Quelques théorèmes sur les mesures

par

K. Urbanik (Wrocław)

Les théorèmes qui vont être établis concernent les décompositions d'un ensemble en sous-ensembles disjoints mesurés par diverses mesures, toutes ces mesures étant appliquées à la fois et prescrites d'avance. Ce sont donc les théorèmes d'existence des décompositions en question. Ils ont une double origine. L'une était l'étude de Knaster et Steinhaus [1]) sur le problème du partage pragmatique, dont les solutions se traduisent en langage de la théorie de la mesure par des théorèmes tels que le théorème 1 par exemple (voir plus loin, p. 151). L'autre origine est le travail plus récent de Liapounoff [2]) sur le choix des lois de distributions.

1. Considérons dans un espace E un corps dénombrablement additif $\boldsymbol{M}$ de certains de ses sous-ensembles (0 et E y compris) et n mesures dénombrablement additives finies $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$, définies pour les ensembles appartenant à $\boldsymbol{M}$. Les hypothèses sur ces mesures seront puisées parmi les suivantes:

I. *La famille des ensembles de mesure nulle est la même pour toutes les mesures* $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$.

II. *Elles sont non-atomiques, c'est-à-dire que pour tout* $i=1,2,\ldots,n$ *et pour tout* $X\in\boldsymbol{M}$, *l'inégalité* $\mu_i(X)>0$ *entraîne l'existence d'un* $Y\subset X$ *tel que* $\mu_i(X)>\mu_i(Y)>0$.

III. *Les mesures* $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$ *ne sont pas proportionnelles, c'est-à-dire qu'il existe un couple d'indices* i,j *et un ensemble* $X\in\boldsymbol{M}$ *pour lesquels* $\mu_i(X)/\mu_i(E)\neq\mu_j(X)/\mu_j(E)$.

L'hypothèse I implique la continuité absolue de chacune de ces mesures par rapport à chacune des autres, donc aussi par rapport à la moyenne $\mu=\sum_{i=1}^{n}\mu_i/n$. En vertu du théorème connu de Radon-Nikodym on a donc

(1) $\mu_i(X)=\int_X\varphi_i(x)\,d\mu(x)$ pour tous les $X\in\boldsymbol{M}$ et $i=1,2,\ldots,n$,

où $\varphi(x)$ désigne la densité de la mesure μ_i au point $x\in E$.

L'hypothèse II implique que [3])

(2) pour tout $i=1,2,\ldots,n$, tout $X\in\boldsymbol{M}$ et tout $\varepsilon>0$, l'inégalité $\varepsilon<\mu_i(X)$ entraîne l'existence d'un $Y\subset X$ tel que $\mu_i(Y)=\varepsilon$.

Le terme *décomposition* sera entendu partout comme décomposition en une somme d'un nombre fini d'ensembles disjoints, deux décompositions étant identifiées lorsque leurs sommandes respectifs ne diffèrent que par des ensembles de mesure nulle.

La décomposition $E=E_1+E_2+\ldots+E_n$ sera dite *parfaite* lorsque

(3) $$\mu_1(E_1)=\mu_2(E_2)=\ldots=\mu_n(E_n)$$

et que, pour toute décomposition

(4) $$E=X_1+X_2+\ldots+X_n$$

telle que

(5) $$\mu_1(X_1)=\mu_2(X_2)=\ldots=\mu_n(X_n),$$

on a

(6) $$\mu_i(E_i)\geqslant\mu_i(X_i)\quad\text{pour tout}\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Il peut y avoir une infinité de décompositions parfaites d'un même E.

2. Evidemment, lorsque les mesures $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n$ sont proportionnelles, *l'hypothèse* II *entraîne l'existence d'une décomposition* $E=E_1+E_2+\ldots+E_n$ *telle que*

(i) $$\mu_i(E_i)=\frac{\mu_i(E)}{n}\qquad\textit{pour tout}\quad i=1,2,\ldots,n$$

et toute décomposition de E *qui satisfait à* (i) *est une décomposition parfaite.*

Il suffit, en effet, d'appliquer (2) de proche en proche.

Par contre, en admettant l'hypothèse III, on parvient au résultat dont certaines interprétations pratiques peuvent paraître paradoxales [4]).

Théorème 1. *Les hypothèses* I, II *et* III *entraînent l'existence d'une décomposition* $E=E_1+E_2+\ldots+E_n$ *telle que*

(ii) $$\mu_i(E_i)>\frac{\mu_i(E)}{n}\qquad\textit{pour tout}\quad i=1,2,\ldots,n.$$

[1]) Voir [3].

[2]) Voir [4].

[3]) Voir [1], p. 52, théorème 5.6.2.

[4]) Voir [3], p. 3 et [2], p. 229. Un lot E peut être partagé d'une telle manière entre n participants dont les modes d'estimation μ_i ne sont pas identiques que chacun reçoive plus que $1/n$ d'après sa propre estimation.

Démonstration. Sans restreindre la généralité, on peut évidemment admettre que les mesures $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n$ sont *normées*, c'est-à-dire que

$$\mu_i(E)=1 \quad \text{pour tout} \quad i=1,2,\dots,n \tag{7}$$

(à savoir, en les divisant au besoin par celles de E tout entier).

Le symbole $\underset{x}{E}\{\ \}$ désignant l'ensemble de tous les $x\in E$ qui satisfont à la condition mise entre $\{\ \}$, posons pour tout $i=1,2,\dots,n$

$$L_i=\underset{x}{E}\{\varphi_i(x)\geqslant\varphi_j(x) \text{ pour tous les } j\neq i\} \tag{8}$$

ou — ce qui revient au même —

$$L_i=\underset{x}{E}\{\varphi_i(x)\geqslant\max_{j\neq i}\varphi_j(x)\}.$$

On a évidemment $E=L_1+L_2+\dots+L_n$ et par suite, en posant

$$M_i=L_i-\sum_{j=i+1}^{n}L_j, \tag{9}$$

on en tire la décomposition suivante de E

$$E=M_1+M_2+\dots+M_n. \tag{10}$$

Soit

$$N=\underset{x}{E}\{\max_{i=1,2,\dots,n}\varphi_i(x)-\min_{i=1,2,\dots,n}\varphi_i(x)>0\}. \tag{11}$$

μ désignant, comme précédemment, la moyenne de $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n$, l'égalité $\mu(N)=0$ exprimerait celle des densités φ_i presque partout, donc aussi, en vertu de (1), l'identité des mesures. En vertu de l'hypothèse III, on a donc nécessairement l'inégalité

$$\mu(N)>0. \tag{12}$$

Nous allons montrer que

$$\mu_i(M_i)\geqslant\frac{1}{n} \quad \text{pour un} \quad i=1,2,\dots,n-1 \text{ ou } n. \tag{13}$$

En effet, en supposant que

$$\mu_i(M_i)\geqslant\mu_j(M_i) \quad \text{pour tous les} \quad j=1,2,\dots,n, \tag{14}$$

on a en vertu de (10) et (14)

$$\mu_j(E)=\mu_j\Big(\sum_{i=1}^{n}M_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mu_j(M_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu_i(M_i)<1,$$

contrairement à (7). On a donc (13).

Ordonnons les mesures $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n$ de manière que l'indice i satisfaisant à (13) soit le premier:

$$\mu_1(M_1)\geqslant\frac{1}{n} \tag{15}$$

et définissons un ensemble Q_1 comme suit:

1° Si $\mu_1(M_1N)>0$, il existe en vertu de (11) un indice $k=1,2,\dots,n$ et un ensemble $P\subset M_1$ tels que

$$\mu_1(P)>0, \tag{16}$$

$$\varphi_k(x)=\min_{i=1,2,\dots,n}\varphi_i(x)<\varphi_1(x) \quad \text{pour tout} \quad x\in P. \tag{17}$$

Soit alors Q_1 un sous-ensemble quelconque de M_1 pour lequel on a

$$\mu_1(PQ_1)>0, \tag{18}$$

$$\mu_1(Q_1)=\frac{1}{n}; \tag{19}$$

un tel Q_1 existe en vertu de (15), (16) et (2).

2° Si $\mu_1(M_1N)=0$, soit Q_1 un sous-ensemble quelconque de M_1 satisfaisant à (19); un tel Q_1 existe en vertu de (15) et (2).

On conclut de (17), (18) et (19) que

$$\mu_k(Q_1)<\frac{1}{n} \quad \text{dans le cas } 1^\circ. \tag{20}$$

En même temps, on a dans les deux cas d'après (8)

$$\mu_i(E-Q_1)\geqslant\frac{n-1}{n} \quad \text{pour tout} \quad i=1,2,\dots,n, \tag{21}$$

mais en particulier, on a en vertu de (20)

$$\mu_k(E-Q_1)>\frac{n-1}{n} \quad \text{dans le cas } 1^\circ. \tag{22}$$

Ayant ainsi défini l'ensemble Q_1 assujetti aux conditions (18)-(22), passons à la définition de Q_i pour $i=2,3,\dots,n$.

Considérons les mesures $\mu_2,\mu_3,\dots,\mu_n$ dans l'ensemble $E-Q_1$ comme l'espace. Après avoir normé ces mesures, on peut évidemment appliquer encore le même procédé qui a servi pour définir Q_1. On forme ainsi Q_2 de façon que $\mu_2(Q_2)/\mu_2(E-Q_1)=1/(n-1)$. En vertu de (21), on a donc dans les deux cas $\mu_2(Q_2)\geqslant 1/n$.

L'itération de ce procédé fournit les ensembles $Q_3,Q_4,\dots,Q_{n-1}$. Enfin, soit $Q_n=E-\sum_{i=1}^{n-1}Q_i$. On parvient ainsi à la décomposition

$$E=Q_1+Q_2+\dots+Q_n. \tag{23}$$

Or, en vertu de (10) et (12), l'ensemble N empiète par une partie de mesure μ positive sur l'un au moins des sommandes $M_1, M_2, \dots, M_n$ de E, de sorte que le cas 1° se présente nécessairement au moins une fois au cours de la construction des ensembles $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$. On a donc

$$\mu_k(Q_k) > \frac{1}{n} \quad \text{pour un} \quad k = 1,2,\dots,n-1 \text{ ou } n, \tag{24}$$

tandis que

$$\mu_i(Q_i) \geqslant \frac{1}{n} \quad \text{pour tout} \quad i \neq k. \tag{25}$$

En vertu de (2), il existe par conséquent un ensemble $R_k \subset Q_k$ tel que

$$\mu_k(R_k) = \frac{1}{n}. \tag{26}$$

Décomposons l'ensemble $Q_k - R_k$ comme il suit

$$Q_k - R_k = S_1 + S_2 + \dots + S_n \quad \text{où} \quad S_i S_k = 0 \text{ pour } i \neq j, \tag{27}$$

$$\mu(S_i) > 0 \quad \text{pour tout} \quad i = 1,2,\dots,n \tag{28}$$

et définissons finalement les ensembles E_i pour $i = 1,2,\dots,n$ par la formule

$$E_i = \begin{cases} R_i + S_i & \text{pour} \quad i = k, \\ Q_i + S_i & \text{pour} \quad i \neq k. \end{cases} \tag{29}$$

En vertu de (10), (23) et (27), les ensembles E_i ainsi définis constituent une décomposition de E

$$E = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} E_i \quad \text{et} \quad E_i E_j = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j;$$

en vertu de (24)-(29), on a en même temps

$$\mu_i(E_i) = \begin{cases} \mu_i(R_i) + \mu_i(S_i) > \dfrac{1}{n} & \text{pour} \quad i = k, \\ \mu_i(Q_i) + \mu_i(S_i) > \dfrac{1}{n} & \text{pour} \quad i \neq k, \end{cases} \tag{30}$$

de sorte que, en vertu de (7), la condition (ii) se trouve satisfaite, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. *Les hypothèses* I *et* II *entraînent l'existence d'une décomposition* $E = E_1 + E_2 + \dots + E_n$ *telle que*

$$\mu_i(E_i) \geqslant \frac{\mu_i(E)}{n} \quad \textit{pour tout} \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{iii}$$

3. Envisageons à présent la question de compléter le Théorème 1 (donc aussi le corollaire qui précède) par une seconde thèse, à savoir concernant l'existence des décompositions parfaites de E parmi celles qui satisfont à (ii). Nous allons définir à ce but quelques ensembles auxiliaires et faire l'usage d'un théorème de Liapounoff. Soit

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

un point arbitraire du cube-unité I^n à n dimensions. Posons pour i et j parcourant les nombres $1,2,\dots,n$

$$A_{ij}(\xi) = \underset{x}{E}\{\xi_j \varphi_i(x) \leqslant \xi_i \varphi_j(x)\}, \tag{31}$$

$$A_j(\xi) = \prod_{i=1}^{n} A_{ij}(\xi), \tag{32}$$

$$B_j(\xi) = \prod_{i \neq j} [E - A_{ji}(\xi)]. \tag{33}$$

On a donc d'après (31)

$$A_j(\xi) = \prod_{i=1}^{n} \underset{x}{E}\{\xi_j \varphi_i(x) \leqslant \xi_i \varphi_j(x)\}, \tag{34}$$

$$B_j(\xi) = \prod_{i \neq j} \underset{x}{E}\{\xi_j \varphi_i(x) < \xi_i \varphi_j(x)\}, \tag{35}$$

$x \in E$ et $\varphi_i(x)$ ayant dans les formules (31)-(35) le même sens que dans la formule (1). Evidemment

$$B_j(\xi) \subset A_j(\xi) \quad \text{pour tout} \quad j = 1,2,\dots,n, \tag{36}$$

$$E = A_1(\xi) + A_2(\xi) + \dots + A_n(\xi), \tag{37}$$

tandis que les $B_j(\xi)$ peuvent être vides (en admettant l'hypothèse III par exemple).

Convenons d'appeler une décomposition de la forme

$$E = T_1(\xi) + T_2(\xi) + \dots + T_n(\xi) \tag{38}$$

décomposition correspondante au point ξ ou ξ-*décomposition* tout court lorsqu'elle satisfait aux conditions

$$T_i(\xi) T_j(\xi) = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq i, \tag{39}$$

$$B_i(\xi) \underset{\mu}{\subset} T_i(\xi) \underset{\mu}{\subset} A_i(\xi) \quad \text{pour tout} \quad i = 1,2,\dots,n; \tag{40}$$

la notation $X \underset{\mu}{\subset} Y$ remplace ici — et remplacera dorénavant — l'égalité $\mu(X - Y) = 0$.

Liapounoff [5]) a établi un théorème qui peut être formulé comme suit dans cette terminologie:

[5]) Voir [4], p. 180-184.

En admettant les hypothèses I *et* II, *il existe un point intérieur* ξ *de* I^n *et une* ξ*-décomposition* (38) *de* E *telle que*

$$\mu_1[T_1(\xi)]=\mu_2[T_2(\xi)]=\ldots=\mu_n[T_n(\xi)]=\sup[\min_{i=1,2,\ldots,n}\mu_i(E_i)], \tag{41}$$

où sup s'étend à toutes les décompositions de E. Elle est donc parfaite.

Il en résulte aussitôt la possibilité de compléter le Théorème 1 de la façon suivante:

Théorème 2. *Les hypothèses* I, II *et* III *entraînent l'existence d'une décomposition parfaite de* E *parmi les décompositions qui satisfont à* (ii).

En effet, si l'on admet I et II, toute décomposition (38) de E assujettie à la condition (41) — et qui existe en vertu du Théorème de Liapounoff — est parfaite. Si l'on admet III, cette décomposition satisfait à (ii) en vertu de (41) et du Théorème 1.

4. Pour examiner la question[6]) combien y a-t-il de décompositions parfaites de E, nous allons établir d'abord deux lemmes.

Lemme 1. *Deux décompositions parfaites de* E

$$\begin{aligned} E&=T_1+T_2+\ldots+T_n,\\ E&=U_1+U_2+\ldots+U_n \end{aligned} \tag{42}$$

étant données et l'hypothèse I *admise, l'existence pour un* j *d'un* $i\neq j$ *tel que*

$$\mu(T_iU_j)>0 \tag{43}$$

entraîne celle d'un $k\neq j$ *tel que*

$$\mu(T_jU_k)>0.$$

Démonstration. Supposons en effet que l'on ait

$$\mu(T_jU_k)=0 \quad \text{pour tout} \quad k\neq j;$$

en vertu de l'hypothèse I, on a donc

$$\mu_j(T_jU_k)=0 \quad \text{pour tout} \quad k\neq j,$$

c'est-à-dire

$$\mu_j(T_j\sum_{k\neq j}U_k)=0.$$

Il s'ensuit en vertu de l'identité

$$T_j=T_jU_j+T_j\sum_{k\neq j}U_k,$$

qui résulte de (42), que

$$\mu_j(T_j)=\mu_j(T_jU_j). \tag{44}$$

[6]) Posée par B. Knaster.

D'autre part, (43) entraîne en vertu de l'hypothèse I l'inégalité

$$\mu_j(T_iU_j)>0,$$

donc à plus forte raison l'inégalité

$$\mu_j\Big(\sum_{i\neq j}T_iU_j\Big)>0$$

et il s'ensuit en vertu de l'identité analogue

$$U_j=T_jU_j+\sum_{i\neq j}T_iU_j$$

que $\mu_j(U_j)>\mu_j(T_jU_j)$, d'où $\mu_j(U_j)>\mu_j(T_j)$ en vertu de (44), contrairement à l'hypothèse que les deux décompositions sont parfaites.

Lemme 2. *Les hypothèses* I *et* II *entraînent l'existence d'un point intérieur* ξ *de* I^n *tel que toute décomposition parfaite de* E *est une* ξ*-décomposition.*

Démonstration. Soit ξ un point intérieur de I^n pour lequel il existe une ξ-décomposition parfaite (38) de E en vertu du Théorème précité de Liapounoff. Considérons une décomposition parfaite quelconque de E de la forme (4). Il s'agit de montrer qu'elle est une ξ-décomposition. Or, on a

$$X_jT_i(\xi)\underset{\mu}{\subset}A_{ij}(\xi) \quad \text{pour tous les} \quad i\neq j. \tag{45}$$

En effet, la condition I étant admise, on a d'après (1) pour tout $k=1,2,\ldots,n$ et tout $l=1,2,\ldots,n$

$$\mu_k[X_lT_k(\xi)]=\int\limits_{X_lT_k(\xi)}\frac{\varphi_k(x)}{\varphi_l(x)}\,d\mu_l(x)$$

et comme $T_k(\xi)\underset{\mu}{\subset}A_k(\xi)$ d'après (44), il vient en appliquant (34) à k et l

$$\int\limits_{X_lT_k(\xi)}\frac{\varphi_k(x)}{\varphi_l(x)}\,d\mu_l(x)\geqslant\frac{\xi_k}{\xi_l}\int\limits_{X_lT_k(\xi)}d\mu_l(x)=\frac{\xi_k}{\xi_l}\mu_l[X_lT_k(\xi)].$$

Par conséquent

$$\frac{\mu_k[X_lT_k(\xi)]}{\xi_k}\geqslant\frac{\mu_l[X_lT_k(\xi)]}{\xi_l}, \tag{46}$$

quelles que soient les valeurs $1,2,\ldots,n$ de k et l.

Supposons à présent, contrairement à (45), qu'il existe un couple de valeurs i,j où $i\neq j$ et pour lesquelles

$$\mu[X_jT_i(\xi)-A_{ij}(\xi)]>0;$$

on aurait donc d'après (31)

$$\int_{X_jT_i(\xi)-A_{ij}(\xi)} \frac{\varphi_i(x)}{\varphi_j(x)}\,d\mu_j(x) > \frac{\xi_i}{\xi_j}\int_{X_jT_i(\xi)} d\mu_j(x) = \frac{\xi_i}{\xi_j}\mu_j[X_jT_i(\xi)],$$

d'où

$$\frac{\mu_i[X_jT_i(\xi)]}{\xi_i} > \frac{\mu_j[X_jT_i(\xi)]}{\xi_j}$$

pour ces valeurs de i et j. En vertu de (46), on aurait donc par sommation

$$\sum_{\substack{k=1\\ l=1}}^{n} \frac{\mu_k[X_lT_k(\xi)]}{\xi_k} > \sum_{\substack{k=1\\ l=1}}^{n} \frac{\mu_l[X_lT_k(\xi)]}{\xi_l},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k[T_k(\xi)\sum_{l=1}^{n} X_l]}{\xi_k} > \sum_{l=1}^{n} \frac{\mu_l[X_l\sum_{k=1}^{n} T_k(\xi)]}{\xi_l}$$

et, les sommes qui figurent dans les numérateurs des deux membres de cette inégalité étant égales à E d'après (4) et (38), elle se réduirait à

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k[T_k(\xi)]}{\xi_k} > \sum_{l=1}^{n} \frac{\mu_l(X_l)}{\xi_l},$$

donc à

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k(X_k)}{\xi_k} > \sum_{l=1}^{n} \frac{\mu_l(X_l)}{\xi_l},$$

les deux décompositions étant parfaites par hypothèse. La dernière égalité étant contradictoire, la relation (45) se trouve établie.

Elle entraîne aussitôt en vertu de (40)

(47) $$X_jT_i(\xi) \underset{\mu}{\subset} A_i(\xi)A_{ij}(\xi) \quad \text{pour tous les} \quad i\neq j.$$

Mais on a en vertu de (36)

$$A_{mi}(\xi)A_{ij}(\xi)\subset A_{mj}(\xi) \quad \text{pour tout} \quad m=1,2,\ldots,n,$$

d'où en vertu de (32) par substitution de m à i et de i à j

$$A_i(\xi)A_{ij}(\xi)=\prod_{m=1}^{n} A_{mi}(\xi)A_{ij}(\xi)\subset\prod_{m=1}^{n} A_{mj}(\xi)=A_j(\xi),$$

de sorte que la relation (47) devient

(48) $$X_jT_i(\xi) \underset{\mu}{\subset} A_j(\xi) \quad \text{pour tous les} \quad i\neq j.$$

D'autre part, on a d'après (33) par la même substitution des indices

$$B_i(\xi)=\prod_{m\neq i}[E-A_{im}(\xi)]\subset E-A_{ij}(\xi),$$

d'où en vertu de (47)

(49) $$X_jT_i(\xi) \underset{\mu}{\subset} [A_i(\xi)-B_i(\xi)]A_{ij}(\xi) \quad \text{pour tous les} \quad i\neq j.$$

Mais $X_j=X_jE$ d'après (4), d'où en vertu de (38)

$$X_j=X_jT_j(\xi)+X_j\sum_{i\neq j} T_i(\xi)$$

de sorte qu'en appliquant (40) et (48), il vient

(50) $$X_j \underset{\mu}{\subset} A_j(\xi) \quad \text{pour tout} \quad j=1,2,\ldots,n.$$

Enfin, $B_j(\xi)=B_j(\xi)E$ en vertu de (36) et (37), d'où en vertu de (4)

(51) $$B_j(\xi)=B_j(\xi)X_j+B_j(\xi)\sum_{i\neq j} X_i=B_j(\xi)X_j+\sum_{i\neq j} B_j(\xi)X_j$$

et comme $B_j(\xi) \underset{\mu}{\subset} B_j(\xi)T_j(\xi)$ d'après (40), on a

$$B_j(\xi)X_i \underset{\mu}{\subset} B_j(\xi)X_iT_j(\xi),$$

de sorte qu'en appliquant (49) avec indices intervertis, (51) devient

$$B_j(\xi) \underset{\mu}{\subset} B_j(\xi)X_j+\sum_{i\neq j} B_j(\xi)A_j(\xi)-B_j(\xi)A_{ij}(\xi)=B_j(\xi)X_j \quad \text{pour tout} \quad j=1,2,\ldots,n,$$

puisque tout terme sous le signe Σ s'annule identiquement comme contenant deux facteurs disjoints. La dernière relation et (50) donnent

$$B_j(\xi) \underset{\mu}{\subset} X_j \underset{\mu}{\subset} A_j(\xi) \quad \text{pour tout} \quad j=1,2,\ldots,n,$$

ce qui prouve que la condition (40) est satisfaite en y substituant X_i à $T_i(\xi)$. La condition (39) l'étant également d'après (4), on conclut que la décomposition (4) est une ξ-décomposition, c. q. f. d.

THÉORÈME 3. *En admettant les hypothèses* I *et* II, *il existe soit une seule, soit au moins* $2^{\aleph_0}$ *décompositions parfaites de* E *distinctes deux à deux.*

Démonstration. En vertu du lemme 2, toutes les décompositions parfaites de E sont des ξ-décompositions (pour un ξ intérieur à I^n). Soient (38) et

(52) $$E=U_1(\xi)+U_2(\xi)+\ldots+U_n(\xi)$$

deux ξ-décompositions parfaites de E différentes l'une de l'autre. En vertu du lemme 1, il existe un système de couples ordonnés d'indices

$$(i_1,j_1),\ (j_1,i_2),\ (i_2,j_2),\ \dots,\ (j_s,i_1) \tag{53}$$

tels que

$$i_1\neq j_1,\ j_1\neq i_2,\ i_2\neq j_2,\ \dots,\ j_s\neq i_1$$

et que

$$\begin{aligned}&\mu[T_{i_1}(\xi)U_{j_1}(\xi)]>0,\\ &\mu[T_{j_1}(\xi)U_{i_2}(\xi)]>0,\\ &\mu[T_{i_2}(\xi)U_{j_2}(\xi)]>0,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &\mu[T_{j_s}(\xi)U_{i_1}(\xi)]>0.\end{aligned} \tag{54}$$

Il est évident que $s\leqslant n$ et que les mesures $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n$ peuvent être rangées dans un ordre tel que le système (53) prenne la forme d'un cycle (mod s)

$$(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ \dots,\ (s-1,s),\ (s,1).$$

Soient $V_1,V_2,\dots,V_{2^n-1}$ tous les sous-ensembles non-vides de l'ensemble des indices $V=\{1,2,\dots,n\}$. Posons

$$C_m(\xi)=\prod_{i\in V_m}[A_i(\xi)-B_i(\xi)]\prod_{j\in V-V_m}[E-A_j(\xi)]. \tag{55}$$

Il est facile de voir que

$$B_i(\xi)C_m(\xi)=0 \quad \text{et} \quad A_i(\xi)\subset B_i(\xi)+\sum_{m-1}^{2^n-1}C_m(\xi)$$

pour tout $i=1,2,\dots,n$ et tout $m=1,2,\dots,2^n-1$. Il en résulte en vertu de (40), de (54) et de la condition I l'existence d'un système d'indices $m_1,m_2,\dots,m_s$ pour lequel $i\in V_{m_i}$, $i+1\in V_{m_i}$ et

$$\mu_i[C_{m_i}(\xi)T_i(\xi)]>0 \quad \text{pour tout} \quad i=1,2,\dots,s \ (\text{mod } s). \tag{56}$$

Puisque $C_{m_i}(\xi)$ est contenu dans A_i et A_{i+1} d'après (55), donc dans $A_{i+1,i}$ et $A_{i,i+1}$ d'après (32) en y substituant $i+1$ à i et i à j et inversement, on tire de (31) la proportion

$$\xi_i\varphi_{i+1}(x)=\xi_{i+1}\varphi_i(x) \quad \text{pour tout} \quad x\in C_{m_i}(\xi),$$

d'où il résulte par intégration que l'on a pour tout sous-ensemble $X\in\boldsymbol{M}$ de $C_{m_i}(\xi)$

$$\mu_{i+1}(X)=\frac{\xi_{i+1}}{\xi_i}\mu_i(X), \quad \text{quel que soit } i=1,2,\dots,s \ (\text{mod } s). \tag{57}$$

Posons

$$\Delta=\frac{\min\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\mu_i[C_{m_i}(\xi)T_i(\xi)]}{\max\limits_{1\leqslant i\leqslant s}\frac{\xi_i}{\xi_1}}.$$

Le point ξ étant à l'intérieur de I^n, on a $\Delta>0$ d'après (56). En vertu de l'hypothèse II, il existe par conséquent pour tout δ tel que $0<\delta\leqslant\Delta$ et pour tout $i=1,2,\dots,s$ un ensemble $D_i^\delta\in\boldsymbol{M}$ tel que

$$D_i^\delta\subset C_{m_i}(\xi)T_i(\xi) \quad \text{et} \quad \mu_i(D_i^\delta)=\frac{\xi_i}{\xi_1}\delta,$$

d'où en vertu de (57)

$$\mu_i(D_{i-1}^\delta)=\frac{\xi_i}{\xi_{i-1}}\mu_{i-1}(D_{i-1}^\delta)=\frac{\xi_i}{\xi_1}\delta=\mu_i(D_i) \tag{58}$$

pour tout $i=1,2,\dots,s$ (mod s).

Faisons correspondre à tout $\delta\leqslant\Delta$ positif une décomposition

$$E=E_1^\delta+E_2^\delta+\dots+E_n^\delta \tag{59}$$

définie comme suit

$$E_i^\delta=\begin{cases}T_i(\xi)-D_i^\delta+D_{i-1}^\delta & \text{pour } i=1,2,\dots,s,\\ T_i & \text{pour } i=s+1,s+2,\dots,n.\end{cases} \tag{60}$$

Alors — comme on le voit aisément — aux valeurs différentes de δ viennent correspondre les décompositions (59) différentes.

Reste à montrer qu'elles sont parfaites. On a en effet d'après (60)

$$\mu_i(E_i^\delta)=\mu_i[T_i(\xi)]-\mu_i(D_i^\delta)+\mu_i(D_{i-1}^\delta) \quad \text{pour} \quad i=1,2,\dots,s,$$

d'où en vertu de (58) et (60)

$$\mu_i(E_i^\delta)=\mu_i[T_i(\xi)] \quad \text{pour tout} \quad i=1,2,\dots,n.$$

La décomposition (38) étant parfaite par hypothèse, il en est donc de même de la décomposition (59), c. q. f. d.

5. Il est facile de montrer que la thèse du théorème de Liapounoff formulée p. 156 se laisse exprimer d'une manière équivalente comme il suit: il existe une décomposition parfaite $E=E_1+E_2+\dots+E_n$ qui satisfait à l'égalité

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n}\mu_i(E_i)=\max[\min_{1\leqslant i\leqslant n}\mu_i(X_i)]$$

où max s'étend à toutes les décompositions (4) de E. Or, la fonction min, qui figure dans les deux membres de cette égalité, est non-décroissante et continue par rapport à chacune des variables $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n$.

On peut démontrer facilement que tous les théorèmes de ce travail subsistent lorsqu'on remplace la fonction min par n'importe quelle fonction réelle f de n variables réelles, non-décroissante et continue par rapport à chacune d'elles, les décompositions parfaites étant alors à entendre dans le sens relativisé suivant:

$a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ étant le point de I^n auquel la fonction f atteint son maximum, la décomposition $E=E_1+E_2+\ldots+E_n$ est *f-parfaite* lorsque

$$\mu_1(E_1):\mu_2(E_2):\ldots:\mu_n(E_n)=a_1:a_2:\ldots:a_n$$

et que, pour toute décomposition (4) de E pour laquelle

$$\mu_1(X_1):\mu_2(X_2):\ldots:\mu_n(X_n)=a_1:a_2:\ldots:a_n,$$

la condition (6) est satisfaite.

Travaux cités

[1] H. Hahn et A. Rosenthal, *Set functions*, Albuquerque 1948.

[2] B. Knaster, *Sur le problème du partage pragmatique de H. Steinhaus*, Comptes Rendus de la Société Polonaise de Mathématique, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 19 (1946), p. 228-230.

[3] B. Knaster et H. Steinhaus, *Sur le partage pragmatique*, Comptes Rendus de la Société des Sciences et des Lettres de Wrocław 2 (1953), communication n° 1 du 17 janvier 1947.

[4] А. А. Ляпунов, *О выборе из конечного числа законов распределения*, Успехи математических наук 6 (1951), стр. 178-186.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 18. 9. 1953

Sur une propriété des transformations des ensembles abstraits

par

J. Poprużenko (Łódź)

M. Sierpiński a démontré en 1932 [1]) le théorème suivant sur les familles de transformations des ensembles linéaires:

Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ et F est une famille de puissance du continu d'ensembles linéaires de puissance du continu, il existe toujours un ensemble linéaire de puissance du continu, dont les images continues sont distinctes de tout ensemble de la famille F.

De plus, M. Sierpiński a remarqué que ce théorème peut être sans peine généralisé: „Au lieu des images continues on peut notamment prendre les images de Baire et, plus généralement, une famille quelconque de puissance du continu de transformations des ensembles à l'aide de fonctions mesurables d'une variable réelle" (loc. cit., p. 210).

Le but de la présente Note est d'établir une généralisation de ces résultats.

Soit X un ensemble d'éléments x quelconques de puissance $\overline{\overline{X}}=\mathfrak{m}>\aleph_0$ et soit $\mu^*(E)$ $(E\subset X)$ une mesure extérieure abstraite non identiquement nulle, finie et disparaissant sur les points existant sur X [2]).

Posons $\mathfrak{m}=\aleph_{\eta_0}$, où η_0 est un nombre ordinal >0. η étant un nombre ordinal de l'intervalle $0\leqslant\eta\leqslant\eta_0$, désignons par (T_η) la proposition suivante:

(T_η) *Il existe une famille de puissance $\aleph_\eta$ de sous-ensembles de X de mesure $\mu=0$ telle que la somme de tous ces ensembles soit un ensemble de mesure extérieure $\mu^*>0$.*

[1]) W. Sierpiński, *Un théorème concernant les transformations continues des ensembles linéaires*, Fund. Math. 19 (1932), p. 208.

[2]) Plus précisément: $\mu^*(E)$ est une fonction réelle arbitraire, définie pour tout $E\subset X$ et satisfaisant aux 4 conditions suivantes:

1. $\mu^*(E)\geqslant 0$ et $0<\mu^*(X)<\infty$,
2. $\mu^*(E_1)\leqslant\mu^*(E_2)$ si $E_1\subset E_2$,
3. $\mu^*\left(\sum_{n=1}^{\infty}E_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(E_n)$,
4. $\mu^*\big((x)\big)=0$ pour $x\in X$.

La mesurabilité est définie par l'équation fonctionnelle bien connue de Carathéodory.