On peut démontrer facilement que tous les théorèmes de ce travail subsistent lorsqu'on remplace la fonction min par n'importe quelle fonction réelle f de n variables réelles, non-décroissante et continue par rapport à chacune d'elles, les décompositions parfaites étant alors à entendre dans le sens relativisé suivant:

$a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ étant le point de I^n auquel la fonction f atteint son maximum, la décomposition $E=E_1+E_2+\ldots+E_n$ est *f-parfaite* lorsque

$$\mu_1(E_1):\mu_2(E_2):\ldots:\mu_n(E_n)=a_1:a_2:\ldots:a_n$$

et que, pour toute décomposition (4) de E pour laquelle

$$\mu_1(X_1):\mu_2(X_2):\ldots:\mu_n(X_n)=a_1:a_2:\ldots:a_n,$$

la condition (6) est satisfaite.

Travaux cités

[1] H. Hahn et A. Rosenthal, *Set functions*, Albuquerque 1948.

[2] B. Knaster, *Sur le problème du partage pragmatique de H. Steinhaus*, Comptes Rendus de la Société Polonaise de Mathématique, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 19 (1946), p. 228-230.

[3] B. Knaster et H. Steinhaus, *Sur le partage pragmatique*, Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Wrocław 2 (1953), communication n° 1 du 17 janvier 1947.

[4] А. А. Ляпунов, *О выборе из конечного числа законов распределения*, Успехи математических наук 6 (1951), стр. 178-186.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 18. 9. 1953

Sur une propriété des transformations des ensembles abstraits

par

J. Popruženko (Łódź)

M. Sierpiński a démontré en 1932 [1]) le théorème suivant sur les familles de transformations des ensembles linéaires:

Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ et F est une famille de puissance du continu d'ensembles linéaires de puissance du continu, il existe toujours un ensemble linéaire de puissance du continu, dont les images continues sont distinctes de tout ensemble de la famille F.

De plus, M. Sierpiński a remarqué que ce théorème peut être sans peine généralisé: „Au lieu des images continues on peut notamment prendre les images de Baire et, plus généralement, une famille quelconque de puissance du continu de transformations des ensembles à l'aide de fonctions mesurables d'une variable réelle" (loc. cit., p. 210).

Le but de la présente Note est d'établir une généralisation de ces résultats.

Soit X un ensemble d'éléments x quelconques de puissance $\overline{\overline{X}}=\mathfrak{m}>\aleph_0$ et soit $\mu^*(E)$ $(E\subset X)$ une mesure extérieure abstraite non identiquement nulle, finie et disparaissant sur les points existant sur X [2]).

Posons $\mathfrak{m}=\aleph_{\eta_0}$, où η_0 est un nombre ordinal >0. η étant un nombre ordinal de l'intervalle $0\leqslant\eta\leqslant\eta_0$, désignons par (T_η) la proposition suivante:

(T_η) *Il existe une famille de puissance $\aleph_\eta$ de sous-ensembles de X de mesure $\mu=0$ telle que la somme de tous ces ensembles soit un ensemble de mesure extérieure $\mu^*>0$.*

[1]) W. Sierpiński, *Un théorème concernant les transformations continues des ensembles linéaires*, Fund. Math. 19 (1932), p. 208.

[2]) Plus précisément: $\mu^*(E)$ est une fonction réelle arbitraire, définie pour tout $E\subset X$ et satisfaisant aux 4 conditions suivantes:

1. $\mu^*(E)\geqslant 0$ et $0<\mu^*(X)<\infty$,
2. $\mu^*(E_1)\leqslant\mu^*(E_2)$ si $E_1\subset E_2$,
3. $\mu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)$,
4. $\mu^*\big((x)\big)=0$ pour $x\in X$.

La mesurabilité est définie par l'équation fonctionnelle bien connue de Carathéodory.

La proposition (T_0) est évidemment fausse. La proposition (T_{η_0}) est vraie, car on peut prendre, pour les ensembles en question, les ensembles se composant d'un seul point x pour tout $x \in X$. Donc le premier nombre ordinal $\eta = \tau$ pour lequel (T_η) est vraie existe. Posons

$$\mathfrak{m}_0 = \aleph_\tau .$$

L'existence de ce nombre est ainsi démontrée à l'aide de l'axiome de Zermelo.

Il résulte de la définition du nombre cardinal $\mathfrak{m}_0$ que, *quelle que soit la famille de puissance* $<\mathfrak{m}_0$ *de sous-ensembles de* X *de mesure* $\mu = 0$, *il en est de même de leur somme*. En particulier, *tout ensemble de points de* X *de puissance* $<\mathfrak{m}_0$ *est de mesure* $\mu = 0$.

On a évidemment $\aleph_1 \leqslant \mathfrak{m}_0 \leqslant \mathfrak{m}$ et l'on peut voir sans peine que $\mathfrak{m}_0$ est un aleph régulier.

Soit maintenant Y un ensemble d'éléments y de puissance $\overline{\overline{Y}} = \mathfrak{n} \geqslant \mathfrak{m}$.

Désignons par Φ une famille quelconque de puissance $\mathfrak{m}_0$ se composant de sous-ensembles de Y de puissance $\geqslant \mathfrak{m}_0$, par Ψ — une famille quelconque de puissance $\mathfrak{m}_0$ de fonctions univoques $f(x) = y \in Y$, définies dans X et assujetties à la restriction unique:

(i) *quels que soient* $f \in \Psi$ *et* $y \in f(X) \subset Y$, *l'ensemble*

$$K(y) = \mathop{E}_{x} \{x \in X, f(x) = y\}$$

est mesurable-μ.

Nous allons démontrer le suivant

Théorème. *Il existe dans tout ensemble* M *de* X *de mesure extérieure* $\mu^*(M) > 0$ *un sous-ensemble* N *de puissance* $\mathfrak{m}_0$ *satisfaisant à la condition suivante:*

(*) *quels que soient* $E \in \Phi$ *et* $f \in \Psi$, *on a*

$$E - f(N) \neq 0.$$

Démonstration. Désignons par ω_τ le nombre initial de puissance $\aleph_\tau$. Soient

$$E_1, E_2, \dots, E_\omega, E_{\omega+1}, \dots, E_\xi, \dots \qquad (\xi < \omega_\tau,\ E_\xi \in \Phi) \tag{1}$$

et

$$f_1, f_2, \dots, f_\omega, f_{\omega+1}, \dots, f_\xi, \dots \qquad (\xi < \omega_\tau,\ f_\xi \in \Psi) \tag{2}$$

deux suites transfinies, formées de tous les éléments de la famille Φ, resp. Ψ.

L'ensemble de tous les couples ordonnés (α, β) de nombres ordinaux $< \omega_\tau$ étant de puissance $\aleph_\tau$, soit

$$(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_\omega, \beta_\omega), \dots, (\alpha_\xi, \beta_\xi), \dots \qquad (\xi < \omega_\tau) \tag{3}$$

une suite transfinie se composant de tous ces couples et contenant chacun d'eux une seule fois.

Soit M, $M \subset X$, un ensemble quelconque à $\mu^*(M) > 0$; il est donc, comme nous l'avons vu, $\overline{\overline{M}} \geqslant \mathfrak{m}_0$. Cet ensemble étant donné, définissons par l'induction transfinie une suite transfinie $\{P_\lambda\}$ $(\lambda < \omega_\tau)$ de sous-ensembles de M et une suite transfinie $\{p_\lambda\}$ $(\lambda < \omega_\tau)$ de points de M comme il suit.

I. $\lambda = 1$.

Pour définir l'ensemble P_1, distinguons, suivant M. Sierpiński (loc. cit., p. 206), deux cas:

1. $E_{\alpha_1} \subset f_{\beta_1}(M)$. Posons dans ce cas, pour $y \in E_{\alpha_1}$,

$$H_1(y) = \mathop{E}_{x} \{x \in M, f_{\beta_1}(x) = y\}.$$

On a évidemment

$$H_1(y) \subset \mathop{E}_{x} \{x \in X, f_{\beta_1}(x) = y\} = K_1(y). \tag{4}$$

D'après la propriété (i) et l'inclusion (4), les ensembles $H_1(y)$ $(y \subset E_{\alpha_1})$ ont séparés par les ensembles mesurables μ. Il en résulte, comme on le sait, que la mesure extérieure $\mu^*(E)$ est absolument additive sur la famille des ensembles $H_1(y)$ $(y \in E_{\alpha_1})$. Par conséquent, $\mu^*(M)$ étant un nombre fini, la relation $\mu^*[H_1(y)] > 0$ ne peut se présenter que pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de y. D'après $\overline{\overline{E}}_{\alpha_1} \geqslant \mathfrak{m}_0 > \aleph_0$, il existe un point $y = a_1 \in E_{\alpha_1}$ tel que $\mu[H_1(a_1)] = 0$.

Posons $P_1 = H_1(a_1)$.

2. $E_{\alpha_1} - f_{\beta_1}(M) \neq 0$. Dans ce cas posons $P_1 = 0$.

L'ensemble $M - P_1$ étant en tout cas non vide, désignons par p_1 un point quelconque de $M - P_1$.

II. $1 < \lambda < \omega_\tau$.

Soit λ un nombre ordinal satisfaisant à cette inégalité et supposons que l'on ait déjà défini les ensembles P_ξ et les points p_ξ pour $\xi < \lambda$ de sorte que $\sum_{\xi<\lambda} P_\xi \cdot \{p_\xi\}_{\xi<\lambda} = 0$, $p_\xi \in M$ et $p_\xi \neq p_{\xi'}$ pour $\xi \neq \xi'$ (ce qui est vrai pour $\lambda = 2$). Pour définir P_λ et p_λ, reprenons la distinction ci-dessus.

1. $E_{\alpha_\lambda} \subset f_{\beta_\lambda}(M)$. En posant, pour $y \in E_{\alpha_\lambda}$,

$$H_\lambda(y) = \mathop{E}_{x} \{x \in M, f_{\beta_\lambda}(x) = y\},$$

on constate comme plus haut qu'il existe une classe de puissance $\overline{\overline{E}}_{\alpha_\lambda} \geqslant \mathfrak{m}_0$ de contre-domaines disjoints $H_\lambda(y)$ tels que $\mu[H_\lambda(y)] = 0$. Or, l'ensemble $\{p_\xi\}_{\xi<\lambda}$ étant de puissance $<\mathfrak{m}_0$, on conclut qu'il existe une valeur $y = a_\lambda \in E_{\alpha_\lambda}$ telle que $\mu[H_\lambda(a_\lambda)] = 0$ et

$$H_\lambda(a_\lambda) \cdot \{p_\xi\}_{\xi<\lambda} = 0. \tag{5}$$

Dans ce cas on pose $P_\lambda = H_\lambda(a_\lambda)$.

2. $E_{a_\lambda} - f_{\beta_\lambda}(M) \neq 0$. Posons $P_\lambda = 0$.

L'ensemble $S_\lambda = \sum_{\xi \leqslant \lambda} P_\xi + \{p_\xi\}_{\xi<\lambda}$ étant (d'après $\mu(P_\xi)=0$, $\bar{\lambda} < \aleph_\tau$ et la définition de $\mathfrak{m}_0$) de mesure $\mu(S_\lambda)=0$, on a $M - S_\lambda \neq 0$.

Choisissons pour p_λ un point arbitraire de $M - S_\lambda$.

Les ensembles P_λ et les points p_λ sont ainsi définis pour tout nombre ordinal λ de l'intervalle $1 \leqslant \lambda \leqslant \omega_\tau$. D'après (5), vu la définition de p_λ, ils satisfont à la condition

$$\sum_{\xi \leqslant \lambda} P_\xi \cdot \{p_\xi\}_{\xi \leqslant \lambda} = 0 \qquad (1 \leqslant \lambda < \omega_\tau). \tag{6}$$

De plus, on voit d'après ce qui précède que $p_\xi \neq p_{\xi'}$ pour $\xi \neq \xi'$, $1 \leqslant \xi \leqslant \lambda, 1 \leqslant \xi' \leqslant \lambda$.

Posons

$$N = \{p_\lambda\}_{1 \leqslant \lambda < \omega_\tau}. \tag{7}$$

On a évidemment $p_\lambda \neq p_{\lambda'}$ si $\lambda \neq \lambda'$ et, d'après (6), la formule

$$\sum_{1 \leqslant \lambda < \omega_\tau} P_\lambda \cdot N = 0. \tag{8}$$

Je dis que N est l'ensemble recherché.

En effet, les relations $N \subset M$ et $\overline{\overline{N}} = \mathfrak{m}_0$ résultent immédiatement de ce qui précède. Il ne reste donc qu'à démontrer que l'ensemble N satisfait à la condition $(*)$.

Soient $E \in \Phi$ et $f \in \Psi$ choisis arbitrairement. D'après (1) et (2) on a $E = E_a$, $f = f_\beta$, a et β étant deux nombres ordinaux déterminés $< \omega_\tau$. Supposons que l'on ait

$$E_a \subset f_\beta(N). \tag{9}$$

Il existe, selon (3), un et un seul nombre ordinal $\lambda < \omega_\tau$ tel que $a = a_\lambda$ et $\beta = \beta_\lambda$. La formule (9) donne

$$E_{a_\lambda} \subset f_{\beta_\lambda}(N) \subset f_{\beta_\lambda}(M). \tag{10}$$

Le point a_λ appartenant à E_{a_λ}, il existe un point x_0 tel que

$$x_0 \in N, \qquad f_{\beta_\lambda}(x_0) = a_\lambda, \tag{11}$$

donc, d'après (10),

$$a_\lambda \in f_{\beta_\lambda}(M). \tag{12}$$

Les formules (11) et (12) entraînent, en vertu de la définition de l'ensemble P_λ, $x_0 \in P_\lambda$, contrairement à (8).

La relation (9) implique donc une contradiction, ce qui prouve que l'on a

$$E_a - f_\beta(N) \neq 0,$$

c'est-à-dire

$$E - f(N) \neq 0,$$

conformément à $(*)$.

Notre théorème est ainsi démontré.

Si l'on pose $X = Y =$ *ensemble de tous les nombres réels*. $\mu^*(E) =$ *mesure extérieure de Lebesgue* et si l'on admet l'égalité $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, on obtient évidemment $\mathfrak{m}_0 = 2^{\aleph_0}$ et l'on retrouve les résultats de M. Sierpiński au début.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 12. 11. 1953