Sur une décomposition des ensembles indénombrables (I)

par

J. Poprużenko (Łódź)

Désignons par (K) la proposition suivante:

Proposition (K). *E étant un ensemble de puissance $\mathfrak{m}$, il existe une suite double $\{A_m^i\}$ de sous-ensembles de E telle que*

1⁰ *les égalités suivantes sont valables*

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
&E=A_1^1+A_2^1+\ldots+A_m^1+\ldots\\
&E=A_1^2+A_2^2+\ldots+A_m^2+\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&E=A_1^i+A_2^i+\ldots+A_m^i+\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

2⁰ *les ensembles d'une même ligne sont disjoints,*

3⁰ *quelle que soit la suite d'entiers positifs $\{m_i\}$, le produit*

$$\prod_{i=1}^{\infty}(A_1^i+A_2^i+\ldots+A_{m_i}^i)$$

est au plus dénombrable.

Banach et Kuratowski ont démontré en 1929 [1]) que *l'égalité $\aleph_1=2^{\aleph_0}$ entraîne la Proposition* (K) *pour* $\mathfrak{m}=2^{\aleph_0}$.

M. Sierpiński a déduit le même résultat de la propriété (L) de Lusin, et ceci dans deux voies différentes: soit immédiatement [2]), soit par l'intermédiaire de son théorème sur l'existence d'une suite convergente de fonctions réelles qui converge non uniformément dans tout ensemble non dénombrable [3]).

Par ces recherches de M. Sierpiński fut posée pour la première fois la question sur la dépendance entre l'existence de certains espaces singuliers et celle de la décomposition (1), imaginée par Banach et Kuratowski. Dans cet ordre d'idées, nous allons démontrer le suivant

Théorème. *Pour qu'il existe au moins un aleph indénombrable $\mathfrak{m}$ satisfaisant à la Proposition* (K), *il faut et il suffit qu'il existe un ensemble de nombres réels de puissance $\aleph_1$ jouissant de la propriété λ et dépourvu de la propriété λ'.*

1) S. Banach et C. Kuratowski [1].

2) W. Sierpiński [3].

3) W. Sierpiński [4], p. 46 et 52, confronter avec [5] (Théorème d'équivalence).

Démonstration.

1. Nécessité. Supposons que la Proposition (K) soit réalisée pour un certain aleph indénombrable $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_0$.

Désignons par H un sous-ensemble de E de puissance $\aleph_1$.

La suite $\{A_m^i\}$ satisfaisant aux conditions 1⁰-3⁰, multiplions les deux côtés du tableau (1) par H. On obtient ainsi une nouvelle décomposition

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&H=B_1^1+B_2^1+\ldots\\
&H=B_1^2+B_2^2+\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

de la même nature. Ceci étant, soit $\{f_n(x)\}$ une suite de fonctions réelles définies pour $x\in H$, convergente vers 0, qui converge non uniformément dans tout sous-ensemble non dénombrable de H; une telle suite existe dans les conditions présentes, car son existence est équivalente, comme l'a démontré M. Sierpiński [4]), à celle de la décomposition (2). Cette suite étant déterminée, posons pour $x\in H$

$$(3)\qquad k_i^x=\textit{le premier indice tel que}\quad f_n(x)<\frac{1}{i}\quad \textit{pour}\quad n\geqslant k^x.$$

Désignons par Φ la famille de toutes les suites *distinctes* d'entiers positifs $\{k_i^x\}$ $(i=1,2,\ldots;\ x\in H)$ ainsi définies. On vérifie sans peine, en s'appuyant sur la singularité mentionnée de la suite $\{f_n(x)\}$, que la famille Φ jouit des 2 propriétés suivantes:

1. $\overline{\overline{\Phi}}=\overline{\overline{H}}=\aleph_1$,

2. Φ est non bornée au sens de la relation $\prec$ [5]).

En effet, la supposition contraire entraînerait, dans tous les deux cas, l'existence d'un sous-ensemble indénombrable de H dans lequel la convergence de $\{f_n(x)\}$ serait uniforme, ce qui est impossible.

Ceci établi, on passe par un simple procédé transfini à une nouvelle famille de suites d'entiers positifs, Ψ, ayant les mêmes propriétés que Φ et bien ordonnée (en type Ω) par la relation $\prec$. En posant

$$\xi=\frac{1|}{|k_1}+\frac{1|}{|k_2}+\ldots$$

4) Voir W. Sierpiński [5]. La démonstration, effectuée par l'auteur pour $\mathfrak{m}=2^{\aleph_0}$, est valable pour tout $\mathfrak{m}$ indénombrable $\leqslant 2^{\aleph_0}$.

5) Étant données deux suites d'entiers positifs $a=(a_1,a_2,\ldots)$ et $b=(b_1,b_2,\ldots)$, on écrit $a\prec b$ si l'on a $a_i\leqslant b_i$ à partir d'un certain indice $i=i_0$.

pour toute suite $\{k_i\}$ appartenant à Ψ, on définit, comme l'a démontré M. Rothberger[6]), un ensemble de nombres irrationnels qui jouit de la propriété λ et qui la perd dès qu'on l'augmente de l'ensemble des nombres rationnels. Cet ensemble étant évidemment de puissance $\aleph_1$, la nécessité de la condition de notre théorème est démontrée.

II. Suffisance. Soit $\aleph_\eta$ l'aleph de M. Rothberger, symbole de la plus petite puissance pour laquelle il existe des ensembles de nombres réels jouissant de la propriété λ et dépourvus de la propriété λ'. On sait que c'est un aleph régulier satisfaisant à l'inégalité $\aleph_1 \leqslant \aleph_\eta \leqslant 2^{\aleph_0}$ [7]).

Nous déduirons la suffisance de notre condition du suivant

LEMME. *E étant un ensemble de puissance $\aleph_\eta$, il existe une suite double $\{A_m^i\}$ de sous-ensembles de E satisfaisant aux conditions* 1° *et* 2° *de la Proposition* (K) *et à la condition suivante*:

(3*) *Quelles que soient les suites infinies d'entiers positifs $\{i_s\}$ et $\{m_s\}$ dont la première est croissante, si l'on pose*

$$P_s = A_1^{i_s} + A_2^{i_s} + \ldots + A_{m_s}^{i_s}, \tag{4}$$

on a

$$\overline{\overline{\operatorname*{Lim}_{s\to\infty} P_s}} < \aleph_\eta. \tag{5}$$

La démonstration s'appuye sur cette propriété que j'ai démontrée autre part[8]):

Il existe dans tout ensemble E de puissance $\aleph_\eta$ au moins une suite convergente de fonctions réelles qui converge non uniformément dans tout sous-ensemble de E de puissance $\aleph_\eta$.

Soit $\{f_n(x)\}$ une telle suite. La famille Φ de suites d'entiers positifs étant définie comme plus haut (voir la formule (3)), posons

$$A_m^i = \underset{x}{E}\{x \in E,\ k_i^x = m\} \tag{6}$$

pour $i = 1, 2, \ldots$; $m = 1, 2, \ldots$ La suite $\{A_m^i\}$ ainsi définie satisfait évidemment aux conditions 1° et 2°. Je dis qu'elle satisfait aussi à la condition (3*).

En effet, soient $\{i_s\}$ et $\{m_s\}$ deux suites arbitraires d'entiers positifs dont la première est croissante. Considérons l'ensemble

$$Q_s = \prod_{l=0}^{\infty} P_{s+l}$$

[6]) F. Rothberger [2], Théorème 2, p. 299, voir aussi W. Sierpiński [6].

[7]) F. Rothberger [2], p. 296.

[8]) J. Poprużenko, *Sur le phénomène de convergence de M. Sierpiński*, ce volume, p. 29-37.

pour $s = 1, 2, \ldots$ La relation $x \in Q_s$ donne, selon (4),

$$x \in A_1^{i_{s+l}} + A_2^{i_{s+l}} + \ldots + A_{m_{s+l}}^{i_{s+l}}$$

pour tout $l \geqslant 0$, d'où il résulte en vertu de (3) et (6)

$$f_n(x) < \frac{1}{i_{s+l}} \quad \text{pour} \quad n \geqslant m_{s+l}, \quad l \geqslant 0,$$

ce qui démontre, d'après la relation $\lim\limits_{s\to\infty} i_s = \infty$, que la suite $\{f_n(x)\}$ converge uniformément dans Q_s $(s = 1, 2, \ldots)$. On a donc, en vertu de la propriété mentionnée de la suite $\{f_n(x)\}$, $\overline{\overline{Q}}_s < \aleph_\eta$ $(s = 1, 2, \ldots)$, ce qui entraîne, $\aleph_\eta$ étant régulier, la formule (5).

Notre lemme est ainsi établi[9]).

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de remarquer que s'il existe un ensemble de puissance $\aleph_1$ à propriété demandée, on a sûrement $\aleph_1 = \aleph_\eta$ et l'inégalité (5) donne, à plus forte raison, la condition 3°. La Proposition (K) est donc vraie pour $\mathfrak{m} = \aleph_1$.

Travaux cités

[1] S. Banach et C. Kuratowski, *Sur une généralisation du problème de la mesure*, Fund. Math. 14 (1929), p. 127-131.

[2] F. Rothberger, *Sur un ensemble toujours de première catégorie qui est dépourvu de la propriété λ*, Fund. Math. 32 (1939), p. 239-300.

[3] W. Sierpiński, *Remarque sur un ensemble de M. Lusin*, Fund. Math. 22 (1934), p. 312-314.

[4] — *Hypothèse du continu*, Monografie Matematyczne 34, Warszawa-Lwów 1934.

[5] — *Sur un théorème de MM. Banach et Kuratowski*, Fund. Math. 14 (1929), p. 277-280.

[6] — *Sur un ensemble à propriété λ*, Fund. Math. 32 (1939), p. 306-310.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 17. 9. 1953

[9]) On voit donc que la Proposition (K) peut être démontrée, pour un certain $\mathfrak{m}$, sans recours aux prémisses hypothétiques si l'on remplace la condition 3° par l'inégalité moins rigoureuse „$<\mathfrak{m}$“.