline{\overline{X}}=\overline{\overline{E}}$).

Soit $\mathfrak{M}_\varphi$ le σ-corps des ensembles mesurables-φ [1]).

[1]) Pour préciser les notions: Φ_E est la famille de toutes les fonctions réelles d'ensemble $\varphi(X)$, définies pour $X\subset E$ et satisfaisant aux 4 conditions suivantes:

1. $\varphi(X)\geqslant 0$ et $0<\varphi(E)<\infty$,
2. $\varphi(X_1)\leqslant\varphi(X_2)$ si $X_1\subset X_2$,
3. $\varphi(\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_n)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(X_n)$,
4. $\varphi(X)=0$ si $\overline{\overline{X}}<\overline{\overline{E}}$.

La mesurabilité est comprise au sens de Carathéodory.

Supposons que l'on ait $\overline{\overline{E}}=\mathfrak{m} \in \mathfrak{K}$ et $\Phi_E \neq 0$. Dans ces conditions le théorème suivant est vrai:

THÉORÈME II.

A. *Étant donné un système fini $E_1, E_2, \ldots, E_n$ de sous-ensembles de E, il existe toujours une mesure extérieure $\varphi(X)$ appartenant à Φ_E telle que tous les ensembles E_i $(i=1,2,\ldots,n)$ soient mesurables-φ.*

B. *Il existe une suite infinie fixe $\{H_n\}$ de sous-ensembles de E ayant la propriété: quel que soit $\varphi \in \Phi_E$, la relation $H_n \notin \mathfrak{M}_\varphi$ se présente pour une infinité de valeurs de l'indice $n=n_k^{(\varphi)}$ $(k=1,2,\ldots)$, tous les ensembles $H_{n_k^{(\varphi)}}$ étant distincts.*

Démonstration. Soit $\varphi(X)$ une fonction arbitraire $\in \Phi_E$.

L'assertion A résulte du fait que, un système fini d'ensembles non-vides E_i $(i=1,2,\ldots,n)$ étant donné, on peut déterminer (effectivement [2])) un autre système, également fini, d'ensembles disjoints M_j $(j=1,2,\ldots,l)$ de sorte que tout E_i soit la somme d'un certain nombre d'entre eux. Ceci fait, deux cas seulement peuvent se présenter: soit tous les M_j, donc aussi tous les E_i, sont mesurables-φ, soit il existe un ensemble M_{j_0} non mesurable-φ. On a alors $\varphi(M_{j_0})>0$ et, d'après $(*)$, $\overline{\overline{M_{j_0}}}=\mathfrak{m}$. En posant $\varphi_0(X)=\varphi(XM_{j_0})$, on obtient une mesure extérieure qui appartient encore à Φ_E et satisfait à la condition exigée.

La démonstration de B s'appuit sur le Théorème I. En effet, la suite $\{A_m^l\}$ étant celle de la Proposition (K_2), supposons les ensembles A_m^l rangés en une suite simple, soit

$$H_n=A_{q_n}^{p_n} \qquad \left(n=2^{p_n-1}(2q_n-1)\right). \tag{7}$$

Je dis que c'est la suite recherchée.

Pour le démontrer, il suffit de vérifier les deux circonstances suivantes:

1. $\varphi \in \Phi_E$ étant quelconque, le tableau

$$\begin{aligned} E&=A_1^1+A_2^1+\ldots+A_m^1+\ldots \\ E&=A_1^2+A_2^2+\ldots+A_m^2+\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{8}$$

ne peut contenir qu'un nombre fini de lignes dont tous les termes sont mesurables-φ.

2. Aucun ensemble $A=A_m$ de puissance $\mathfrak{m}$ ne peut y apparaitre qu'un nombre fini de fois.

Ces propriétés résultent presque immédiatement des conditions 1°-3° de la Proposition (K_2), car les suppositions contraires reviennent, dans

[2]) Voir par exemple [6], p. 77.

tous les deux cas, à la possibilité de déterminer conformément à 3° deux suites d'entiers positifs $\{i_s\}$ et $\{m_s\}$ de sorte que l'on aurait pour les ensembles P_s correspondants

$$\overline{\overline{\prod_{s=1}^{\infty} P_s}}=\mathfrak{m},$$

ce qui implique une contradiction.

Ceci établi, on supprime dans (8) les lignes „mesurables" et l'on choisit de ce qui reste une suite infinie d'ensembles $A_{m'}^{l'}$ distincts et non mesurables-φ. On les retrouve dans (7) numérotés comme il était indiqué dans l'énoncé.

Le Théorème II est ainsi démontré.

Notons cette conséquence évidente:

COROLLAIRE. *Si $\mathfrak{m} \in \mathfrak{K}$, $\overline{\overline{E}}=\mathfrak{m}$, il n'existe sur E aucune „mesure absolue" non nulle, disparaissant sur les ensembles de puissance $<\mathfrak{m}$.*

Remarque. Je ne sais pas, si l'on peut remplacer dans les raisonnements précédants (définition de la famille Φ_E) la condition $(*)$ par celle-ci: $\varphi\big((p)\big)=0$ *pour* $p \in E$. Je sais seulement que cette modification conduit à l'existence d'alephs inaccessibles $<\mathfrak{m}$ (comparer S. Ulam [8]).

Travaux cités

[1] Banach, S., *Sur les suites d'ensembles excluant l'existence d'une mesure* (Note posthume rédigée par E. Marczewski). Colloquium Mathematicum 1 (1948), p. 103-108.

[2] Banach, S. et Kuratowski, C., *Sur une généralisation du problème de la mesure*, Fundamenta Mathematicae 14 (1949), p. 127-131.

[3] Popruženko, J., *Sur le phénomène de convergence de M. Sierpiński*, ce volume, p. 29-37.

[4] — *Sur une décomposition des ensembles indénombrables (I)*, ce volume, p. 146-149.

[5] Rothberger, F., *Sur un ensemble toujours de première catégorie qui est dépourvu de la propriété λ*, Fundamenta Mathematicae 32 (1939), p. 294-300.

[6] Sierpiński, W., *Algèbre des ensembles*, Warszawa-Wrocław 1951.

[7] — *Sur un théorème de MM. Banach et Kuratowski*, Fundamenta Mathematicae 14 (1929), p. 277-280.

[8] Ulam, S., *Zur Maßtheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fundamenta Mathematicae 16 (1930), p. 140-150.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 21. 1. 1954